

単体的複体上の完全交叉 Hodge algebra について.

阪大 D1 寺井 直樹

(Naoki Terai)

Hodge 代数は不変式論に現れる様々な環が共通にもつ性質
うまく抽出した概念であり, De Concini - Eisenbud - Procesi
[1]において公理化されている。その後, 日本においても
渡辺敬一氏, 日比孝三氏によって Hodge 代数の中でも特に
重要な ordinal Hodge 代数 (ASL) がかなり詳しく調べら
れている。

[1]においては, square-free Hodge 代数が定義され, また
square-free Hodge 代数に対し, ある単体的複体が一意的に
定まることが示されている。そこで, 本原稿では, square-
free Hodge 代数とそれに対応する単体的体の間の関係に注
目し, その square-free Hodge 代数に対応する単体的複体上の
Hodge 代数と呼ぶことにし, それについて考察する。より具
体的に言えば, [3], [4]などで用いられている手法を適用する
ことによって, square-free Hodge 代数が完全交叉 (以下 C.i.

と略す)となるためには、対応する単体的複体は、どのようなものでなければならぬかということと調べる。

§ 1 Hodge 代数の定義

[1]に従って必要な定義、記号を述べる。 $H = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ と有限集合とし、 k と commutative field とし、 R と commutative k -algebra とし、 $H \hookrightarrow R$ なる injection が与えられているとする。この injection によって $H \subset R$ とみなす。 $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$ ($i_1, \dots, i_n \geq 0$) の形の元を H 上の monomial と言う。(より正確に言うならば、 H から $N \cup \{0\}$ への写像 $H \rightarrow N \cup \{0\}$ ($x_i \mapsto i_i$) のことと H 上の monomial と言う。) $\text{Supp } x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} = \{x_j \mid i_j > 0\}$ と定義し、これを $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$ の support と言う。また H 上の monomial 全体の集合を M で表す。 M の subset Σ が order ideal of monomials であるとは、 Σ が " $M \in \Sigma, N \in M$ ならば、 $M \cdot N \in \Sigma$ " を満たすことである。また monomial M が Σ に関して standard であるとは、 $M \notin \Sigma$ であることとする。 Σ の generator とは自分以外のどんな Σ の元によっても割れない Σ の元のことである。 $\leq$ と H 上の半順序とし、 $\widehat{H} = (H, \leq)$ とする。このとき、次の公理が満たされるならば、 R を Σ によって支配され、 $\widehat{H}$ によって生成される k -Hodge 代数 と言う。

(Hodge-1) R は、 Σ に関する *standard monomial* 全体の集合

M 、 Σ を基底にもつ k -vector space である。

(Hodge-2) $N \in \Sigma$ の *generator* とするとき、

$$(*) \quad N = \sum_i r_i M_i \quad ; \quad 0 \neq r_i \in k$$

という異なる *standard monomial* の *linear combination* による N の表現が存在し、任意の $\alpha \in \text{Supp } N$ 及び任意の M_i に対し、ある $\gamma_i \in \text{Supp } M_i$ が存在して、 $\gamma_i < \alpha$ が成り立つ。

また同じ情況で、 R が少なくとも (Hodge-2) を満たすとき、 R を Σ によつて支配され、 $\tilde{H}$ によつて生成される *quasi k-Hodge 代数* と言う。関係(*)を N に関する *straightening relation* と言う。*straightening relation* の右辺は 0 でもよいが、(Hodge-2) よりどんな M_i も 1 とはなりえない。

もし全ての *straightening relation* の右辺が 0 であるとき、(すなわち、任意の $N \in \Sigma$ に対して、 R において $N = 0$ であるとき)、 R は *discrete* であるという。order ideal Σ of monomials が *square-free* な monomial で生成されているとき Σ 、あるいは Σ によつて支配される Hodge 代数を *square-free* と言う。また、 $\tilde{H}$ における半順序によつて比較不可能な 2 元の積全体で Σ が生成されているとき、 R は *ordinal Hodge 代数* あるいは *algebra with straightening laws (ASL)* と言う。

このとき、 Σ は その support が全順序集合でなっている全ての monomial からなっている。

R を Σ によって支配され、 $\widehat{H}$ によって生成される k -Hodge 代数とする。このとき、ある grading $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ が存在して、 $R_0 = k$ で H の各元が斉次な次数正の元となると、 R を次数つき k -Hodge 代数と言う。特に $H \subset R_1$ となると、 R を斉次次数つき k -Hodge 代数という。

