

Abelian Higgs 模型の分岐について

亜細亜大アジア研 荒井義則

(1992年9月22日受理)

§ 1 序 論

最近ゲージ場における分岐 [1] - [6] やカオス [7] - [12] がいろいろと研究されているが, それらの研究の大部分はYang-Mills場に関するものであった。カオスについてはYang-Mills-Higgs系 [11] - [12] や Abelian Higgs模型 [11] についても調べられてきたが, 分岐に関してはほとんど調べられていなかった。前の論文 [13] では, Yang-Mills-Higgs系の分岐について調べたが, 本論文では Abelian Higgs模型の分岐について考察する。

§ 2 Abelian Higgs 模型

本稿で扱うモデルのラグランジアン密度は次式で与えられる。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) + c_2 |\phi|^2 - c_4 |\phi|^4, \quad (1)$$

ただし,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2)$$

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu + ieA_\mu) \phi, \quad (3)$$

である。

ここで,

$$A_0 = 0, \quad (4)$$

$$A_1 = A_2 = \frac{h(t)}{\sqrt{2}}, \quad (5)$$

$$\phi = \exp [i \omega (x+y)] q_2(t), \quad (6)$$

$$h(t) = q_1(t) - \frac{\sqrt{2} \omega}{e}, \quad (7)$$

とすると, 場の方程式は

$$\ddot{q}_1 + e^2 q_1 q_2^2 = 0, \quad (8)$$

$$\ddot{q}_2 - 2 c_2 q_2 + 4 c_4 q_2^3 + e^2 q_1^2 q_2 = 0, \quad (9)$$

となる [11]。方程式(8), (9)において, 「 $\cdot$ 」は t に関する微分を表わす。

本稿では方程式(8), (9)において, 解の分岐が生じることを証明する。

§ 3 解の分岐

以下では, $c_2 < 0$ の場合を考える。

$$\alpha = -c_2 > 0, \quad (10)$$

とにおいて,

$$q_1(t) = \alpha k(t), \quad (11)$$

$$q_2(t) = \alpha l(t), \quad (12)$$

とおくと、方程式(8), (9)は

$$\ddot{k} + e^2 \alpha^2 k l^2 = 0, \quad (13)$$

$$\ddot{l} + 2 \alpha l + 4 c_4 \alpha^2 l^3 + e^2 \alpha^2 k^2 l = 0, \quad (14)$$

となる。

ここでは

$$0 \leq t \leq T \quad (T \text{は任意の正数}), \quad (15)$$

の範囲で考えることにする。このとき、 α を分岐のパラメーターにとると、次の定理が成立する。

(定理) 方程式(13), (14)には

$$2 \alpha = \frac{n^2 \pi^2}{T^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (16)$$

のとき、自明解 $k = 0, l = 0$ から分岐し境界条件

$$k(0) = l(0) = k(T) = l(T) = 0, \quad (17)$$

を満たす非自明解が存在する。 2α が $n^2 \pi^2 / T^2$ に十分近いとき、この分岐解は

$$k = O(u^2), \quad (18)$$

$$l = u \sin \frac{n \pi}{T} t + O(u^2), \quad (19)$$

と表わされる。ここで、 u は 0 に十分近い実数で、 2α とは

$$2 \alpha = \frac{n^2 \pi^2}{T^2} + O(|u|), \quad (20)$$

の関係がある。また、 $(2\alpha, k, l)$ が $(n^2\pi^2/T^2, 0, 0)$ に十分近いところでは方程式 (13), (14) の解は自明解 $k=0, l=0$ と (18), (19) で表わされる解のみである。

(証明) 方程式 (13), (14) の非線形部分,

$$\begin{pmatrix} e^2 \alpha^2 k l^2 \\ 4c_1 \alpha^2 l^3 + e^2 \alpha^2 k^2 l \end{pmatrix}$$

とこの非線形部分の k と l に関する一次導関数が、 $k=l=0$ のときに 0 になることは容易にわかる。

線形部分の固有値問題については、境界条件 (17) のもとで次の方程式を考えればよい。

$$\begin{pmatrix} \ddot{k} \\ \ddot{l} + 2\alpha l \end{pmatrix} = 0. \quad (21)$$

この方程式は $2\alpha = n^2\pi^2/T^2$ のとき、次式で示される唯一の非自明解をもつ。

$$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \frac{n\pi}{T} t \end{pmatrix}. \quad (22)$$

すなわち、 $n^2\pi^2/T^2$ が単純固有値で、この固有値に (22) なるベクトルが属することがわかった。

以上の考察より、単純固有値からの分岐に関する定理 (文献 [14], 188頁, 定理 5.1) によって、本定理は証明されたことになる。

参考文献

- [1] R. Jackiw and P. Rossi : Phys. Rev. D21 (1980) 426.
- [2] C. H. Oh : J. Math. Phys. 25(1984) 660.
- [3] S. K. Paul and A. Khare : Phys. Lett. 138B(1984) 402.
- [4] C. H. Oh, S. N. Chow and C. H. Lai : Phys. Rev. D30 (1984) 1334.
- [5] U. Kursawe and E. Malec : J. Math. Phys. 26(1985) 2643.

- [6] C. H. Oh and R. R. Parwani : J. Phys. A23 (1990) L871. (この論文のReferencesも参照) .
- [7] S. G. Matinyan, G. K. Savvidy and N. G. Ter-Arutunyan-Savvidy : Sov. Phys. JETP 53 (1981) 421.
- [8] W. -H. Steeb, J. A. Louw and C. M. Villet : Phys. Rev. D33 (1986) 1174.
- [9] S. G. Matinyan, E. B. Prokhorenko and G. K. Savvidi : JETP Lett. 44(1986) 138.
- [10] T. Kawabe and S. Ohta : Phys. Rev. D41(1990) 1983.
- [11] C. Nagaraja Kumar and Avinash Khare : J. Phys. A22(1989)L849.
- [12] T. Kawabe : Phys. Lett. B274(1992)399.
- [13] Y. Arai : 物性研究55-6(1991)654.
- [14] S. N. Chow and J. K. Hale : *Methods of Bifurcation Theory* (Springer-Verlag, New York, 1982).