

A generalization of Lakshmibai-Seshadri paths and Chevalley formula for arbitrary weights

東京工業大学・理学院数学系 河野 隆史

Takafumi Kouno

Department of Mathematics,
Tokyo Institute of Technology

概要

本研究では、表現論において重要な組合せ論的対象である Lakshmibai-Seshadri パスを、一般のウェイトへ拡張し、interpolated Lakshmibai-Seshadri パスを導入した。また、interpolated Lakshmibai-Seshadri パスを用いて、旗多様体 G/B のトーラス同変 K 理論における Chevalley 公式を記述した。本稿では、これらの結果について、証明等の詳細を省いて概説する。本稿は、RIMS 共同研究「表現論とその組合せ論的側面」における講演“A generalization of Lakshmibai-Seshadri paths and Chevalley formula for arbitrary weights”のまとめである。

1 Introduction

本稿を通して、 G を $\mathbb{C}$ 上の単連結単純代数群、 H を極大トーラス、 B を Borel 部分群とし、 G のルート系を Δ 、正ルート全体の集合を Δ^+ 、単純ルート全体の集合を $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ 、ウェイト格子を P 、優整ウェイト全体の集合を P^+ 、ルート格子を Q とする。各ルート $\alpha \in \Delta$ に対応する余ルートを $\alpha^\vee$ とし、余ルート格子を $Q^\vee$ とする。また、 α_i ($i \in I$) に対する単純鏡映を s_i とし、 $W = \langle s_i \mid i \in I \rangle$ を Weyl 群、 $\alpha \in \Delta$ に対応する鏡映を s_α 、 W の Bruhat グラフを $BG(W)$ とする。そして、 $W_{\text{af}} = W \ltimes Q^\vee$ および $W_{\text{af}}^\vee = W \ltimes Q$ を、アフィン Weyl 群およびその dual、 $W_{\text{ex}}^\vee = W \ltimes P = W_{\text{af}}^\vee \ltimes (P/Q)$ を拡大アフィン Weyl 群の dual とし、 $\mu \in P$ を $W_{\text{ex}}^\vee$ の元とみなすとき、 $t_\mu (\in W_{\text{ex}}^\vee)$ と書く。さらに、 Δ_{af} をアフィンルート系とし、 $\beta \in \Delta_{\text{af}}$ に対応する鏡映も $s_\beta \in W_{\text{af}}$ と書く。いま、null root を $\delta \in \Delta_{\text{af}}$ と書くとき、 $\beta \in \Delta_{\text{af}}$ が $\beta = \gamma + k\delta$ ($\gamma \in \Delta$, $k \in \mathbb{Z}$) と表されるならば、 $\bar{\beta} := \gamma$ と定める。

続いて、 $\lambda \in P$ に対し、 $\mathbb{C}(\lambda)$ を B の λ をウェイトとする 1 次元表現とし、旗多様体 $X = G/B$ 上の直線束 $G \times_B \mathbb{C}(\lambda) \rightarrow G/B$ の正則切断の層を $\mathcal{L}(\lambda)$ と書く。また、Schubert 多様体 $X_w = \overline{BwB}/B$ ($w \in W$) の構造層を $\mathcal{O}_w$ と書く。さらに、 G/B 上の連接層 $\mathcal{M}$ に対して、旗多様体 G/B のトーラス同変 K 理論 $K_H(G/B)$ における $\mathcal{M}$ の同型類を $[\mathcal{M}]$ と書く。

$\mu \in P$, $w \in W$ を任意にとる. $K_H(G/B)$ における以下のような等式を, **Chevalley 公式** という.

$$[\mathcal{L}(-\mu) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_w] = \sum_{v \in W} \sum_{\xi \in P} c_{w,v}^{\mu,\xi} e^{-\xi} [\mathcal{O}_v]$$

ここで, 整数 $c_{w,v}^{\mu,\xi} \in \mathbb{Z}$ ($w, v \in W$, $\mu, \xi \in P$) は **K_H -Chevalley 係数** と呼ばれる.

Schubert calculus における主要な問題の一つとして, 「 K_H -Chevalley 係数を組合せ論的に記述せよ」というものがある. これに対し, C. Lenart 氏および A. Postnikov 氏は, K_H -Chevalley 係数を **alcove walk** と呼ばれる組合せ論の対象を用いて記述し, 問題を解決した ([LP]). しかし, alcove walk はアフィンルート系の情報を必要とするため, 具体的に計算をする際にはやや複雑である.

