

半線型 Schrödinger 方程式について

大阪市立大 工 能高 惟倫

1.

超流動の方程式は次の様な半線型 Schrödinger 方程式である
([1], [2])

$$(1) \begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u + [p * |u|^2] u + g(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

$u(x, t)$ は臨界温度以下でボース, アインシュタイン凝縮を起す ^4He の系を考えた時, ^4He - 原子の波動関数である。([3]) 2 原子間相互作用ポテンシャル $p(x)$ に対して次の様に仮定する。 $p(x) = p_0(x) + p_1(x)$, $p_0(x) = p_0(x) \geq 0$

$p_0(x) \in \mathcal{E}_L^1$, $p_1(x) \in L^\infty$. このとき

[定理 1.]

$f(x) \in \mathcal{E}_L^\infty$, $g(x, t) \in \mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{E}_L^\infty)$ とすると Cauchy 問題

(1) は一意的な大域解 $u(x, t) \in \mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{E}_L^\infty)$ を持つ。

2.

原子核のまわりの電子に対する Hartree - Fock の方程式は次の様な半線型楕円型方程式系に対する固有問題である。

$$(2) \quad \varepsilon_{j\sigma} u_{j\sigma} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta u_{j\sigma} - \frac{Ze^2}{|x|} u_{j\sigma} + \sum_{k\sigma'} u_{k\sigma'} \left[\frac{e^2}{|y|} * |u_{k\sigma'}|^2 \right] - \sum_{k\sigma'} u_{k\sigma'} \left[\frac{e^2}{|y|} * \bar{u}_{k\sigma'} u_{j\sigma} \right]$$

$x \in \mathbb{R}^3$

$u_{j\sigma}$ は、スピンの j 番目の電子に対する波動関数 $\varepsilon_{j\sigma}$ は固有値 $\lambda_{j\sigma} \times \sigma$, $M, \hbar, Z, e$ はいずれも正の定数である。([4] p.23, [5] p.66) 原子核と電子, 及び電子同士の相互作用ポテンシャルはクーロンポテンシャルであり、2 強い特異性を持つ。2 である。

3.

少し強引であるが定常問題がポテンシャルに対する問題は、もっと強める (可能な特異性をも、と仮定する) が (2) の形になる様な時間依存する問題を考える

$$(3) \quad \begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u + A[u, u] u + g(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

$$u = {}^t(u_1, \dots, u_N) \quad g = {}^t(g_1, \dots, g_N) \quad f = {}^t(f_1, \dots, f_N)$$

$$A[u, u] = A^{(0)}[u, u] + A^{(1)}[u, u]$$

$$= \left(\sum_{l,m=1}^N a_{jklm}^{(0)}(y) * \bar{u}_l(y) u_m(y) \right) + \left(\sum_{l,m=1}^N a_{jklm}^{(1)}(y) * \bar{u}_l(y) u_m(y) \right) \quad N \times N \text{ 行列.}$$

$$a_{jklm}^{(0)}(x) = a_{lmjk}^{(0)}(-x) \in \mathcal{C}_L^{\pm}, \quad a_{jklm}^{(1)}(x) \in L^{\infty}$$

$$\sum_{j,k,l,m=1}^N \bar{\xi}_j \xi_k a_{jklm}^{(0)}(x) \bar{\eta}_l \eta_m \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \forall \xi, \eta \in \mathbb{C}^N$$

$$\text{Imaginary part} \left[\sum_{j,k,l,m=1}^N \bar{\xi}_j \xi_k a_{jklm}^{(1)}(x) \bar{\eta}_l \eta_m \right] = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \forall \xi, \eta \in \mathbb{C}^N$$

と仮定する。(も、と仮定をゆきくす事もできずが...) 定常問題との関連は不明であ、2筆者が南いた範囲では(3)が直接に物理的意味を持つという証言は得られなかった。しかし超流動の方程式(1)の未知関数の個数を増やす方向での一般化にはな、211。むしろむしろ事と指針に(2)をなかなかなる上の様な仮定を置く。左記がみす。

[定理. 2]

$f(x) \in \mathcal{E}_L^{\pm}$, $g(x,t) \in \mathcal{E}_t^{\pm}(\mathcal{E}_L^{\pm})$ とする時 Cauchy 問題 (3) は一意的な大域解 $u(x,t) \in \mathcal{E}_t^{\pm}(\mathcal{E}_L^{\pm})$ を持つ。

4.

(1) に対し 2 物理的は取り扱、とする時は、2 原子間相互作用ポテンシャルは近距離にだけ働、これに比し 2 波動関数 $u(x,t)$ の空間的な変動はゆきやがであると考え。可な

ある函数 $f(x)$ を $\int f(x) dx = 1$ とし、2 ライライクの δ を置き代えを課がある。この時にも (1) に对すると同様の存在原理を得たい所であるが空間 3 次元で考えれば空間次元が高いための困難が現われる様なのでここからは大きく譲歩して空間 1 次元で考える。

$$(4) \begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^2 u + g(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R}' \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}' \end{cases}$$

5.

非線型光学の方程式は. ([6], [7])

$$(5) \begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u - |u|^2 u + g(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

媒質の屈折率が電場の強度に依存して変化するという非線型効果がレーザー光線の場合の様に電場の強度の非常に大きい電磁波に対しては無視できなくなる。(5) は単色波が t 方向 (この場合 t は時間にあるが!) に伝播すると考えた時の振巾の空間的な変動 $u(x, t)$ を記述する方程式である。この場合にもなめらかな大域解の存在を保障しようと思つと空間 1 次元で考えなければならぬ様である。

$$(5) \begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - |u|^2 u + g(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R}' \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}' \end{cases}$$

6.

