

余次元 1 実解析的葉層構造のトポロジー

東大 理 稲葉尚志

§1 序.

簡単の爲に、全てを orientable category の中で考えることにする。また foliation とはいえ、全て余次元 1 の foliation のことを指す。

さて、 C^∞ 級 foliation は、ふつうの C^∞ 級 foliation にくらべるとさまざまな特徴的性質を備えているが、その中で我々の注目したいのは次の三つである。

- $C^\infty 1)$ null homotopic な closed transverse curve をもたない。
- $C^\infty 2)$ leaf の両側での holonomy 的挙動が同じである。
- $C^\infty 3)$ flat leaf の holonomy 群は自明である。

本稿では、これら 3 つの性質を使って、 C^∞ 級 foliation の構造と underlying manifold の topological な性質との間の関係を調べる。

この分野の創始者は A. Haefliger であり、彼は $C^\infty 1)$ を証明し

た。その後20年間近く進展がなかったが、最近 J. Plante - W. Thurston [7], S. Goodman [1], C. Lamoreux [4] 等によって新結果が出された。本稿で述べるのは、それらの拡張であるから、彼等の論文が最も重要な参考文献となろう。

§2. 定理の statement

有限生成群 G が non-exponential growth をもつとは、 G の有限生成集合 S に関する(語の)長さ関数 $l_S: G \rightarrow \mathbb{Z}^+$ に対し、growth function $g_S: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ を $g_S(n) = \text{cardinality of } \{x \in G \mid l_S(x) \leq n\}$ で定義したとき、 $\forall A > 0, \forall a > 1$ に対し、ある n が存在して $g_S(n) < Aa^n$ となるときにいう。

定理1. M を閉 C^∞ 多様体で $\pi_1(M)$ が non-exponential growth をもち、 $H^1(M; \mathbb{R}) = 0$ であるものとするならば、 M 上には、 C^∞ 級 foliation は存在し得ない。

定理2. M を3次元の閉 C^∞ 多様体で $\pi_1(M)$ が non-exponential growth をもつものとする。このとき、

i) M 上に C^∞ 級 foliation が存在すれば、 M は $S^1 \times S^2$ か、 S^1 上の T^2 bundle (の total space) かである。

ii) i) の foliation が non-proper leaf をもっていれば、 M は T^2 上

の S^1 bundle が M_{-1} である。(但し $M_{-1} \equiv T^2 \times I / \sim$, $(x, 0) \sim (-x, 1)$ for $\forall x \in T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$)

iii) M 上に C^∞ 級 foliation が存在すれば、その任意の leaf の holonomy 群は、rank 2 以下の free abelian 群になる。更に、実際に rank 2 の holonomy 群をもつ leaf があれば、 M は T^3 が M_{-1} でなければならぬ。

定理 3. M を閉 C^∞ 多様体で $\pi_1(M)$ が abelian なるものとする。

$\mathcal{F}$ を M 上の C^∞ 級 foliation、 L を $\mathcal{F}$ の leaf とする。

i) L が closed transverse curve と交わるならば、 $\text{corank } i_*^L \geq 1$.

ii) L の閉包が L 以外の non-compact leaf を含むならば、
 $\text{corank } i_*^L \geq 2$.

但し、 $i^L: L \rightarrow M$ は inclusion, $\text{corank } i_*^L$ は、 $i_*^L: H_1(L; \mathbb{R}) \rightarrow H_1(M; \mathbb{R})$ の cokernel の rank のことである。

§3. 定理 1 の証明の概略

M を定理 1 の仮定を満たす多様体とする。 M 上に C^∞ foliation $\mathcal{F}$ が存在したとして矛盾を導く。

補題 3.1. $\mathcal{F}$ は 1 枚以上有限枚の compact leaf をもつ。

証明. 無限枚あれば、non-isolated compact leaf が存在するが、それは flat leaf であるから C^3 と Reeb の大域安定性定理により

$H^1(M; \mathbb{R}) \neq 0$ となり矛盾。1枚もなければ C^1 と Plante, Tischler 等の結果から再び $H^1(M; \mathbb{R}) \neq 0$ となって矛盾する。Q.E.D.

