

Hamada's theorem for Tricomi type equations.

同志社大 工 浦部 治一郎

複素領域に於て、解析的な係数を持つ線型偏微分方程式に対する非特性的初期値問題を扱う。初期値が解析的な場合 Cauchy-Kowalevskaya の定理として、解の局所的な存在と一意性が知られている。初期値が極を持つ場合にはどうなるのかと云う問題があるが、偏微分作用素の特性根の多重度が一定の場合は、沢田、Leng, Wajschal [1] で又、包含的な特性根をもつ場合は中村 [3] 沢田、中村 [2] で扱われた。ここでは、Tricomi 作用素を一般化した作用素に対して同様の問題を考える。これは浦部 [5] の拡張である。(この問題を考えるに当り色々とお教示いただいた沢田先生に感謝の意を表します。)

§1. 記号 $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ $x' = (x_1, \dots, x_n)$
 $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_n)$
 $D = (D_0, D_1, \dots, D_n)$ $D' = (D_1, \dots, D_n)$ 但し $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$
 $\Omega : \mathbb{C}^{n+1}$ の原点の近傍.

$L^k(\Omega)$: Ω に於て解析的な係数を持つ k -次の線型偏微分作用素全体.

Triconi 作用素 $D_0^2 - x_0 D_1^2$ の一般化として次の型の作用素 L を考える.

$$L(x, D) = P(x, D)^2 - x_0 Q(x, D') + R(x, D)$$

$$L(x, D) \in L^{2m}(\Omega), \quad P(x, D) \in L^m(\Omega), \quad Q(x, D) \in L^{2m}(\Omega), \quad R(x, D) \in L^{2m-1}(\Omega)$$

ここで $P(x, z')$ と $Q(x, z')$ に次の仮定をする.

仮定 A $\left\{ \begin{array}{l} (i) \ P(x, z') \text{ は } m \text{ 次斉次多項式 } (z' \text{ についての}) \\ (ii) \ P(x, 1, 0, \dots, 0) \equiv 1 \\ (iii) \ z_0 \text{ に関する方程式 } P(0; z_0, 1, 0, \dots, 0) = 0 \text{ は互いに相異なる} \\ \quad m \text{ 根 } \lambda_i (i=1, \dots, m) \text{ を持つ.} \end{array} \right.$

仮定 B $\left\{ \begin{array}{l} (i) \ Q(x, z') \text{ は } 2m \text{ 次斉次多項式 } (z' \text{ についての}) \\ (ii) \ Q(0; 1, 0, \dots, 0) \neq 0 \end{array} \right.$

この $L(x, D)$ に対して次の非特性的初期値問題を考える.

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} L(x, D) u(x) = 0 \\ D_{x_0}^h u(0, x') = \bar{w}_h(x') \quad (h=0, \dots, 2m-1) \end{array} \right.$$

ここで $\bar{w}_h(x')$ は $x_0 = x_1 = 0$ 上に極を持つ.

まず, $L(x, D)$ に対して $x_0 = x_1 = 0$ を出発する m 枚の特性面が存在する. その特性面を $K_i (i=1, \dots, m)$ と記す. K_i は次の特性方

方程式の解 $\varphi_i^\pm(x)$ によつて、 $K_i = \{x; \varphi_i^\pm(x) = 0\}$ として表わされる。

$$\begin{cases} \dot{L}(x, \varphi_i^\pm x) = 0 \\ \varphi_i^\pm(0, x') = x_1 & \varphi_{i, x_0}^\pm(0) = \lambda_i \end{cases}$$

$$(\text{但し } \dot{L}(x, z) \equiv P(x, z) - x_0 Q(x, z'))$$

$K \equiv \bigcup_{i=1}^m K_i$ とする。得られた結果は初期値問題(*)の解が $\mathbb{C}^m$ の原点の小さな近傍 D_r から K を除いた集合 $D_r \setminus K$ 上の一般被覆面上で存在し、正則かつ一意的であると言う事である。もう少し詳しく述べるため、次の補助関数を導入する。

$$k_\alpha(p) \equiv \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{p^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) = (\log p + \psi(\alpha+1)) \frac{p^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ \text{特に } \alpha = -1, -2, \dots \text{ に対しては } |\alpha+1|(-1)^{\alpha-1} p^\alpha \end{cases}$$

$$\psi(\alpha+1) \equiv \frac{\frac{d}{d\alpha} \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \text{ である。}$$

$$\frac{d}{dp} k_\alpha(p) = k_{\alpha-1}(p) \text{ という関係がある。}$$

$$\begin{cases} X_\alpha(\theta, p) \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(F\left(\frac{1}{6}, -\alpha, \frac{1}{3}; 1 - \frac{\varphi^+}{\varphi^-}\right) \frac{(\varphi^+)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \\ Y_\alpha(\theta, p) \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(F\left(\frac{5}{6}, -\alpha, \frac{5}{3}; 1 - \frac{\varphi^+}{\varphi^-}\right) \frac{\theta(\varphi^+)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \end{cases}$$

$$\varphi^+ = p + \frac{2}{3} \theta^{3/2}, \quad \varphi^- = p - \frac{2}{3} \theta^{3/2} \text{ である。}$$

$$\text{これら } X_\alpha, Y_\alpha \text{ は各々 Tricomi 方程式 } (\partial_\theta^2 - \theta \partial_p^2) X_\alpha = 0, (\partial_\theta^2 - \theta \partial_p^2) Y_\alpha = 0$$

$$\text{をみたし、初期値は } X_\alpha(0, p) = k_\alpha(p), X_{\alpha 0}(0, p) = 0, Y_\alpha(0, p) = 0, Y_{\alpha 0}(0, p) = k_\alpha(p)$$

$$\text{である。} \quad \frac{\partial}{\partial p} X_\alpha = X_{\alpha-1}, \quad \frac{\partial}{\partial p} Y_\alpha = Y_{\alpha-1} \text{ という関係がある。}$$