一方で, alcove walk と密接な関係がある組合せ論的对象として, **Lakshmibai-Seshadri パス** (以下 LS パスと略す) が挙げられる. $\mu \in P$ が優整ウェイト (すなわち $\mu \in P^+$) のときは, alcove walk 側の集合 $\mathcal{A}(\mu)$ (**admissible subset** の集合. 定義は [LNSSS, §5] 参照) と LS パス側の集合 $\text{QLS}(\mu)$ (**量子 Lakshmibai-Seshadri パス** の集合. 定義は [LNSSS, Definition 3.1] 参照) の間に, よい全単射が存在することが知られている ([LNSSS, Proposition 6.8]).

この全単射を用いることで, Chevalley 公式を, LS パスを用いた記述に書き直すことができる. LS パスは有限ルート系の情報のみを必要とするため, 具体的に計算するときには alcove walk による記述より適している.

しかし一般のウェイトの場合の alcove walk については, 対応する LS パス側の組合せ論的对象が存在しない. そこで本研究では, 一般のウェイトに対して LS パスの定義を拡張し, 上記の全単射の類似を作ることで, Chevalley 公式を有限ルート系の情報だけで記述することを目指した.

2 Bruhat グラフ

この節では, $\mu \in P$ に応じて正ルート集合を 3 分割し, その分割に対応する Bruhat グラフ上の “label-increasing パス” について準備する. これ以降, しばらく $\mu \in P$ を固定する.

定義 2.1. 集合 $R_+, R_0, R_- \subset \Delta^+$ を以下のように定める.

$$\begin{aligned} R_+ &:= \{\alpha \in \Delta^+ \mid \langle \mu, \alpha^\vee \rangle > 0\}, \\ R_0 &:= \{\alpha \in \Delta^+ \mid \langle \mu, \alpha^\vee \rangle = 0\}, \\ R_- &:= \{\alpha \in \Delta^+ \mid \langle \mu, \alpha^\vee \rangle < 0\}. \end{aligned}$$

この分割に対応する Δ^+ 上の reflection order を考える. ここで, Δ^+ 上の全順序 $\triangleleft$ が **reflection order** であるとは, 次の [条件] が成り立つことである:

[条件] 各 $\alpha, \beta \in \Delta^+$ に対し, $\alpha + \beta \in \Delta^+$ ならば, $\alpha \triangleleft \alpha + \beta \triangleleft \beta$ または $\beta \triangleleft \alpha + \beta \triangleleft \alpha$ が成り立つ.

定義 2.2. 集合 $\mathcal{RO}(\mu, \Delta^+)$ を、以下のように定める.

$$\mathcal{RO}(\mu, \Delta^+) := \left\{ \triangleleft : \Delta^+ \text{ 上の reflection order } \left| \begin{array}{l} \text{任意の } \alpha \in R_-, \beta \in R_0, \gamma \in R_+ \text{ に対し} \\ \alpha \triangleleft \beta \triangleleft \gamma \text{ が成り立つ.} \end{array} \right. \right\}.$$

以下, $\triangleleft \in \mathcal{RO}(\mu, \Delta^+)$ をひとつ固定する.

定義 2.3. $x, y \in W$ とする.

(1) $\text{BG}(W)$ 上のパス $x = x_0 \xrightarrow{\gamma_1} x_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_s} x_s = y$ で, $\gamma_1, \dots, \gamma_s \in R_+$ かつ $\gamma_1 \triangleleft \gamma_2 \triangleleft \cdots \triangleleft \gamma_s$ を満たすものが存在するとき, $x \xrightarrow{(\mu, +, q=0)} y$ とかく.

(2) $\text{BG}(W)$ 上のパス $x = x_0 \xrightarrow{\gamma_1} x_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_s} x_s = y$ で, $\gamma_1, \dots, \gamma_s \in R_-$ かつ $\gamma_1 \triangleleft \gamma_2 \triangleleft \cdots \triangleleft \gamma_s$ を満たすものが存在するとき, $x \xrightarrow{(\mu, -, q=0)} y$ とかく.

注意 2.4. $\xrightarrow{(\mu, \pm, q=0)}$ の定義は, $\triangleleft \in \mathcal{RO}(\mu, \Delta^+)$ の取り方によらない.

3 Interpolated Lakshmibai-Seshadri パス

本節では, Lakshmibai-Seshadri パスの拡張である, interpolated Lakshmibai-Seshadri パスを導入する.