Δ を頂点集合 H 上の単体的複体とする。(すなわち、 Δ は H の subset の集合で、
 (i) 任意の $x \in H$ に対して、 $\{x\} \in \Delta$,
 (ii) $\sigma \in \Delta$, $\tau \subset \sigma$ ならば $\tau \in \Delta$ を満たすものである。)

$\Sigma_\Delta = \{M \in M \mid \text{Supp } M \in \Delta\}$ と定義すると、 Σ_Δ は order ideal of monomials となる。このとき、 H に適当な半順序構造 $\leq$ を与えて、 R が Σ_Δ によって支配され、 $\widehat{H} = (H, \leq)$ によって生成される k -Hodge 代数となると、 R を単体的複体 Δ 上の k -Hodge 代数という。特に、 Δ 上の discrete k -Hodge 代数を Δ の Stanley-Reisner ring と言い、 $k[\Delta]$ と表す。

Example

$$\Delta = \begin{array}{c} \times \quad \times \quad \times \\ \hline x \quad y \quad z \end{array}, \quad R = \frac{k[x, y, z]}{(xz - y^2)} \quad \text{とすると}$$

R は Δ 上の k -Hodge algebra ただし $x, z > y$ とする。

§2. 基本的性質

本節で Hodge 代数についての基本的性質を列挙する。

性質 1.

R を単体的複体 Δ 上の斉次次数つき k -Hodge 代数とする。

このとき、 $P_R(\lambda) = P_{k[\Delta]}(\lambda)$ である。特に $\dim R = \dim k[\Delta]$ である。ただし、 $P_R(\lambda)$ は R の Poincaré 級数で、形式的巾級数 $P_R(\lambda) = \sum_{n \geq 0} (\dim_k R_n) \lambda^n$ と定義する。

性質 2.

Δ を次元 d の単体的複体とし、 Δ の i -単体の個数を f_i で表す。 $(i = -1, 0, \dots, d)$ 。ただし、 $\emptyset \in \Delta$ より $f_{-1} = 1$ とする。

$$\text{このとき、} P_{k[\Delta]}(\lambda) = \frac{f_i \lambda^{i+1}}{(1-\lambda)^{i+1}}$$

である。特に $\dim k[\Delta] = d + 1$ である。

Hodge 代数が何故環論的に興味深いかというと、次の定理が成り立つからである。

定理

R を次数つき k -Hodge 代数とし、 R_0 とそれに対応する discrete Hodge 代数とする。(すなわち、 R における全ての

straightening relation を " $= 0$ " という形にしたものが R_0 である。)

このとき、

R_0 が Cohen-Macaulay $\Rightarrow R$ が Cohen-Macaulay

R_0 が Gorenstein $\Rightarrow R$ が Gorenstein

R_0 が complete intersection $\Rightarrow R$ が complete intersection

が成り立つ。

つまり R_0 と R は k -vector space として同型であるが、さらに、環論的にも、 R_0 から R へ重要な性質を遺伝しているのである。一般に逆は成り立たない。たとえば、[1], [7] 参照。しかし、 R を特に 齊次次数つき ASL に限れば、

R が complete intersection $\Rightarrow R_0$ が complete intersection

が成立する。そこで、 R をもう少し広く、単体的複体上の

Hodge 代数とすれば、同じことが成り立つだろうか？残念な

がら、これは成り立たない。それでは、 R が C. i. であること

と、 $R_0 = k[\Delta]$ が C. i. であることには、どれぐらいの隔りがあるのだろうか。

そのことについて、次の節で述べる。

§ 3. 分類

定理

Δ を次元 d の、頂点集合 H 上の単体的複体とする。ただし、 $\#(H) = n$ とする。このとき次の (i), (ii) は同値である。

(i) $k[\Delta]$ は C- λ 。

(ii) Δ は

$$\Delta = \dot{\Delta}(m_1) * \dot{\Delta}(m_2) * \cdots * \dot{\Delta}(m_g) * \underbrace{\Delta(0) * \cdots * \Delta(0)}_{\ell \text{ 個}}$$