これらの補助関数の性質については浦部[5]を参照されたい。

得られた結果は次の如し。

定理 $r > 0$ を充分小さくすると、初期値問題(*)に対して、 D_r 上の一般被覆面上で正則な一意的な解が次の形で構成できる。

$$\text{ここで } D_r = \{x \in \Omega, |\varphi_i^2(x)| < r\}.$$

$$u(x) = \sum_{\beta=1}^m \sum_{\alpha=-l-2m+1}^{+\infty} u_{\alpha,\beta}(x) X_{\alpha p}(\theta_\beta(x), p_\beta(x)) + g_{\alpha,\beta}(x) X_{\alpha\theta}(\theta_\beta(x), p_\beta(x)) \\ + v_{\alpha,\beta}(x) Y_{\alpha p}(\theta_\beta(x), p_\beta(x)) + h_{\alpha,\beta}(x) Y_{\alpha\theta}(\theta_\beta(x), p_\beta(x))$$

ここで l は初期値の極の最大位数、 $u_{\alpha,\beta}(x), g_{\alpha,\beta}(x), v_{\alpha,\beta}(x), h_{\alpha,\beta}(x), \theta_\beta(x), p_\beta(x)$ は D_r で正則な関数。 |

定理の証明は上記の形式解が収束する事にある。まず、この $u_{\alpha,\beta}(x), g_{\alpha,\beta}(x), v_{\alpha,\beta}(x), h_{\alpha,\beta}(x), \theta_\beta(x), p_\beta(x)$ がどのように決定されていくかをみて、次にこれらの係数を優級数の方法で評価し、収束性を示す。なお、この形の解は D. Ludwig [3] により開発された。これらの係数の決定されていく過程をみる前に準備として、計算から始める。

§2

$L(x, D)$ を形式解に作用させる。そのためには $L(x, D)[u(x)][\psi(\theta_\alpha, p_\alpha)]$ の計算をすればよい。ここで $u(x)$ は $u_{\alpha,\beta}, g_{\alpha,\beta}, v_{\alpha,\beta}, h_{\alpha,\beta}$ のどれかで、 ψ は $X_{\alpha p}, X_{\alpha\theta}, Y_{\alpha p}, Y_{\alpha\theta}$ のどれかで、 α, β は適当な整数である。まず、 $\partial_p^k \partial_\theta^l X_\alpha, (\partial_p^k \partial_\theta^l Y_\alpha)$ と $\partial_p^k X_\alpha, \partial_p^{k+1} \partial_\theta X_\alpha (k \leq i+j), (\partial_p^k Y_\alpha, \partial_p^{k+1} \partial_\theta Y_\alpha (k \leq i+j))$ の線型結合で表わす事が必要である。次の公式が得られる。

(公式1) $U(\theta, p)$ を Tricomi 方程式 $(\partial_\theta^2 - \partial_p^2)U = 0$ を満たすものとする。

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\theta^{2r} U = \theta^r \partial_p^{2r} U + r(r-1) \theta^{r-2} \partial_p^{2r-2} \partial_\theta U + \dots \\ \partial_\theta^{2r+1} U = \theta^r \partial_p^{2r} \partial_\theta U + r^2 \theta^{r-1} \partial_p^{2r} U + \dots \end{array} \right\} \text{が成立つ。}$$

次に、次の記号を導入する。

$k(\alpha, \beta)$ を β に関する l 次齊次多項式とする。

$$* \quad k^{(1)}(\alpha, \beta) \equiv (D_\beta)^\alpha k(\alpha, \beta), \quad k_{(i)}(\alpha, \beta) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} k(\alpha, \beta), \quad k_{(i)}^{(1)}(\alpha, \beta) \equiv \frac{\partial}{\partial \beta_i} k(\alpha, \beta) \text{ etc.}$$

$$* \quad k_i(\alpha, \beta, \eta) \text{ を次で定める。}$$

$$k(\alpha, r\beta + s\eta) = \sum_{i=0}^l k_i(\alpha, r\beta, s\eta) = \sum_{i=0}^l r^i s^{l-i} k_i(\alpha, \beta, \eta)$$

$$\text{ここで, } \eta = (\eta_0, \dots, \eta_n), \quad r, s \in \mathbb{C}^1.$$

$$* \quad \partial_i \equiv \theta_{x_i} \partial_\theta + p_{x_i} \partial_p \quad (i=0, \dots, n) \quad \partial = (\partial_0, \dots, \partial_n)$$

$$D_i \partial_j \equiv \theta_{x_i} x_j \partial_\theta + p_{x_i} x_j \partial_p \quad \text{と定める。}$$

chain rule より、

$$D^\alpha U(\theta(x), p(x)) = \partial^\alpha U + \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^n (\partial^\alpha)^{(i,j)} (D_i \partial_j) U + \dots$$

$$\text{Leibniz の公式 } k(\alpha, D)(u(x)v(x)) = \sum_{|\alpha'| \leq \alpha} \frac{1}{\alpha'} D^{\alpha'} u \cdot k^{(1)}(\alpha, D)v \text{ と備わって}$$

$$\begin{aligned} \text{(公式2)} \quad k(\alpha, D)(u(x)U(\theta(x), p(x))) &= u(x) \cdot k(\alpha, \partial)U + u(x) \cdot \frac{1}{2} k^{(1)}(\alpha, \partial)(D_i \partial_j)U \\ &\quad + D_i u \cdot k^i(\alpha, \partial)U + \dots \Big|_{\theta=\theta(x), p=p(x)}. \end{aligned}$$

(ここで i, j は共に 0 から n までの数であるが、 Σ を省略する。又以後 $\theta=\theta(x), p=p(x)$ も省略する。)