M から全ての compact leaves を抜き去ったときの連結成分を $V_1, V_2, \dots, V_p$ とする。 $\pi(M)$ が non-exponential growth であることと、Plante [5] を使えば、各 V_i 上に holonomy invariant measure μ_i が存在することがわかる。更に μ_i 達は、 $H^1(\overline{V_i}; \mathbb{R})$ の non-zero elements Φ_i を定める。 ($i=1, 2, \dots, p$)

補題 3.2. $\overline{V_i} \cap \overline{V_j} \neq \emptyset$ ($i \neq j$) のとき、 $\Phi_i|_{\overline{V_i} \cap \overline{V_j}}$ と $\Phi_j|_{\overline{V_i} \cap \overline{V_j}}$ は $H^1(\overline{V_i} \cap \overline{V_j}; \mathbb{R})$ の中で一次従属である。

証明. $\overline{V_i} \cap \overline{V_j}$ は一枚の compact leaf である。本質的には C^2 により証明されるが、具体的には、その compact leaf の holonomy 群が abelian のときには、Plante-Thurston に従い、non-abelian のときには、Hector の結果 [3] を用いて証明する。Q.E.D.

補題 3.2. と Mayor-Vietoris の完全系列によって、 $H^1(M; \mathbb{R}) \neq 0$ となるから矛盾。よって全ての場合に矛盾を生じたから、定理が証明されたことになる。

注) Plante-Thurston が、 $\pi(M)$ exponential growth の場合には、 $H^1(M; \mathbb{R}) = 0$ でも C^ω 級 foliation が存在するような M の例を挙げているので、定理 1 のこれ以上の一般化は望めない。

§4. 定理2の証明の概略

M を、 $\pi(M)$ が non-exponential growth をもつような、向き付け可能な閉3次元多様体とする。 $\mathcal{F}$ をその上の orientable な C^ω 級 foliation とする。

補題4.1. $\mathcal{F}$ と concordant な transversely- C^ω foliation $\mathcal{F}'$ で、Reeb component を一個も持たないものが存在する。

証明. $\mathcal{F}$ に Reeb component があると、 $C^\omega(2)$ により、それを concordance の範囲内で、消し去ることが出来る (modification along the transverse simple closed curve の逆操作)。これを有限回行なうことにより、Reeb component は全て消される。Q.E.D.

補題4.2. $\mathcal{F}'$ の各 leaf は、 S^2 か T^2 か $\mathbb{R}^2$ か $S^1 \times \mathbb{R}$ かである。

証明. $\mathcal{F}'$ は Reeb component を持たないから、Novikov により、各 leaf $L \in \mathcal{F}'$ に対し、 $i_{\#}^L: \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(M)$ は injective。 $\pi_1(M)$ が non-exponential growth であつたから、 $\pi_1(L)$ も non-exponential growth となる。基本群が non-exponential growth になるような2次元 orientable 多様体は上述の4つに限る。Q.E.D.

補題4.3. $\mathcal{F}'$ は almost without holonomy である。

証明. 補題4.2.により、 $S^1 \times \mathbb{R}$ と diffeo な leaf が holonomy を持たないことを示せばよいが、やや複雑なのでここでは省略する。Q.E.D.

$\mathcal{F}'$ がもし S^2 を leaf に持つば Reeb の大域安定性定理により、

$M = S^1 \times S^2$ となる。また全この leaf が T^2 であれば、 M は S^1 上の T^2 bundle になる。そこで以下 $\mathcal{F}$ は compact leaves を 高々有限枚しか持っていないと仮定する。 M から compact leaves を全て抜き去った後の連結成分を $V_1, V_2, \dots, V_p$ とすると、これらは境界つき多様体の内部である。これらに境界をつけ足したものを $\hat{V}_1, \hat{V}_2, \dots, \hat{V}_p$ と書く。各 $\hat{V}_i$ の内部の leaves は全て $\mathbb{R}^2$ であるか全て $S^1 \times \mathbb{R}$ である。このような foliations は、Rosenberg-Roussarie, Chatelet-Rosenberg, Hector によって、位相共役を除いて完全に分類されている。即ち、

補題 4.4. (plane foliation, cylinder foliation の分類定理) $(V, \mathcal{F})$ を、orientable 3次元多様体上の orientable C^2 foliation で、 ∂V の各連結成分は compact leaf であり、 $\text{int} V$ に属する leaf は、全て $\mathbb{R}^2$ であるか全て $S^1 \times \mathbb{R}$ であるとする。この時 $(V, \mathcal{F})$ は次の 6 types のどれかに位相共役である。