と表せる。ただし、 $g = n - d - 1$, $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_g + g + \ell$

$m_1, m_2, \dots, m_g \geq 1$, $\ell \geq 0$ とする。

さらに Δ が (i), (ii) の条件を満たすとき、 $k[\Delta]$ を自然に次数つき環と見なすと、

$$P_{k[\Delta]}(\lambda) = \frac{\prod_{i=1}^g (1 + \lambda + \cdots + \lambda^{m_i})}{(1 - \lambda)^{d+1}}$$

記号の説明

$\Delta(m) := 2^{\{0,1,\dots,m\}}$ ($\{0,1,2,\dots,m\}$ の全ての subset を単体とするような m 次元の単体的複体)

$$\dot{\Delta}(m) := \Delta(m) \setminus \{\{0,1,\dots,m\}\}$$

Δ_1, Δ_2 をそれぞれ頂点集合 V_1, V_2 上の単体的複体とし、

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$ とする。このとき、頂点集合 $V_1 \cup V_2$ 上の単体的複体 $\Delta_1 * \Delta_2$ を

$$\Delta_1 * \Delta_2 := \{\sigma \cup \tau \mid \sigma \in \Delta_1, \tau \in \Delta_2\}$$

によ、て定義し、これを Δ_1 と Δ_2 の *simplicial join* と言う。

Δ_i を頂点集合 V_i 上の単体的複体とする。ただし、 $i=1, 2, \dots, l$ 。

今、任意の i, j ($i \neq j$) に対して $V_i \cap V_j = \emptyset$ とするとき、

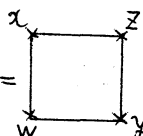
$$\Delta_1 * \Delta_2 * \dots * \Delta_l := ((\dots ((\Delta_1 * \Delta_2) * \Delta_3) * \dots) * \Delta_{l-1}) * \Delta_l$$

によ、て、頂点集合 $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_l$ 上の単体的複体 $\Delta_1 * \Delta_2 * \dots * \Delta_l$ を定義する。

証明 [16] 参照

なお、石田正典氏のご指摘によりまして、この結果のさらに一般化的な場合が、中島晴久氏によって与えられていることがわかりました。この場を借りて、お礼申し上げます。

Example

$$\Delta = \left\{ \begin{smallmatrix} x \\ \cdot \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} y \\ \cdot \end{smallmatrix} \right\} * \left\{ \begin{smallmatrix} z \\ \cdot \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} w \\ \cdot \end{smallmatrix} \right\} =$$


とすると

$$k[\Delta] = \frac{k[x, y, z, w]}{(xy, zw)}$$

さて次に、 Δ 上に斉次次数 $\leq i$ の k -Hodge 代数 R が存在するならば、 Δ がどのようなものになるかということと Hodge

代数の Krull 次元が、1, 2, 3 次元の場合について、それぞれ調べる。まず、そのために必要となる補題を引用しておく。

補題 [11, Corollary 3.4]

形式的中級数 $P(\lambda)$ がある d 次元の C. i. 斉次次数つき環 $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ ($R_0 = k$ は体とする) の Poincaré series であるための必要十分条件は、 $P(\lambda)$ が

$$P(\lambda) = \frac{\prod_{i=1}^r (1 + \lambda + \cdots + \lambda^{g_i})}{(1 - \lambda)^d}$$

(ただし $r \geq 0$, $g_1, \dots, g_r > 0$)

という形をもつことである。

この補題と、先に述べた性質 1, 2 を組合せることにより、次のことがわかる。

定理

Δ を単体的複体とし、 k を体とする。このとき Δ 上に、1 次元斉次次数つき C. i. k -Hodge 代数が存在するならば、次のいずれかの場合である。

i) $\Delta = \Delta(0)$ (1 点) で $R = k[\Delta] = k[x]$

ii) $\Delta = \Delta(1)$ (2 点) で $R = k[\Delta] = \frac{k[x, y]}{(xy)}$

定理

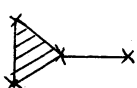
Δ を単体的複体とし、 k 環とする。このとき、 Δ 上に 2 次元斉次次数つき C. i. k -Hodge 代数が存在するならば、 Δ は次のいずれかである。