まずは, 整数性条件について述べる.

定義 3.1. $x, y \in W$ とする.

(1) $\text{BG}(W)$ 上のパス $x = x_0 \xrightarrow{\gamma_1} x_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_s} x_s = y$ で, $\gamma_1, \dots, \gamma_s \in R_+$ かつ $\gamma_1 \triangleleft \gamma_2 \triangleleft \cdots \triangleleft \gamma_s$ を満たし, さらにすべての $k \in \{1, \dots, s\}$ に対して $\sigma\langle\mu, \gamma_k^\vee\rangle \in \mathbb{Z}$ が成り立つものが存在するとき, $x \xrightarrow{(\mu, +, q=0)}_\sigma y$ とかく.

(2) $\text{BG}(W)$ 上のパス $x = x_0 \xrightarrow{\gamma_1} x_1 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots \xrightarrow{\gamma_s} x_s = y$ で, $\gamma_1, \dots, \gamma_s \in R_-$ かつ $\gamma_1 \triangleleft \gamma_2 \triangleleft \cdots \triangleleft \gamma_s$ を満たし, さらにすべての $k \in \{1, \dots, s\}$ に対して $\sigma\langle\mu, \gamma_k^\vee\rangle \in \mathbb{Z}$ が成り立つものが存在するとき, $x \xrightarrow{(\mu, -, q=0)}_\sigma y$ とかく.

以上の準備をもとに, interpolated Lakshmibai-Seshadri パスを導入する.

定義 3.2. $s \geq 1$ とする. $x_1, x_2, \dots, x_s, y_1, y_2, \dots, y_{s-1} \in W$ および $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s \in \mathbb{Q}$ が以下の条件 (1), (2), (3) を満たすとき, 組 $(x_1, x_2, \dots, x_s; y_1, y_2, \dots, y_{s-1}; \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s)$ を型 μ の **interpolated Lakshmibai-Seshadri パス** (または **interpolated LS パス**) とよぶ.

(1) $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_s = 1$ が成り立つ.

(2) すべての $i \in \{1, \dots, s-1\}$ に対し, $x_{i+1} \xrightarrow{(\mu, +, q=0)}_{\sigma_i} y_i$ が成り立つ.

(3) すべての $i \in \{1, \dots, s-1\}$ に対し, $y_i \xrightarrow{(\mu, -, q=0)}_{\sigma_i} x_i$ が成り立つ.

型 μ の interpolated LS パス全体の集合を $\text{ILS}(\mu)$ とかく.

interpolated LS パスに対して, 通常の LS パスと同様にウェイト等を定める.

定義 3.3. $\eta = (x_1, x_2, \dots, x_s; y_1, y_2, \dots, y_{s-1}; \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s) \in \text{ILS}(\mu)$ を型 μ の interpolated LS パスとする.

(1) $\iota(\eta) := x_1, \kappa(\eta) := x_s$ と定める. $\iota(\eta)$ を η の **initial direction**, $\kappa(\eta)$ を η の **final direction** という.

(2) $\text{wt}(\eta) \in P$ を

$$\text{wt}(\eta) := \sum_{k=1}^s (\sigma_k - \sigma_{k-1}) x_k \mu$$

と定める. $\text{wt}(\eta)$ を η の **ウェイト** という.

続いて, interpolated LS パス特有の量である, **positivity length** を定める.

定義 3.4. $\eta = (x_1, x_2, \dots, x_s; y_1, y_2, \dots, y_{s-1}; \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s) \in \text{ILS}(\mu)$ を型 μ の interpolated LS パスとする. $\text{pos}(\eta) \in \mathbb{Z}$ を

$$\text{pos}(\eta) := \sum_{k=1}^{s-1} (\ell(x_{k+1}) - \ell(y_k))$$

と定める. $\text{pos}(\eta)$ を η の **positivity length** という.