I) $(T^3, dx + \alpha dy + \beta dz)$ 但 $1, \alpha, \beta$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立。

II) $(S^1 \times D^2, \text{Reeb component})$

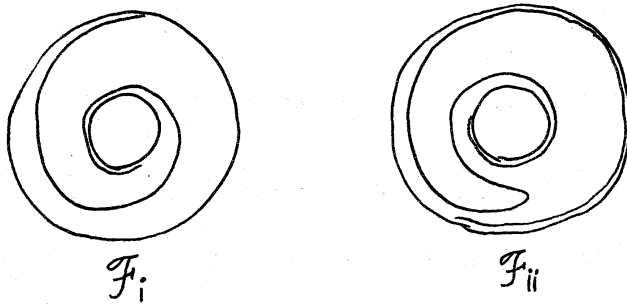
III) $(T^2 \times I, \mathcal{F}_{\varepsilon, \alpha}) = (S^1 \times I \times I, \mathcal{F}_{\varepsilon} \times I) /_{(\theta, s, 0) \sim (\theta + \alpha, s, 1)}, \forall \theta \in S^1, \forall s \in I$
但 $\varepsilon = i$ または ii , α は無理数。

IV) $(T^2 \times S^1 \text{ bundle}, T^2 \text{ の linear irrational line foliation の pull back})$

V) $(\text{twisted } I \text{ bundle over Klein bottle}, \exists^1 \text{ standard cylinder foliation})$

VI) $(T^2 \times I, \mathcal{F}_{\varepsilon, 0}) = (S^1 \times I \times I, \mathcal{F}_{\varepsilon} \times I) /_{(\theta, s, 0) \sim (\theta, s, 1)}, \forall \theta, \forall s$

ここで $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_{ii}$ とは、下図の foliation :



定理を証明するには、補題 4.4. に出てくる 6 種類の foliation を、 C^2 に注意しつつ、はり合わせてあげばよい。詳細は省略する。

Q.E.D.

定理 2 の証明のなかから、 $\mathcal{F}$ の leaf として^現われ得る 2 次元多様体は、補題 4.2. の 4 つから高々可算個の disk を抜いたものであることがわかる。特に、

系 4.5. 閉 2 次元多様体 M 上の C^∞ 級 foliation $\mathcal{F}$ が、genus 2 以上の leaf を持っているならば、 $\pi_1(M)$ は、exponential growth である。

§5. 定理 3 の証明の概略

一般に foliation $(M, \mathcal{F})$ が与えられたとき、homotopy secant という概念を Lamoreux が定義した。

定義 5.1. $\mathcal{F}$ の x_0 における homotopy secant $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ とは、 $\pi_1(M, x_0)$ の元で、 x_0 を通り、 $\mathcal{F}$ に transverse な closed curve で

あらわされ (orientation を込めた意味で) るもの全体のなす集合のことである。

$\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ は半群であることが容易に分かる。また、 $\mathcal{F}$ が C^0 級であれば C^1 により、 $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ は単位元を持たない。

定義 5.2. S を単位元を持たない半群とする。 S の元 s が infinitely divisible とは、任意の自然数 N に対して S の N 個の元 $s_1, s_2, \dots, s_N$ が存在して $s = s_1 s_2 \dots s_N$ となるときにいう。

次の補題の証明は容易である。

補題 5.3. τ を x_0 を通る oriented closed transversal とする。 τ が L_{x_0} と無限個の点で交わるならば、 $[\tau] \in \Pi S(x_0, \mathcal{F})$ は、infinitely divisible. (但し L_{x_0} は、 x_0 を通る leaf を表わす)

補題 5.4.
$$\left. \begin{array}{l} \alpha \in i_{\#}^{L_{x_0}} \pi_1(L_{x_0}, x_0) \\ \beta \in \Pi S(x_0, \mathcal{F}) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha * \beta \in \Pi S(x_0, \mathcal{F})$$

さて定理の証明に入ろう。 $\pi(M)$ は abelian とし、群演算を加法的に表わすことにする。 $\Pi S(x_0, \mathcal{F})$ は単位元を持たない半群であったから、明らかに torsion element を持たない。そこで

$q: \pi(M) \longrightarrow \pi(M) / \text{torsion} \left(\stackrel{\text{同視}}{=} \mathbb{Z}^n \right)$ とし、 $p: \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow S^{n-1}$ を $p(x) \equiv \frac{x}{|x|}$ とする。 $q|_{\Pi S(x_0, \mathcal{F})}$ は injective である。