(i) $\Delta(1)$

(ii) $\dot{\Delta}(1) + \Delta(0)$

(iii) $\dot{\Delta}(2)$

(iv) $\dot{\Delta}(1) + \dot{\Delta}(1)$

(v) 

ただし、斜線部は 2-単体でない。

また逆に Δ が (i) ~ (v) のときには、 Δ 上に 2 次元斉次次数つき C. i. k -Hodge 代数が存在する。

証明

Δ 上に 2 次元斉次次数つき C. i. k -Hodge 代数 R が存在すると、性質 1, 2 より、

$$\beta_R(\lambda) = 1 + \frac{f_0 \lambda}{1-\lambda} + \frac{f_1 \lambda^2}{(1-\lambda)^2}$$

ただし、 f_i は Δ の i -単体の個数とする ($i=0, 1$)。

一方、 R は C. i. だから、補題より、

$$P_R(\lambda) = \frac{\prod_{i=1}^k (1 + \lambda + \dots + \lambda^{g_i})}{(1 - \lambda)^2}$$

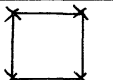
$$(x \geq 0, g_1, g_2, \dots, g_k > 0)$$

と表せる。従って、

$$(1 - \lambda)^2 + f_0 \lambda (1 - \lambda) + f_1 \lambda^2 = \prod_{i=1}^k (1 + \lambda + \dots + \lambda^{g_i})$$

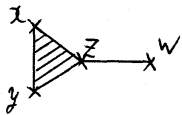
よって、 $g_1 + g_2 + \dots + g_k \leq 2$ で右辺は次の4種類に限られ、
 その各々に対して、 f_0, f_1 は一意的に定まる。そこから、 f_0, f_1
 についての条件を満たす単体的複体の種類も限られてくる。

([17] Graph Diagrams 参照) 以上のことは次の様に表に
 表わされる。

	$P_R(\lambda)$ の分子	f_0	f_1	f_0, f_1 から定まる単体的複体
(i)	1	2	1	$x \xrightarrow{\quad} x = \Delta(1)$
(ii)	$1 + \lambda$	3	2	$x \xrightarrow{\quad} x \xrightarrow{\quad} x = \dot{\Delta}(1) * \Delta(0)$
(iii)	$1 + \lambda + \lambda^2$	3	3	 $= \dot{\Delta}(2)$
(iv)	$(1 + \lambda)^2$	4	4	 $= \dot{\Delta}(1) * \dot{\Delta}(1)$
(v)	$(1 + \lambda)^2$	4	4	

逆に Δ が (i) ~ (v) の各々の場合に、 Δ 上に斉次次数つき C. i. k -Hodge 代数 R が存在することを示す。 Δ が (i) ~ (iv) のときは、
 $R = k[\Delta]$ ととればよい。 Δ が (v) のときは、次の例より従う。

Q.E.D.

Example $\Delta \Sigma$ 

なる単体的複体とする。このとき、

$$R = k[x, y, z, w] / (xw - xz, yw)$$

とすれば、 R は Δ 上の 2 次元斉次次数つき C. i. k -Hodge 代数となる。ただし、 R における *straightening relation* は

$$xw = xz$$

$$yw = 0$$

$$xyz = 0$$

で $z < x, z < w$ とする。

証明

$z' = w - z$ とすれば

$$R = k[x, y, z', w] / (xz', yw)$$

より、 R は C. i. である。また Σ_Δ の生成元は、 xw, yw, xyz

で、 $k[x, y, z, w]$ において

$$xyz = -y(xw - xz) + x(yw)$$

よって $xyz \in (xw - xz, yw)$ 。従って R において

$$\alpha \gamma Z = 0$$

$$\alpha W = \alpha Z$$

$$\gamma W = 0$$

これらは、明らかに (Hodge-2) を満たす。よって R は擬

k -Hodge 代数。また R は C. i. より

$$P_R(\lambda) = \frac{(1-\lambda^2)^2}{(1-\lambda)^4} = \frac{(1+\lambda)^2}{(1-\lambda)^2} = P_{k[\Delta]}(\lambda)$$