4 Interpolated LS パスを用いた Chevalley 公式の記述

Chevalley 公式の問題は, K_H -Chevalley 係数 $c_{w,v}^{\mu,\xi} \in \mathbb{Z}$ ($w, v \in W, \mu, \xi \in P$) を組合せ論的に記述することであった. この問題に対する, C. Lenart 氏および A. Postnikov 氏による結果を述べる. いま, $\mu \in P$ をとり, $t_\mu \in W_{\text{ex}}^\vee$ の reduced expression $t_\mu = s_{i_r} \cdots s_{i_2} s_{i_1} (\pi^\vee)^{-1} \in W_{\text{af}}^\vee \ltimes (P/Q) = W_{\text{ex}}^\vee (i_1, \dots, i_r \in I_{\text{af}} = I \sqcup \{0\}, \pi^\vee \in P/Q)$ をひとつ固定する. なお, $\theta \in \Delta$ を最高ルートとしたとき, s_0 は $\alpha_0 = -\theta + \delta$ に対応する単純鏡映である. この reduced expression に従って, (アフィン) 余ルートの列 $(\beta_1^\perp)^\vee, (\beta_2^\perp)^\vee, \dots, (\beta_r^\perp)^\vee$ および (有限) ルートの列 $\gamma_1^\perp, \gamma_2^\perp, \dots, \gamma_r^\perp$ を

$$(\beta_k^\perp)^\vee := \pi^\vee s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{k-1}} (\alpha_{i_k}^\vee), \quad \gamma_k^\perp := \overline{\beta_k^\perp} \quad \text{for } k \in \{1, \dots, r\}$$

により定める.

定理 4.1 ([LP, Theorem 6.1]). 各 $\xi \in P$ および $v \in W$ に対し

$$c_{w,v}^{\mu,\xi} = \sum_J (-1)^{n(J)}$$

が成り立つ. ここで, 和 $\sum_J$ において, J は以下の条件 (a), (b) を満たす集合 $J = \{j_1, \dots, j_s\} \subset \{1, \dots, r\}$ 全体を動く.

(a) $w \leftarrow w s_{\gamma_{j_1}^\perp} \leftarrow \cdots \leftarrow w s_{\gamma_{j_1}^\perp} \cdots s_{\gamma_{j_s}^\perp} = v$ は $\text{BG}(W)$ のパスである.

(b) $-\xi = ws_{\beta_{j_1}^L} \cdots s_{\beta_{j_s}^L}(-\mu)$ が成り立つ.

また, $n(J) := \#\{j \in J \mid \gamma_j^L \in -\Delta^+\}$ と定める.

本稿では, interpolated LS パスを用いて K_H -Chevalley 係数 $c_{w,v}^{\mu,\xi}$ を記述する方法を考察する. そのために, 以下に述べる O. Mathieu 氏による結果を利用する. $v, w \in W$ および $\mu \in P$ に対し, 多項式 $S_w^v(\mu) \in \mathbb{Z}[P]$ を

$$[\mathcal{L}_v(-\mu)] = \sum_{v \in W} S_w^v(\mu) [\mathcal{O}_v]$$

となるように定める. また, $v, w \in W$ および $\mu, \xi \in P$ に対し, 整数 $m_w^{v,\xi}(\mu) \in \mathbb{Z}$ を

$$[\mathbb{C}(-\mu) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_w] = \sum_{v \in W} \sum_{\xi \in P} m_w^{v,\xi}(\mu) [\mathcal{L}_v(\xi)]$$

となるように定める.

定理 4.2 ([M, §5]). $v, w \in W$ および $\mu \in P$ に対し

$$S_{w^{-1}}^{v^{-1}}(\mu) = \sum_{\xi \in P} m_w^{v,\xi}(\mu) e^\xi$$

が成り立つ.

定理 4.1 と定理 4.2 を組み合わせることにより, 以下を得る.

系 4.3. $\mu \in P$ および $w \in W$ に対し

$$[\mathbb{C}(-\mu) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_w] = \sum_{J=\{j_1, \dots, j_s\}} (-1)^{n(J)} \left[\mathcal{L}_{\left(w^{-1}s_{\gamma_{j_1}^L} \cdots s_{\gamma_{j_s}^L}\right)^{-1} \left(w^{-1}s_{\beta_{j_1}^L} \cdots s_{\beta_{j_s}^L}(-\mu)\right)} \right]$$

が成り立つ. ここで, 和 $\sum_J$ において, J は以下の条件 (a) を満たす集合 $J = \{j_1, \dots, j_s\} \subset \{1, \dots, r\}$ 全体を動く.

(a) $w^{-1} \leftarrow w^{-1}s_{\gamma_{j_1}^L} \leftarrow \cdots \leftarrow w^{-1}s_{\gamma_{j_1}^L} \cdots s_{\gamma_{j_s}^L}$ は $\text{BG}(W)$ のパスである.

注意 4.4. 系 4.3 における条件 (a) は, 以下の条件 (a)' と同値である.