補題 5.5. S を単位元を持たない $\mathbb{Z}^n$ の部分半群とすると、 $\mathbb{R}^n$ のある元 a が存在して $S \subset \{x \in \mathbb{Z}^n \mid (a, x) \geq 0\}$. 但し $(,)$ は内積。

補題 5.6. S を上述のものとする。もし $a \in \mathbb{Z}^n$ が存在して、

$S \subset \{x \in \mathbb{Z}^n \mid (a, x) > 0\}$ ならば、 S の全ての元は、infinitely divisible でない。

証明は容易である。

補題 5.7. $\pi S(x_0, \mathcal{F}) \neq \emptyset \Rightarrow p_{\mathcal{F}} i_{\#} \pi(L, x_0) \subset \overline{p_{\mathcal{F}} \pi S(x_0, \mathcal{F})}$.

証明. $\alpha \in i_{\#} \pi(L, x_0)$, $\beta \in \pi S(x_0, \mathcal{F})$ とする。補題 5.4. により任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して、 $n\alpha + \beta \in \pi S(x_0, \mathcal{F})$ 。ゆえに、

$$p_{\mathcal{F}}(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{\mathcal{F}}(n\alpha + \beta) \in \overline{p_{\mathcal{F}} \pi S(x_0, \mathcal{F})} \quad \text{Q.E.D.}$$

定理 3 の i) を証明する。corank $i_{\#} = 0$ とせよ。すると、

$p_{\mathcal{F}} i_{\#} \pi(L)$ は S^{n-1} の中で dense になる。よって、上の補題から

$$S^{n-1} = \overline{p_{\mathcal{F}} i_{\#} \pi(L)} = \overline{p_{\mathcal{F}} \pi S(x_0, \mathcal{F})}$$

となるが、これは補題 5.5. に反している。

Q.E.D.

補題 5.8. $i_{\#} \pi(L, x_0) \cap \pi S(x_0, \mathcal{F}) = \emptyset$

証明. $\gamma \in i_{\#} \pi(L, x_0) \cap \pi S(x_0, \mathcal{F})$ とする。 $-\gamma \in i_{\#} \pi(L, x_0)$

と、 $\gamma \in \pi S(x_0, \mathcal{F})$ に対して補題 5.4. を使えば、

$$0 = (-\gamma) + \gamma \in \pi S(x_0, \mathcal{F})$$

となり、C(1) に矛盾する。

Q.E.D.

補題 5.9. L の閉包 $\overline{L}$ が L 以外の non-compact leaf L' を含むならば、 $\pi S(x_0, \mathcal{F})$ は infinitely divisible な元をもつ。

証明. L' は noncompact だから、 L' を通る closed transverse curve τ が存在する。 τ は必然的に L と無限個の点で交わるから補題

5.3.により結論が従う。

Q.E.D.

さて、定理3の ii) を証明しよう。 $\text{corank } i_* = 1$ とせよ。すると、容易にわかるように、ある $a \in \mathbb{Z}^n$ が存在して、

$$\partial \overline{\text{pgi}_\# \pi(L, x_0)} = S^{n-1} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid (a, x) = 0\}.$$

これと補題5.6, 5.8 を合わせると、 $\pi S(x_0, \mathcal{F})$ の全ての元は、infinitely divisible でないことになる。しかしこれは、補題5.9 に矛盾している。従って証明された。 Q.E.D.

参考文献

- [1] S. Goodman ; On the structure of foliated 3-manifolds separated by a compact leaf, Inv. Math. 39 (1977), 213-221.
- [2] G. Hector ; Feuilletages en cylindres, Spring Lecture Note 597 (1977).
- [3] G. Hector ; Classification cohomologiques des germes de feuilletages, preprint
- [4] C. Lamoreux ; Sur quelques phénomènes de captage, Ann. Inst. Fourier 23 (1973), 229-243.
- [5] J. F. Plante ; Foliations with measure preserving holonomy, Ann. Math 102 (1975) 327-361.
- [6] H. Rosenberg and R. Roussarie ; Topological equivalence of Reeb foliations, Topology 9 (1970), 231-242.
- [7] J. F. Plante and W. Thurston ; Polynomial growth in holonomy groups of foliations, Comm. Math. Helv. 51 (1976), 327-361.