である。よって次の補題より、 k は k -Hodge 代数である。

補題

Δ を単体的複体とし、 k を体とする。このとき、次の (i), (ii) は同値である。

- (i) R は Δ 上の斉次次数つき k -Hodge 代数である。
- (ii) R は Δ 上の斉次次数つき擬 k -Hodge 代数で、

$$P_R(\lambda) = P_{k[\Delta]}(\lambda)$$

を満たす。

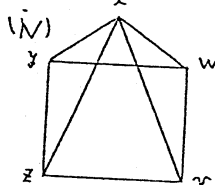
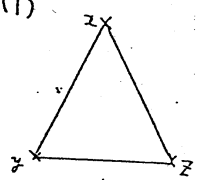
さて、次に Hodge 代数が 3 次元の場合の分類を述べる

定理

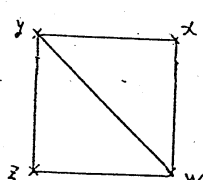
Δ を単体的複体とし、 k を体とする。このとき、 Δ 上に 3 次元斉次次数つき C. i. k -Hodge 代数が存在するならば、 Δ は

次のいずれかである。ただし、斜線の三角形のみ2-単体である

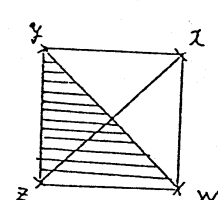
“ (i)



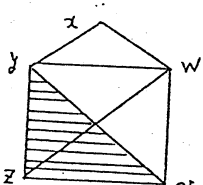
(ii)



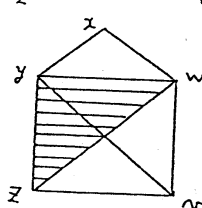
(iii)



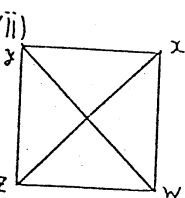
(v)



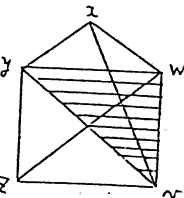
(vi)



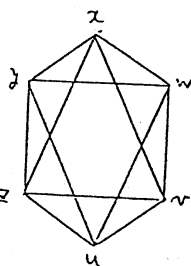
(vii)



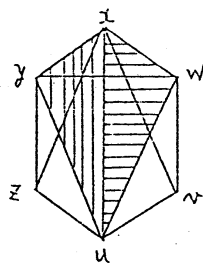
(viii)



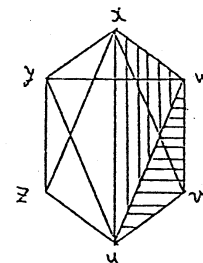
(ix)



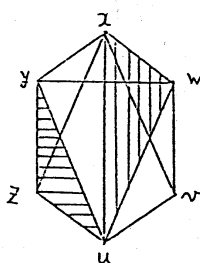
(x)



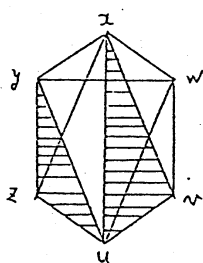
(xi)



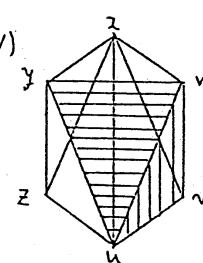
(xii)



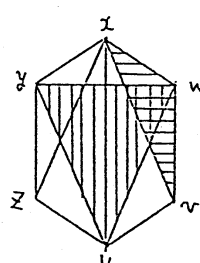
(xiii)

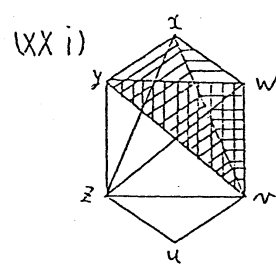
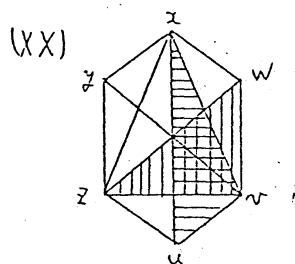
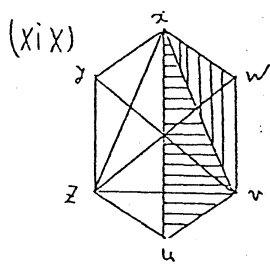
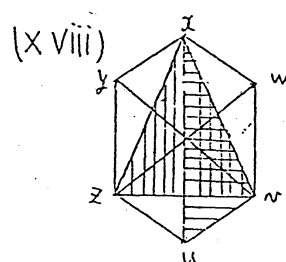
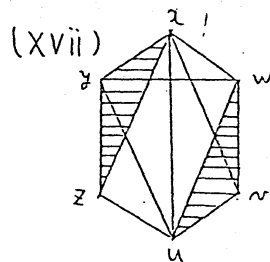
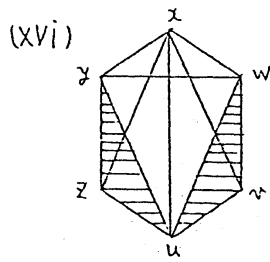