$k(\alpha, \partial)U$ を計算しなければならぬ。 k_i の定義より

$$\text{(公式3)} \quad k(\alpha, \partial) = k(\alpha, \theta_x \partial_\theta + p_x \partial_p) = \sum_{i=0}^l k_i(\alpha, \theta_x, p_x) \partial_\theta^i \partial_p^{l-i}$$

(公式1) と (公式3) より次が得られる。

(公式4) $U(\theta, p)$ は Tricomi 方程式 $(\partial_\theta^2 - \partial_p^2)U = 0$ を満たすとする。

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad K(x, z) U_p(\theta(x), p(x)) &= \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} k_{2i}(x, \theta_x, p_x) \theta^{i-1} \right] \partial_p^{2+1} U \\ &+ \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} k_{2i+1}(x, \theta_x, p_x) \theta^i \right] \partial_p^2 \partial_\theta U + \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} i(i-1) k_{2i}(x, \theta_x, p_x) \theta^{i-2} \right] \partial_p^{2+1} \partial_\theta U \\ &+ \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} i^2 k_{2i+1}(x, \theta_x, p_x) \theta^{i-1} \right] \partial_p^2 U + \dots \\ &\equiv {}^1K(x, \theta_x, p_x) \partial_p^{2+1} U + {}^2K(x, \theta_x, p_x) \partial_p^2 \partial_\theta U + {}^4K(x, \theta_x, p_x) \partial_p^{2+1} \partial_\theta U + {}^3K(x, \theta_x, p_x) \partial_p^2 U + \dots \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad k(x, z) U_{\theta p}(\theta(x), p(x)) &= \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} k_{2i+1}(x, \theta_x, p_x) \theta^{i+1} \right] \partial_p^{2+1} U \\ &+ \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} k_{2i}(x, \theta_x, p_x) \theta^i \right] \partial_p^2 \partial_\theta U + \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} k_{2i}(x, \theta_x, p_x) i^2 \theta^{i-1} \right] \partial_p^2 U \\ &+ \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} k_{2i+1}(x, \theta_x, p_x) i(i+1) \theta^{i+1} \right] \partial_p^{2+1} \partial_\theta U + \dots \\ &\equiv {}^1K'(x, \theta_x, p_x) \partial_p^{2+1} U + {}^2K'(x, \theta_x, p_x) \partial_p^2 \partial_\theta U + {}^3K'(x, \theta_x, p_x) \partial_p^2 U + {}^4K'(x, \theta_x, p_x) \partial_p^{2+1} \partial_\theta U + \dots \text{etc.} \end{aligned}$$

又、同様にして次を得る。

$$\text{(公式5)} \quad \text{(i)} \quad K(x, z) \partial_\theta^2 U = {}^1K'(x, \theta_x, p_x) \partial_p^{2+1} \partial_\theta U + \partial_\theta ({}^2K') \partial_p^{2+1} U + \dots$$

$$\text{(ii)} \quad K(x, z) \partial_\theta \partial_p U = {}^1K'(x, \theta_x, p_x) \partial_p^{2+2} U + {}^2K' \partial_p^{2+1} \partial_\theta U + \dots$$

$$\text{(iii)} \quad K(x, z) \partial_p^2 U = {}^1K(x, \theta_x, p_x) \partial_p^{2+2} U + {}^2K(x, \theta_x, p_x) \partial_p^{2+1} \partial_\theta U + \dots$$

各 ${}^kK, {}^kK'$ の定義より次が成立つ。

$$\text{(i)} \quad {}^1K(x, \theta_x, p_x) = K(x, p_x) + \partial_\theta (\widetilde{K}(x, \theta_x, p_x))$$

$$\text{(ii)} \quad {}^2K(x, \theta_x, p_x) = K^{(1)}(x, p_x) \theta_{x_i} + \partial_\theta (\widetilde{K}(x, \theta_x, p_x))$$

$$\text{(iii)} \quad {}^1K'(x, \theta_x, p_x) = {}^2K(x, \theta_x, p_x) \theta$$

$$\text{(iv)} \quad {}^2K'(x, \theta_x, p_x) = {}^1K(x, \theta_x, p_x)$$

$$\text{(v)} \quad {}^3K'(x, \theta_x, p_x) = \frac{1}{2} K^{(1,j)}(x, p_x) \theta_{x_i} \theta_{x_j} + \partial_\theta (\widetilde{K}(x, \theta_x, p_x))$$

$$\text{ここで } K_0(x, \bar{z}, \eta) = K(x, \eta), \quad K_1(x, \bar{z}, \eta) = K^{(1)}(x, \eta) \bar{z}_j, \quad K_2(x, \bar{z}, \eta) = \frac{1}{2} K^{(1,j)}(x, \eta) \bar{z}_i \bar{z}_j$$

を用いる。

次に, $K(x, \partial)$ の形の 2 つの operator の積公式をみる.

(公式 6) $M(x, \partial), N(x, \partial)$ を与え, m 次, n 次の ∂ -微分作用素とする.

$$\begin{aligned} (i) \quad M(x, \partial) \cdot N(x, \partial) \partial^m U &= ({}^1M \cdot {}^1N + {}^1M' \cdot {}^2N) \partial_p^{m+n+1} U + ({}^2M \cdot {}^1N + {}^2M' \cdot {}^2N) \partial_p^{m+n} \partial_\theta U \\ &+ ({}^3M \cdot {}^1N + {}^3M' \cdot {}^2N + {}^1M \cdot {}^3N + {}^1M' \cdot {}^4N) \partial_p^{m+n} U \\ &+ ({}^4M \cdot {}^1N + {}^4M' \cdot {}^2N + {}^2M \cdot {}^3N + {}^2M' \cdot {}^4N) \partial_p^{m+n-1} \partial_\theta U + \dots \end{aligned}$$

(ii) $M(x, \partial) N(x, \partial) \partial_\theta U$ は上式で ${}^1N \in {}^1N', {}^2N \in {}^2N'$ で置きかえたもの.