(a)' $w_0 w^{-1} \rightarrow w_0 w^{-1}s_{\gamma_{j_1}^L} \rightarrow \cdots \rightarrow w_0 w^{-1}s_{\gamma_{j_1}^L} \cdots s_{\gamma_{j_s}^L}$ は $\text{BG}(W)$ のパスである.

いま, 系 4.3 の和 $\sum_J$ における, 集合 J の動く範囲をまとめた集合を用意する.

定義 4.5. $u \in W$ に対し, 集合 $\mathcal{A}|_{q=0}(u; (i_1, \dots, i_r))$ を

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}|_{q=0}(u; (i_1, \dots, i_r)) \\ & := \left\{ J = \{j_1, \dots, j_s\} \subset \{1, \dots, r\} \mid u \rightarrow us_{\gamma_{j_1}^L} \rightarrow \cdots \rightarrow us_{\gamma_{j_1}^L} \cdots s_{\gamma_{j_s}^L} \text{ in } \text{BG}(W) \right\} \end{aligned}$$

で定める. 集合 $\mathcal{A}|_{q=0}(u; (i_1, \dots, i_r))$ の元を **admissible subset** (of $\{1, \dots, r\}$) という.

また, admissible subset J に対し, 終点とウェイトを定義する.

定義 4.6. $u \in W$ とする. $J \in \mathcal{A}|_{q=0}(u; (i_1, \dots, i_r))$ に対し

$$\text{end}(J) := us_{\gamma_{j_1}^L} \cdots s_{\gamma_{j_s}^L}, \quad \text{wt}(J) := -us_{\beta_{j_1}^L} \cdots s_{\beta_{j_s}^L}(-\mu)$$

と定める.

上記の admissible subset を用いて, 系 4.3 を書き直す.

系 4.7. $\mu \in P$ および $w \in W$ に対し

$$[\mathbb{C}(-\mu) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_w] = \sum_{J \in \mathcal{A}|_{q=0}(w \circ w^{-1}; (i_1, \dots, i_r))} (-1)^{n(J)} [\mathcal{L}_{(w \circ \text{end}(J))^{-1}}(-w \circ \text{wt}(J))]$$

が成り立つ.

以下, 筆者が得た結果を説明する. 以下, t_μ の reduced expression $t_\mu = s_{i_r} \cdots s_{i_2} s_{i_1} (\pi^\vee)^{-1}$ を “適切に” とって固定する (取り方についての説明は省略する).

定理 4.8 (K.). 単射 $\Xi: \mathcal{A}|_{q=0}(u; (i_1, \dots, i_r)) \rightarrow \text{ILS}(-\mu) \times W$ であって, $\Xi(J) = (\eta, v)$ ($J \in \mathcal{A}|_{q=0}(u; (i_1, \dots, i_r))$) のとき, 次の (1), (2), (3) が成り立つものが存在する.

- (1) $\text{wt}(J) = -\text{wt}(\eta)$,
- (2) $\text{end}(J) = v$,
- (3) $n(J) = \text{pos}(\eta) + \ell(v) - \ell(\iota(\eta))$.

また, Ξ の像 $\text{Im}(\Xi)$ は, 以下の通りである.

$$\text{Im}(\Xi) = \left\{ (\eta, v) \in \text{ILS}(-\mu) \times W \mid u \xrightarrow{(-\mu, -, q=0)} \kappa(\eta), \iota(\eta) \xrightarrow{(-\mu, +, q=0)} v \right\}.$$

系 4.9 (K.). $\mu \in P$ および $w \in W$ に対し

$$\begin{aligned} & [\mathbb{C}(-\mu) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_w] \\ &= \sum_{\substack{\eta \in \text{ILS}(-\mu) \\ w \circ w^{-1} \xrightarrow{(-\mu, -, q=0)} \kappa(\eta)}} \sum_{\substack{v \in W \\ \iota(\eta) \xrightarrow{(-\mu, +, q=0)} v}} (-1)^{\text{pos}(\eta) + \ell(v) - \ell(\iota(\eta))} [\mathcal{L}_{(w \circ v)^{-1}}(w \circ \text{wt}(\eta))] \end{aligned}$$

が成り立つ.