(xiv)

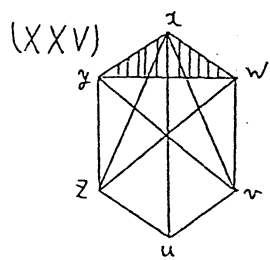
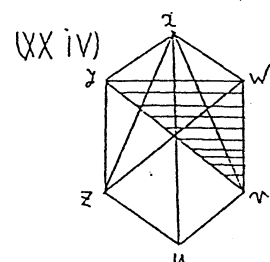
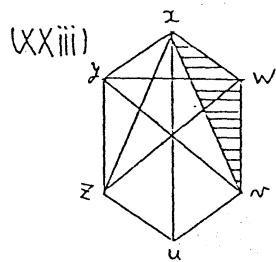
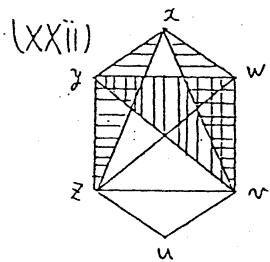


(xv)





ただし $\#(k) \equiv 2$ とする.



また逆に Δ が (i) ~ (xxv) のときには、 Δ 上に 3 次元
 斉次次数つき完全交叉 k -Hodge 代数が存在する。

証明は 2 次元の場合と方針は同じであるが、Poincaré 級数か
 ら定まる単体的複体の上に必ずしも、斉次次数つき C. i.

k -Hodge 代数が存在しない、で、状況は少しやっかいになる。

([16] 参照)

Remark

単体的複体 Δ が (i) ~ (XXV) のそれぞれの場合について、 Δ 上に斉次次数 r の C .i. k -Hodge 代数として、例えば次の様なものが存在する。

$$(i) R = k[x, y, z]$$

$$(ii) R = \frac{k[w, x, y, z]}{(xz)}$$

$$(iii) R = \frac{k[w, x, y, z]}{(wyz)}$$

$$(iv) R = \frac{k[v, w, x, y, z]}{(vy, wz)}$$

$$(v) R = \frac{k[v, w, x, y, z]}{(vx - vy, xz)}$$

$$(vi) R = \frac{k[v, w, x, y, z]}{(vx - wy, xz)}$$

$$(vii) R = \frac{k[w, x, y, z]}{(wxzy)}$$

$$\text{viii)} \quad R = k[v, w, x, y, z] \quad \underline{\hspace{10em}} \quad (vwy, xz)$$

$$\text{ix)} \quad R = k[u, v, w, x, y, z] \quad \underline{\hspace{10em}} \quad (ux, vy, wz)$$

$$\text{x)} \quad R = k[u, v, w, x, y, z] \quad \underline{\hspace{10em}} \quad (vy, vz - ux, wz)$$

$$\text{xi)} \quad R = k[u, v, w, x, y, z] \quad \underline{\hspace{10em}} \quad (vy + wx, vz - xz, wz + uw + yz)$$

$$\text{xii)} \quad R = k[u, v, w, x, y, z] \quad \underline{\hspace{10em}} \quad (vy - uy, vz - ux, wz)$$

$$\text{xiii)} \quad R = k[u, v, w, x, y, z] \quad \underline{\hspace{10em}} \quad (vy - wy, vz, wz - ux - uz)$$

$$\text{xiv)} \quad R = k[u, v, w, x, y, z] \quad \underline{\hspace{10em}} \quad (vy - wy, vz, wz - uw - ux)$$

$$\text{xv)} \quad R = k[u, v, w, x, y, z] \quad \underline{\hspace{10em}} \quad (vy, vz - uw, wz - wx - xz)$$