ここで, ${}^kM = {}^kM(x, \theta_x, p_x), {}^kN = {}^kN(x, \theta_x, p_x)$ etc. ($k=1, 2, 3, 4$) とある.

以上の公式を使って $L(x, D)(u(x)U_p + g(x)U_\theta(\theta(x), f(x)))$ を計算すると.

$$\begin{aligned} L(x, D)(u(x)U_p + g(x)U_\theta) &= u \cdot \dot{L}(x, \partial)U_p + g \cdot \dot{L}(x, \partial)U_\theta + \\ &+ u \{ P^{(1)}(x, \partial)P^{(2)}(x, \partial) + P(x, \partial)P^{(1)}(x, \partial) - \frac{x_0}{2}Q^{(1)}(x, \partial) \} (D_x \partial_j)U_p + \\ &+ g \{ P^{(1)}(x, \partial)P^{(2)}(x, \partial) + P(x, \partial)P^{(1)}(x, \partial) - \frac{x_0}{2}Q^{(1)}(x, \partial) \} (D_x \partial_j)U_\theta + \\ &+ D_x u \cdot \{ 2P(x, \partial)P^{(1)}(x, \partial) - x_0Q^{(1)}(x, \partial) \} U_p + D_x g \{ 2P(x, \partial)P^{(1)}(x, \partial) - x_0Q^{(1)}(x, \partial) \} U_\theta \\ &+ u \cdot \dot{R}(x, \partial)U_p + g \cdot \dot{R}(x, \partial)U_\theta + \dots \end{aligned}$$

$$\text{但し, } \dot{R}(x, \partial) = R_{2m-1}(x, \partial) + R^{(1)}(x, \partial)P_{11}(x, \partial)$$

$$\begin{aligned} \text{(公式 7)} \quad L(x, D)(u(x)U_p + g(x)U_\theta) &= ({}^1\dot{L} \cdot u + \theta \cdot {}^2\dot{L} \cdot g) \partial_p^{2m+1} U + ({}^2\dot{L} \cdot u + {}^1\dot{L} \cdot g) \partial_p^{2m} \partial_\theta U \\ &+ [\theta \dot{L} g + \mathcal{M}u + (\theta(P_{x_i x_j} + \partial_{ij}^1 + \theta_{x_i x_j} \partial_{ij}^2 + {}^2\dot{R}) + {}^3\dot{L}) g \\ &\quad + (P_{x_i x_j} \partial_{ij}^2 + \theta \partial_{x_i x_j} \partial_{ij}^1 + {}^4\dot{L}' + {}^1\dot{R}) u] \partial_p^{2m} U \\ &+ [\dot{L}u + \mathcal{M}g + (P_{x_i x_j} \partial_{ij}^1 + \theta_{x_i x_j} \partial_{ij}^2 + {}^4\dot{L} + {}^2\dot{R}) u \\ &\quad + (P_{x_i x_j} \partial_{ij}^2 + \theta \partial_{x_i x_j} \partial_{ij}^1 + {}^4\dot{L}' + {}^1\dot{R}) g] \partial_p^{2m-1} \partial_\theta U + \dots \end{aligned}$$

$$\text{但し, } \mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \theta_x, p_x, D) = \{ 2({}^1P(x, \theta_x, p_x) \cdot {}^2P^{(1)}(x, \theta_x, p_x) + {}^2P(x, \theta_x, p_x) \cdot {}^1P^{(1)}(x, \theta_x, p_x) - x_0 \dot{Q}^{(1)}(x, \theta_x, p_x) \} D_x$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(x, \theta_x, p_x, D) = \{ 2(P_{\alpha, \theta_x, p_x}) \cdot P^{(1)}_{\alpha, \theta_x, p_x} + \theta \cdot P^{(1)}_{\alpha, \theta_x, p_x} \cdot P_{\alpha, \theta_x, p_x} - x_0 Q^{(1)}_{\alpha, \theta_x, p_x} \} D_{\alpha}$$

$$\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^1 = \{ P^{(1)}_{\alpha, \theta_x, p_x} \cdot P^{(1)}_{\beta, \theta_x, p_x} + P^{(1)}_{\beta, \theta_x, p_x} \cdot P^{(1)}_{\alpha, \theta_x, p_x} + P_{\alpha, \theta_x, p_x} \cdot P^{(1)}_{\beta, \theta_x, p_x} + P_{\beta, \theta_x, p_x} \cdot P^{(1)}_{\alpha, \theta_x, p_x} - \frac{1}{2} x_0 Q^{(1)}_{\alpha\beta, \theta_x, p_x} \}$$

$$\mathcal{Q}_{\alpha\beta}^2 = \{ P^{(1)}_{\alpha, \theta_x, p_x} \cdot P^{(1)}_{\beta, \theta_x, p_x} + P_{\alpha, \theta_x, p_x} \cdot P^{(1)}_{\beta, \theta_x, p_x} + \theta (P^{(1)}_{\alpha, \theta_x, p_x} \cdot P_{\beta, \theta_x, p_x} + P_{\alpha, \theta_x, p_x} \cdot P^{(1)}_{\beta, \theta_x, p_x}) - \frac{1}{2} x_0 Q^{(1)}_{\alpha\beta, \theta_x, p_x} \} (x, \theta_x, p_x)$$