(4) 及び (5) は又二場を交えて取り扱う。プラズマの中を伝わるある種の波の場合 ([8]) の様に非線型波動の伝播を記述する簡単なモデル方程式として非常に重要である。 ([9]) (4) 及び (5) を特別の場合として含む様なもう少し広い範囲を考える。

$$(6) \begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(|u|^2) u + g(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R}' \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

$$p(z) \in C^\infty[0, \infty) \quad \text{とし} \quad P(z) = \int_0^z p(s) ds \quad \text{と} \quad a. "z" \text{ とき}$$

適当な $z_0 > 0$ に対し適当な定数 $C \geq 0, P_0 \geq 0, P_1 \geq 0$ を

取れば $\forall z \geq z_0$ に対し等式 $|p(z)|\sqrt{z} \leq C P(z) + P_0 z + P_1 z^2$

が成り立つものとする。(もっと広い範囲で成り立つ事がある)

子) この時、

[原理, 3]

$f(x) \in \mathcal{E}_0^\infty, g(x, t) \in \mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{E}_2^\infty)$ とする。Cauchy 問題 (6)

は一意的な大域解 $u(x, t) \in \mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{E}_2^\infty)$ を持つ。

7.

定理 2 の証明の概略を示し置く。 $f(x) \in E_{L^2}^{2k}$, $g(x, t) \in E_t^0(E_{L^2}^{2k}) \cap E_t^1(E_{L^2}^{2k-2}) \cap \dots \cap E_t^{k-1}(E_{L^2}^2)$ とする ($k=1, 2, 3, \dots$)

$$u_0(x, t) \equiv f(x)$$

$$\begin{cases} i \frac{\partial u_n}{\partial t} = -\Delta u_n + A[u_{n-1}, u_{n-1}] u_n + g(x, t) & (x, t) \in R^3 \times [0, \infty) \\ u_n(x, 0) = f(x) & x \in R^3 \end{cases} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

この手順で 2-近似解の列 $u_n(x, t) \in E_t^0(E_{L^2}^{2k}) \cap \dots \cap E_t^k(L^2)$ が定まる。

$\|f\|_{E_{L^2}^{2k}}$ 及び $\max_{0 \leq t \leq 1} \sum_{|i| \leq k-1} \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \right\|_{E_{L^2}^{2k-2}}$ の値で決まる $t_k > 0$ が

あり、2. $n \rightarrow \infty$ とすると u_n は $E_t^0(E_{L^2}^{2k}) \cap \dots \cap E_t^k(L^2) [0, t_k]$

で極限 u に収束する事になり $u(x, t)$ は $[0, t_k]$ 上の 2.

Cauchy 問題 (3) の解となる

8.

任意に定めた $T > 0$ に対し 2 区間 $[0, T]$ 上の Cauchy 問題 (3) の解が存在する事をいうために 2 の手順を繰り返して局所解を次々につないで T まで到達せねばならぬ。この事を示証するには常套手段に従って (3) の解に対するア priori 評価が求められる。

[命題]

$$k=1, 2, 3, \dots \text{ に対し } u(x, t) \in E_t^0(E_{L^2}^{2k}) \cap E_t^1(E_{L^2}^{2k-2}) \cap \dots \cap E_t^k(L^2)$$

なる (3) の解は次の様なア priori 評価を持つ

$$\sum_{2^j \leq k} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^j u(t) \right\|_{\dot{E}_t^{2j}} \leq U_{2k}(t, \|f\|_{\dot{E}_t^{2k}}, \max_{0 \leq s \leq t} \sum_{2^j \leq k-1} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^j g(s) \right\|_{\dot{E}_t^{2j+2}})$$

ただし U_{2k} は非負値をとり非減少局所有関数である。

以上の事から、大域解 $u(x, t) \in \dot{E}_t^0(\dot{E}_t^{2k}) \cap \dots \cap \dot{E}_t^k(L^2) [0, T]$

の存在がわかる。 k は任意の自然数、 T は任意の正数だから、

定理 2 が示すこととなる。

References

- [1] Pitaevskii, L. P., Vortex lines in an imperfect Bose gas, Sov. Phys. JETP, 13 (1961) 451-454.
- [2] Gross, E. P., Hydrodynamics of a superfluid condensate, J. Math. Phys., 4 (1963) 195-207.
- [3] 日本物理学会編 「低温の物理」 (1969)
- [4] サウレス 「多体系の量子力学」 (1965)
- [5] ランダウ = リフシッツ 「量子力学 1」 (1967)
- [6] Kelley, P. L., Self-focusing of optical beams, Phys. Rev. Letters, 15 (1965) 1005-1008.
- [7] Akhmanov, S. A., Sukhorukov, A. P., and Khokhlov, R. V., Self-focusing and self-trapping of intense light beams in a nonlinear medium, Sov. Phys. JETP, 23 (1966) 1025-1033.
- [8] Taniuti, T., and Washimi, H., Self-trapping and instability of hydromagnetic waves along the magnetic field in a cold plasma, Phys. Rev. Letters, 21 (1968) 209-212.
- [9] Taniuti, T., and Yajima, N., Perturbation method for a nonlinear wave modulation. I, J. Math. Phys., 10 (1969) 1369-2024.