$$\text{xvi)} \quad R = k[u, v, w, x, y, z] \quad \underline{\hspace{10em}} \quad (vy, vz - uv - uz, wz - wx)$$

$$\text{xvii)} \quad R = k[u, v, w, x, y, z] \quad \underline{\hspace{10em}} \quad (vy - xy, vz, wz - uw)$$

$$\text{XVIII)} \quad R = k[u, v, w, x, y, z] \\ \hline (uw - wz, uy, wy - vx)$$

$$\text{XIX)} \quad R = k[u, v, w, x, y, z] \\ \hline (uw - uv - vw, uy - ux - xz, wy)$$

$$\text{XX)} \quad R = k[u, v, w, x, y, z] \\ \hline (uw - ux - wz + xz, uy - uv - yz, wy)$$

$$\text{XXI)} \quad R = k[u, v, w, x, y, z] \\ \hline (uw - avw, ux - vx, uy - yz)$$

ただし, $a \in k \setminus \{0, 1\}$ とする.

$$\text{XXII)} \quad R = k[u, v, w, x, y, z] \\ \hline (uw - vw, ux, uy - yz)$$

$$\text{XXIII)} \quad R = k[u, v, w, x, y, z] \\ \hline (uw, uy - vx, vz - yz)$$

$$\text{XXIV)} \quad R = k[u, v, w, x, y, z] \\ \hline (uw - vw, uy - xy, vz)$$

$$\text{XXV)} \quad R = k[u, v, w, x, y, z] \\ \hline (uw - wx, uy, vz)$$

系

k を体とし, Δ を Δ 上に 3 次元 齊次次数 $\leq c$ の k -Hodge 代数が存在する単体的複体とする。このとき $k[\Delta]$ は Cohen - macaulay ring となる。

Reference

- [1] C. De Concini, D. Eisenbud, and C. Procesi : Hodge algebras
Asterisque 91 (1982)
- [2] D. Eisenbud : Introduction to algebras with straightening
laws, in "Ring theory and algebra III" Dekker 1980
- [3] 渡辺敬一 : Study of algebras with straightening laws
of dimension 2 in "Algebraic and Topological Theories
- to the memory of Dr. Takehiko Miyata" p.p 622 -
639 (1985)
- [4] 日比孝之, 渡辺敬一 : Study of three dimensional algebras
with straightening laws which are Gorenstein domains I,
Hiroshima Math. J. 15 (1985) pp 27- 54
- [5] 日比孝之, 渡辺敬一 : Study of three-dimensional algebras
with straightening laws which are Gorenstein domains II,
Hiroshima Math. J. 15 (1985) pp. 321- 340
- [6] 日比孝之 : Study of three-dimensional algebras with
straightening laws which are Gorenstein domains III
Hiroshima Math. J. 18 (1988) pp. 299 - 308
- [7] 日比孝之 : Affine semigroup ring and Hodge algebras
修士論文 (1983)
- [8] 日比孝之 : Every affine graded ring has a Hodge structure,

Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino Vol 44° 2 (1986)

- [9] 日比孝之: On ASL domains with $\# \text{Ind } A \leq 2$,
第4回可換環論シンポジウム報告集(軽井沢) 1982
- [10] 日比孝之: Distributive lattices, affine semigroup rings
and algebras with straightening laws, in "Commutative
algebra and Combinatorics" Advanced Studies in Pure
math. Vol 11, North-Holland Amsterdam 1987 pp 91-109
- [11] R. Stanley: Hilbert functions of graded algebras,
Advances in math. 28 (1978) pp 57-83
- [12] R. Stanley: "Combinatorics and Commutative algebra"
Progress in math, Vol 41. Birkhäuser, Boston 1983
- [13] M. Hochster: Cohen-macaulay rings, combinatorics,
and simplicial complexes, in "Ring Theory III" Dekker
1977 pp 171-223
- [14] S. Reisner: Cohen-macaulay quotient of polynomial rings
Advances in math 21 (1976) pp 30-49
- [15] 中島晴久: Equvariant subvarieties of torus embeddings
which are local complete intersections, preprint
- [16] 寺井直樹: 斉次次数 $\rightarrow$ 完全交叉 Hodge 代数をもつ単体
的複体の分類について, 修士論文
- [17] F. Harary: "Graph theory" Reading Massachusetts 1969