5 Yip 公式

$\lambda \in P$ に対し, $E_\lambda(q, t)$ を非対称 Macdonald 多項式とする. M. Yip 氏は, $\mu, \lambda \in P$ に対し

$$e^\mu E_\lambda(q, t) = \sum_{\nu \in P} c_{\mu, \lambda}^\nu E_\nu(q, t)$$

という形の等式を考察した ([Y, Corollary 4.1]). このような等式を, 本稿では Yip 公式と呼ぶことにする. なお, 各 $\nu, \mu, \lambda \in P$ に対し, $c_{\mu, \lambda}' \in \mathbb{Q}(q, t)$ は q, t を不定元とする有理式である. とくに $q = t = 0$ と特殊化するとき, $c_{\mu, \lambda}'$ は整数である. 本節では, 前節の系 4.9 を用いて, $q = t = 0$ と特殊化した Yip 公式の, interpolated LS パスによる記述を試みる.

定義 5.1 ([LS, §4]). $\nu \in P^+$ とする. 写像 $\chi_\nu : K_H(G/B) \rightarrow \mathbb{Z}[P]$ を, G/B 上の連接層 $\mathcal{M}$ に対し

$$\chi_\nu([\mathcal{M}]) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{ch} H^i(G/B, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(-\nu))$$

で定める. χ_ν を (ν で twist された) **Euler 指標** という.

注意 5.2. $\nu = 0 \in P^+$ のとき, χ_ν は [M, §2] で定められている χ_B と一致する.

[M, Theorem 2.1] を用いることで, 以下の等式が示される.

命題 5.3. (1) $\nu \in P^+$, $\mu \in P$ および $w \in W$ に対し, $\chi_\nu([\mathbb{C}(-\mu) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_w]) = \overline{e^\mu E_{w\nu}(0, 0)}$ が成り立つ.

(2) $\nu \in P^+$, $w \in W$, $\xi \in P$ とする. $\xi + \nu \in P^+$ のとき, $\chi_\nu([\mathcal{L}_w(-\xi)]) = \overline{E_{w(\xi+\nu)}(0, 0)}$ が成り立つ.

ここで, $\mathbb{Z}[P]$ 上の対合 $\overline{\cdot}$ は, 各 $\xi \in P$ に対し $e^\xi := e^{-\xi}$ と定め, これを $\mathbb{Z}$ -線形に拡張したものである.

系 4.9 の等式において, 両辺の ν で twist された Euler 指標をとり, 命題 5.3 を適用すると, 以下の系が得られる. これは, $q = t = 0$ と特殊化した Yip 公式にほかならない.

系 5.4 (K.). $\nu \in P^+$, $\mu \in P$, $w \in W$ とする. $w_\circ w^{-1} \xrightarrow{(-\mu, -, q=0)} \kappa(\eta)$ を満たすすべての $\eta \in \operatorname{ILS}(-\mu)$ に対して $-w_\circ \operatorname{wt}(\eta) + \nu \in P^+$ が成立するとき

$$\begin{aligned} & e^\mu E_{w\nu}(0, 0) \\ = & \sum_{\substack{\eta \in \operatorname{ILS}(-\mu) \\ w_\circ w^{-1} \xrightarrow{(-\mu, -, q=0)} \kappa(\eta)}} \sum_{\substack{v \in W \\ \kappa(\eta) \xrightarrow{(-\mu, +, q=0)} v}} (-1)^{\operatorname{pos}(\eta) + \ell(v) - \ell(\iota(\eta))} E_{v^{-1}(-\operatorname{wt}(\eta) + w_\circ \nu)}(0, 0) \end{aligned}$$

が成り立つ.

謝辞

RIMS 共同研究「表現論とその組合せ論的側面」にて貴重な講演の機会を頂き, ありがとうございました. また, 本研究において, 多くの助言をくださった内藤聡先生, 佐垣大輔先生に感謝申し上げます.

参考文献

- [LNSSS] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals II. Alcove model, path model, and $P = X$, Int. Math Res. Not. **2017** (2017), 4259–4319.
- [LP] C. Lenart and A. Postnikov, Affine Weyl groups in K -theory and representation theory, Int. Math Res. Not. **2007** (2007), Art. ID rnm038, 65.
- [LS] P. Littelmann and C. S. Seshadri, A Pieri-Chevalley type formula for $K(G/B)$ and standard monomial theory, in “Studies in memory of Issai Schur” (Chevaleret/Rehovot, 2000), 155–176, Progr. Math., vol. 210, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.
- [M] O. Mathieu, Positivity of some intersections in $K_0(G/B)$, J. Pure Appl. Algebra **152** (2000), 231–243.
- [Y] M. Yip, A Littlewood-Richardson rule for Macdonald polynomials, Math. Z. **272** (2012), no. 3-4, 1259–1290.