形式解の収束性を証明するためには上の公式の...の部分

分をもう少し詳しくする必要がある。次の公式が必要となる。

$$\begin{aligned} \text{(公式8)} \quad L(x, D) u \Big|_p &= \sum_{|\alpha| \leq 2m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u \cdot L^{(\alpha)}(x, D) \Big|_p \\ &= \sum_{|\alpha| \leq 2m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u \{ L^{(0)}(x, D) + \dots \} \Big|_p \\ &= \sum_{|\alpha| \leq 2m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u \left\{ \sum_{|\mu| \leq 2m-|\alpha|} L^{(0)}_{\mu} \partial_p^\mu \Big|_p + \sum_{|\mu| \leq 2m-|\alpha|-1} 2 L^{(0)}_{\mu} \partial_p^\mu \partial_\theta \Big|_p + \dots \right\} \\ &= \sum_{\nu=0}^{2m} \left(\sum_{|\alpha| \leq 2m-\nu} L^{(0)}_{\alpha} \frac{D^\alpha u}{\alpha!} + \dots \right) \partial_p^\nu \Big|_p + \sum_{\nu=0}^{2m-1} \left(\sum_{|\alpha| \leq 2m-1-\nu} 2 L^{(0)}_{\alpha} \frac{D^\alpha u}{\alpha!} + \dots \right) \partial_p^\nu \partial_\theta \Big|_p \\ \text{(i)} \quad &= \sum_{\nu=0}^{2m} {}^1 L_\nu[u] \partial_p^\nu \Big|_p + \sum_{\nu=0}^{2m-1} {}^2 L_\nu[u] \partial_p^\nu \partial_\theta \Big|_p \\ \text{(ii)} \quad L(x, D) g \Big|_\theta &= \sum_{\nu=1}^{2m} \left(\sum_{|\alpha| \leq 2m-\nu} {}^3 L^{(0)}_{\alpha} \frac{D^\alpha g}{\alpha!} + \dots \right) \partial_p^\nu \Big|_\theta + \sum_{\nu=0}^{2m} \left(\sum_{|\alpha| \leq 2m-\nu} {}^4 L^{(0)}_{\alpha} \frac{D^\alpha g}{\alpha!} + \dots \right) \partial_p^\nu \partial_\theta \Big|_\theta \\ &= \sum_{\nu=1}^{2m} {}^3 L_\nu[g] \partial_p^\nu \Big|_\theta + \sum_{\nu=0}^{2m} {}^4 L_\nu[g] \partial_p^\nu \partial_\theta \Big|_\theta \end{aligned}$$

$$\therefore \tau, \quad {}^k L_\nu = {}^k L_\nu(x, \theta, p, D) \in L^{2m-\nu}(\Omega) \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

${}^k L_\nu$ の principal part $\in {}^k L^{(0)}_\nu$ を表す。次の通りである。

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^1 L^{(0)}_\nu \equiv \sum_{|\alpha|=2m-\nu} {}^1 L^{(0)}_{\alpha}(x, \theta_x, p_x) \frac{D^\alpha}{\alpha!} \quad (\text{mod } \theta) \\ {}^2 L^{(0)}_\nu \equiv \sum_{|\alpha|=2m-\nu} {}^2 L^{(0)}_{\alpha}(x, \theta_x, p_x) \frac{D^\alpha}{\alpha!} \quad (\text{mod } \theta) \\ {}^3 L^{(0)}_\nu \equiv \theta \sum_{|\alpha|=2m-\nu} {}^2 L^{(0)}_{\alpha}(x, \theta_x, p_x) \frac{D^\alpha}{\alpha!} \quad (\text{mod } \theta^2) \\ {}^4 L^{(0)}_\nu \equiv \sum_{|\alpha|=2m-\nu} {}^1 L^{(0)}_{\alpha}(x, \theta_x, p_x) \frac{D^\alpha}{\alpha!} \quad (\text{mod } \theta) \end{array} \right.$$

公式7, 8より 次の等式が得られる。

$$(公式9) \begin{cases} {}^1L_{2m}(x, \theta, p, D) \equiv {}^1\tilde{L}(x, \theta_x, p_x) \\ {}^2L_{2m}(x, \theta, p, D) \equiv {}^2\tilde{L}(x, \theta_x, p_x) \\ {}^3L_{2m}(x, \theta, p, D) \equiv \theta \cdot {}^2\tilde{L}(x, \theta_x, p_x) \\ {}^4L_{2m}(x, \theta, p, D) \equiv {}^1\tilde{L}(x, \theta_x, p_x) \end{cases}$$

$$(公式10) \begin{cases} {}^1L_{2m-1}(x, \theta, p, D) = \mathcal{M} + (p_{x_i} x_j \cdot \theta_{ij}^2 + \theta \theta_{x_i} x_j \cdot \theta_{ij}^1 + {}^3\tilde{L} + {}^1\tilde{R}) \\ {}^2L_{2m-1}(x, \theta, p, D) = \tilde{\mathcal{L}} + (p_{x_i} x_j \cdot \theta_{ij}^1 + \theta_{x_i} x_j \cdot \theta_{ij}^2 + {}^4\tilde{L} + {}^2\tilde{R}) \\ {}^3L_{2m-1}(x, \theta, p, D) = \theta \tilde{\mathcal{L}} + (\theta p_{x_i} x_j \cdot \theta_{ij}^1 + \theta \theta_{x_i} x_j \cdot \theta_{ij}^2 + \theta \cdot {}^2\tilde{R} + {}^3\tilde{L}') \\ {}^4L_{2m-1}(x, \theta, p, D) = \mathcal{M} + (p_{x_i} x_j \cdot \theta_{ij}^2 + \theta \theta_{x_i} x_j \cdot \theta_{ij}^1 + {}^4\tilde{L}' + {}^2\tilde{R}) \end{cases}$$

§ 3

§ 2 で得られた公式を使って、係数 $u_{\alpha, \beta}, g_{\alpha, \beta}, v_{\alpha, \beta}, h_{\alpha, \beta}$ をどのように決定されていくかを見る。まず重ね合わせの原理から初期値問題として、次の形の初期値問題と考えれば充分である。

$$\begin{cases} L(x, D) u(x) = 0 \\ D_0^k u(0, x') = w_k(x'') \cdot k_{-k}(x_1) \quad (k=0, \dots, 2m-1) \quad x''=(x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

($w_k(x'')$ は x''_0 の $\mathbb{C}^{n-1}$ の近傍に整型な関数)

$$u(x) = \sum_{\beta=1}^m \sum_{\alpha=-\ell+1-2m}^{+\infty} u_{\alpha, \beta}(x) X_{\alpha p}(\theta_{\beta}(x), p_{\beta}(x)) + g_{\alpha, \beta}(x) X_{\alpha \theta}(\theta_{\beta}(x), p_{\beta}(x)) \\ + v_{\alpha, \beta}(x) Y_{\alpha p}(\theta_{\beta}(x), p_{\beta}(x)) + h_{\alpha, \beta}(x) Y_{\alpha \theta}(\theta_{\beta}(x), p_{\beta}(x))$$

($L(x, D)$ を作用させる。§ 2 の公式より次を得る。

$$Lu = \sum_{\beta=1}^m \sum_{\alpha} \left\{ \sum_{\nu=0}^{2m} {}^1L_{\nu, \beta} u_{\alpha+\nu, \beta} + {}^3L_{\nu, \beta} g_{\alpha+\nu, \beta} \right\} X_{\alpha p}(\theta_{\beta}(x), p_{\beta}(x)) \\ + \left\{ \sum_{\nu=0}^{2m} {}^4L_{\nu, \beta} g_{\alpha+\nu, \beta} + {}^3L_{\nu, \beta} u_{\alpha+\nu, \beta} \right\} X_{\alpha \theta}(\theta_{\beta}(x), p_{\beta}(x))$$

$$+ \left\{ \sum_{v=0}^{2m} {}^1L_{v,\beta} v_{\alpha+v,\beta} + {}^3L_{v,\beta} h_{\alpha+v,\beta} \right\} Y_{\alpha\beta}(\theta_\beta(x), p_\beta(x))$$

$$+ \left\{ \sum_{v=0}^{2m} {}^4L_{v,\beta} h_{\alpha+v,\beta} + {}^2L_{v,\beta} v_{\alpha+v,\beta} \right\} Y_{\alpha\theta}(\theta_\beta(x), p_\beta(x)) = 0$$

$$\therefore {}^kL_{v,\beta} = {}^kL_v(x, \theta_\beta, p_\beta, D) \in L^{2m-v}(\Omega_\beta) \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

$$\text{特に } {}^3L_{0,\beta} \equiv {}^2L_{0,\beta} \equiv 0.$$

上で $X_{\alpha\beta}, X_{\alpha\theta}, Y_{\alpha\beta}, Y_{\alpha\theta}$ の係数 = 0 とおく事により次を得る。

$$\begin{cases} \sum_{v=0}^{2m} {}^1L_{v,\beta} u_{\alpha+v,\beta} + {}^3L_{v,\beta} g_{\alpha+v,\beta} = 0 \\ \sum_{v=0}^{2m} {}^4L_{v,\beta} g_{\alpha+v,\beta} + {}^2L_{v,\beta} u_{\alpha+v,\beta} = 0 \\ \sum_{v=0}^{2m} {}^1L_{v,\beta} v_{\alpha+v,\beta} + {}^3L_{v,\beta} h_{\alpha+v,\beta} = 0 \\ \sum_{v=0}^{2m} {}^4L_{v,\beta} h_{\alpha+v,\beta} + {}^2L_{v,\beta} v_{\alpha+v,\beta} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore {}^1L_{2m,\beta} = {}^2L_{2m,\beta} = {}^3L_{2m,\beta} = {}^4L_{2m,\beta} = 0 \quad (\beta=1, \dots, m)$$

と置く。これらの θ_β と p_β に関する一階の非線型方程式系より

θ_β と p_β を決定する。(次の§で述べる。) このまうに置く事より

上の系は次のようになる。

$$(T.E.) \begin{cases} \begin{cases} {}^2L_{2m-1,\beta} u_{\alpha+2m-1,\beta} = -\sum_{v=0}^{2m-1} {}^4L_{v,\beta} g_{\alpha+v,\beta} - \sum_{v=0}^{2m-2} {}^2L_{v,\beta} u_{\alpha+v,\beta} \\ {}^3L_{2m-1,\beta} g_{\alpha+2m-1,\beta} = -\sum_{v=0}^{2m-1} {}^1L_{v,\beta} u_{\alpha+v,\beta} - \sum_{v=0}^{2m-2} {}^3L_{v,\beta} g_{\alpha+v,\beta} \end{cases} \\ \begin{cases} {}^2L_{2m-1,\beta} v_{\alpha+2m-1,\beta} = -\sum_{v=0}^{2m-1} {}^4L_{v,\beta} h_{\alpha+v,\beta} - \sum_{v=0}^{2m-2} {}^2L_{v,\beta} v_{\alpha+v,\beta} \\ {}^3L_{2m-1,\beta} h_{\alpha+2m-1,\beta} = -\sum_{v=0}^{2m-1} {}^1L_{v,\beta} v_{\alpha+v,\beta} - \sum_{v=0}^{2m-2} {}^3L_{v,\beta} h_{\alpha+v,\beta} \end{cases} \end{cases}$$

これがいわゆる transport equations. ここでこれをといて順次

$u_{\alpha,\beta}, g_{\alpha,\beta}, v_{\alpha,\beta}, h_{\alpha,\beta}$ を決定していきこうと云う訳である。

一方、初期値の方から次の式を $D_0^k u(x)|_{x_0=0}$ を計算する事に

よって得る。

$$\begin{aligned}
& \sum_{\beta=1}^m (p_{\beta, x_0}(0, x'))^k (u_{\alpha+1, \beta} + h_{\alpha, \beta}) + h(p_{\beta, x_0}(0, x'))^{k-1} \sigma(0, x') v_{\alpha, \beta} \\
& + \sum_{\beta=1}^m \left(\sum_{k=0}^{k-1} M_{k, \beta}^k (u_{\alpha+k+1-k, \beta} + h_{\alpha+k-k, \beta}) + M_{k, \beta}'^k g_{\alpha+k+1-k, \beta} \right. \\
& \quad \left. + N_{k, \beta}^k v_{\alpha+k-k, \beta} + M_{k, \beta}''^k u_{\alpha+k+1-k, \beta} + N_{k, \beta}'^k h_{\alpha+k-k, \beta} \right) \Big|_{x_0=0} \\
& = \begin{cases} \bar{w}_k(x') & \text{for } \alpha = -k + 2m + k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (k=0, \dots, 2m-1)
\end{aligned}$$

2.2) $M_{k, \beta}^k, N_{k, \beta}^k$ は $(k-k)$ 階の D_0 に属する常微分作用素
 $M_{k, \beta}'^k, N_{k, \beta}'^k, M_{k, \beta}''^k$ は $(k-k-1)$ 階の D_0 に属する常微分作用素。

これらの常微分作用素はもろく $L(x, D)$ の係数と O_{β}, p_{β} のみにより定まり、

係数は x' の正則関数であり、又線型である。

$$\text{一方} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \gamma_1 & 1 & \dots & \gamma_m & 1 \\ \gamma_1^2 & 2\gamma_1 & \dots & \gamma_m^2 & 2\gamma_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma_1^{2m-1} & (2m-1)\gamma_1^{2m-2} & \dots & \gamma_m^{2m-1} & (2m-1)\gamma_m^{2m-2} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \gamma_k = p_{k, x_0}(0, x')$$

であるから、上の式を $(u_{\alpha+1, \beta} + h_{\alpha, \beta})(0, x')$ と $v_{\alpha, \beta}(0, x')$ についての
 $2m$ 個の連立方程式と見て解く事ができて、次の表現を得る。

$$\begin{aligned}
& u_{\alpha+2m-1, \beta}(0, x') + h_{\alpha+2m-2, \beta}(0, x') \\
& = \sum_{\mu=1}^{2m-1} \sum_{\gamma=1}^m d_{\mu, \gamma}^1(x') H_{\mu, \gamma}^1(x', D_0) (u_{\alpha+2m-1-\mu, \gamma} + h_{\alpha+2m-2-\mu, \gamma})(0, x') \\
& \quad + d_{\mu, \gamma}^2(x') H_{\mu-1, \gamma}^2(x', D_0) g_{\alpha+2m-1-\mu, \gamma}(0, x') \\
& \quad + d_{\mu, \gamma}^3(x') H_{\mu, \gamma}^3(x', D_0) v_{\alpha+2m-2-\mu, \gamma}(0, x') \\
& \quad + d_{\mu, \gamma}^4(x') H_{\mu, \gamma}^4(x', D_0) h_{\alpha+2m-2-\mu, \gamma}(0, x') \\
& \quad + d_{\mu, \gamma}^5(x') H_{\mu, \gamma}^5(x', D_0) u_{\alpha+2m-1-\mu, \gamma}(0, x')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{\alpha+2m-1,\beta}(0,x') &= \sum_{\mu=1}^{2m-1} \sum_{\delta=1}^m e_{\mu,\delta}^1(x') H_{\mu,\delta}^1(x', D_0) (u_{\alpha+2m-1-\mu,\delta} + h_{\alpha+2m-2-\mu,\delta})(0,x') \\
&+ e_{\mu,\delta}^2(x') H_{\mu,\delta}^2(x', D_0) g_{\alpha+2m-1-\mu,\delta}(0,x') \\
&+ e_{\mu,\delta}^3(x') H_{\mu,\delta}^3(x', D_0) v_{\alpha+2m-2-\mu,\delta}(0,x') \\
&+ e_{\mu,\delta}^4(x') H_{\mu,\delta}^4(x', D_0) h_{\alpha+2m-2-\mu,\delta}(0,x') \\
&+ e_{\mu,\delta}^5(x') H_{\mu,\delta}^5(x', D_0) u_{\alpha+2m-2-\mu,\delta}(0,x')
\end{aligned}$$

ここで $d_{\mu,\delta}, e_{\mu,\delta}^h$ は $0 \in \mathbb{C}_x^n$ の近傍で正則な関数、 $H_{\mu,\delta}^h(x', D_0)$ は ν 階の常微分作用素で、係数は $0 \in \mathbb{C}_x^n$ の近傍で正則である。

以上で得られた (T.E) をこの初期値のもとに解いていこう
 と言う訳であるが、次の事に注意する。(T.E) は全く次の型と
 同じ型をしている。

$$\begin{cases}
\{(\alpha_0 D_0 + 1) + (\alpha_0^2 \alpha_i(x) D_i + \alpha_0 \gamma_i(x))\} g + (\alpha_0 \beta_i(x) D_i + \delta_i(x)) u = \delta(x) \\
\{2 D_0 + \alpha_0 \alpha_i(x) D_i + \gamma_i(x)\} u + (\alpha_0 \beta_i(x) D_i + \delta_i(x)) = T(x) \\
u(0, x') = u_0(x')
\end{cases}$$

(ここで $\alpha_i(x), \beta_i(x), \delta_i(x), \gamma_i(x), \delta(x), T(x)$ は $0 \in \mathbb{C}_x^n$ の近傍で正則な関数、
 $u_0(x')$ は $0 \in \mathbb{C}_x^n$ の近傍で正則な関数。)

この初期値問題には正則な一意の解 $u(x), g(x)$ が局所的に
 存在する。この事実を使って係数を決定していく、詳しくい
 うと、 $u_{\delta,\beta}, g_{\delta,\beta}, v_{\delta,\beta}, h_{\delta,\beta}$ ($\delta \leq \alpha+2m-2, \beta=1, \dots, m$) が全て決定され
 る。そうすると (T.E) の右辺は既知であり、初期値とあわ
 せて、 $u_{\alpha+2m-1,\beta}, g_{\alpha+2m-1,\beta}$ が求まる。この $u_{\alpha+2m-1,\beta}, g_{\alpha+2m-1,\beta}$ から

$v_{2+2m-1}(0, x')$ が求まる。 (T.E) とあわせて, $v_{2+2m-1, \beta}, h_{2+2m-1, \beta}$ が求まる。

このようにして順次係数が決定されていく。

§4.

$${}^1L_{2m, \beta} = {}^2L_{2m, \beta} = {}^3L_{2m, \beta} = {}^4L_{2m, \beta} = 0 \text{ である。}$$

$$\begin{cases} {}^1\dot{L}(x, \theta_{\beta x}, p_{\beta x}) = \sum_{\nu=0}^m \dot{L}_{2\nu}(x, \theta_{\beta x}, p_{\beta x}) \theta^{\nu} = 0 \\ {}^2\dot{L}(x, \theta_{\beta x}, p_{\beta x}) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \dot{L}_{2\nu+1}(x, \theta_{\beta x}, p_{\beta x}) \theta^{\nu} = 0 \end{cases}$$

と同値である。ここで $\theta = \pm \sqrt{\epsilon}$ を採い、 $\dot{L}_h(x, r_3, \eta) = \dot{L}_h(x, 3, \eta) r^h$
 $(h=0, \dots, 2m)$ に注意して、 θ - 式と如えろ。そして $\dot{L}(x, 3, \eta) = \sum_{\nu=0}^{2m} \dot{L}_{\nu}(x, 3, \eta)$
 と $\frac{2}{3}(\theta_{\beta}^{\frac{3}{2}})_x = \sqrt{\epsilon_{\beta}} \theta_{\beta x}$ を使うと、普通の eikonal equation

$$\dot{L}(x, (p_{\beta} \pm \frac{2}{3} \theta_{\beta}^{\frac{3}{2}})_x) = 0$$

が得られる。 $\varphi_{\beta}^{\pm} = p_{\beta} \pm \frac{2}{3} \theta_{\beta}^{\frac{3}{2}}$ と置く。 $\dot{L}(x, \varphi_{\beta}^{\pm}) = 0$ である。

$$\begin{cases} \dot{L}(x, \varphi_{\beta}^{\pm}) = 0 \\ \varphi_{\beta}^{\pm}(0, x') = x_1 \end{cases}$$

を解いて、 $\varphi_{\beta}^{\pm}$ と $\theta_{\beta}, p_{\beta}$ が求まる。今 $x_0 = t^2$ と置く。

$$0 = \dot{L}(x, \varphi_{\beta x}) = L(t^2, x', \frac{1}{2t} \varphi_{\beta t}^{\pm}, \varphi_{\beta x'}^{\pm}) = [P(t^2, x', \frac{1}{2t} \varphi_{\beta t}^{\pm}, \varphi_{\beta x'}^{\pm})]^2 - t^2 Q(t^2, x', \varphi_{\beta x'}^{\pm})$$

$$\therefore \begin{cases} P(t^2, x', \frac{1}{2t} \varphi_{\beta t}^{\pm}, \varphi_{\beta x'}^{\pm}) = \pm t \sqrt{Q(t^2, x', \varphi_{\beta x'}^{\pm})} \\ \varphi_{\beta}^{\pm}(t, x')|_{t=0} = x_1 \end{cases}$$

と書く。仮定 Aii, Bi より陰関数定理より $\frac{1}{2t} \varphi_{\beta t}$ について解

け、Cauchy-Kowalewsky の定理より φ_{β} が求まる。又 $t \rightarrow -t$ の変数
 変換をする事により $\varphi_{\beta}^{+}(-t, x') = \varphi_{\beta}^{-}(t, x')$ 等がわかる。 $\theta_{\beta}(t, x')$
 $p_{\beta}(t, x')$ は各 t の偶関数である事がわかる。だから $\theta_{\beta}(x), p_{\beta}(x)$ と

書け. $\varphi_\beta^*(x)$ と書ける. 又, かんたん計算より, $\varphi_{\beta+t+t}^*(0, x') = \pm 2\sqrt{Q(0; 1, 0, \dots, 0)} \prod_{\mu \neq \beta} (\lambda_\mu - \lambda_\beta) \neq 0$ がわかり $\theta_\beta(x) = x_0 \sigma_\beta(x)$ ($\sigma_\beta(0) \neq 0$) と表現できる事がわかる.

以上のようにして, $\theta_\beta, \rho_\beta, u_{\alpha, \beta}, v_{\alpha, \beta}, g_{\alpha, \beta}, h_{\alpha, \beta}$ が定まる. これら係数が優級数の方法により, 共通の存在領域をもつ. そこで主部を評価ともし従って, 形式解が収束する事が示せるが証明は長くなるので省略する.

参考文献

- [1] Y. Hamada, J. Leray et C. Wazechal : Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristique multiples; problème de Cauchy ramifié, hyperbolicité partielles. J. Math. pure et appl. 55('76) p 297-352
- [2] Y. Hamada and G. Nakamura : On the singularities of the solutions of the Cauchy problem for the operator with non-uniform multiple characteristics. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 1978.
- [3] D. Ludwig : Uniform asymptotic expansions at a caustic. Comm. Pure Appl. Math 19('66) pp 215-250
- [4] G. Nakamura : The Singularities of Solutions of the Cauchy problems for systems whose characteristic roots are non-uniform. Publ. RIMS. Kyoto Univ. 13('77)
- [5] J. Urabe : On the theorem of Hamada for a linear second order equation with variable multiplicities. J. Math. Kyoto Univ. 19('79) pp 153-169