

Thermal Spectrum and Uniformly Accelerated Observers in Spacetime with Boundary

東北大・理 大西浩次、高木伸

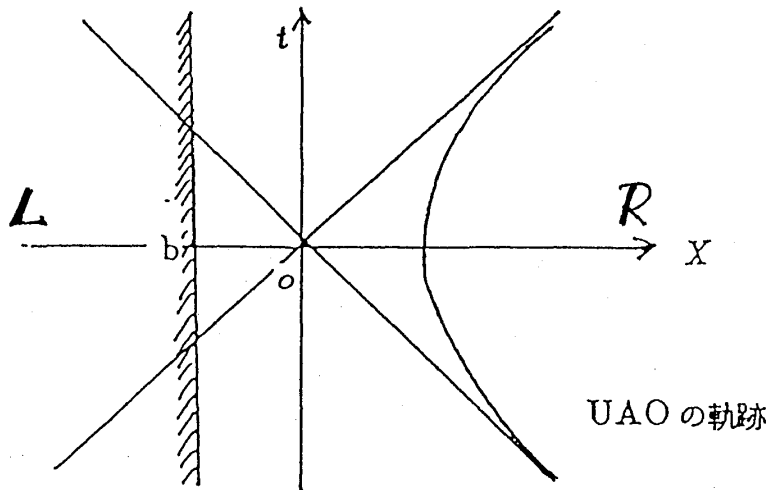
1 Introduction

Minkowski 時空を一様加速運動する観測者 (Uniformly Accelerated Observers) (以下 UAO と略す) は、Minkowski 真空状態を、加速度 a に比例する温度 $T = \hbar a / 2\pi c$ を持つ熱浴のように見る。[1] 具体的に言うと、場と線形に相互作用している内部自由度を持つ粒子 (model detector) が加速度 a で一様加速運動したとき、内部準位間の励起確率 ("response" $F(\omega)$) は、その detector が温度 T の熱浴中にある場合と同じ形になる。ここで、 $F(\omega)$ は detector の世界線にそった場の 2 点相関関数のフーリエ変換であり、 ω は、detector の準位間のエネルギーである。

ところで、UAO の軌跡は、Minkowski 時空 $x \equiv (t, X, \vec{Y})$; $\vec{Y} \equiv (y, z)$ として、固有時 τ をつかって、

$$\begin{cases} t(\tau) = \frac{1}{a} \sinh a\tau \\ X(\tau) = \frac{1}{a} \cosh a\tau \end{cases} \quad (1)$$

という双曲線をえがく。軌跡の漸近線は、UAO にとっての Horizon であり、領域 R と領域 L は、因果的に離れている。即ち、領域 R にいる UAO は、時空全領域の情報を知ることはできない。



この事が、量子論にどの様に反映するかということは、興味深いことである。この帰結の一つとして、Minkowski 真空状態を UAO が、加速度に比例する温度を持つ熱浴中のように見る。

このようなことは、blackhole を含む時空についても知られており [2]、これらの事は、相対論、量子論及び熱力学の間に、何らかの関連があることを示唆していると思われる。[3] この関連を調べるにあたり、単純な系である一様加速度系は、良く調べられている。

UAO の熱的性質の理由は、Thermalization Theorem によって説明できる。それによると、一様加速度系と慣性系で場の量子論を比べてみると、図の領域Rと領域Lは因果的に離れているにも関わらず、Minkowski 真空状態においては、領域Rと領域Lに相関があり、領域Lが領域Rにとって熱浴的な役割を担っている。この Thermalization Theorem の結果、 $F(\omega)$ が、KMS 条件を満たすことが分かる。このことは、UAO が、まさしく熱平衡状態になることを意味する。ただし、 $F(\omega)$ が、KMS 条件を満たすからといって、spectrum が、Planck 分布に成るとは限らない [4]。

ここで、この熱的性質に対する領域Lの役割をより詳しく見るために、領域Lが無いような場合を調べてみることは興味がある。[5] [6] 例えば、領域Lを図のように横切る boundary を作り、物理的に、領域Lの自由度をなくすことを行った場合、この熱的性質がどのように変わるのだろうか。以上の視点から、Rindler-wedge の原点 (点 o) からの距離 b に boundary のある Minkowski 時空で response がどの様に振舞うかを調べた。その結果、 $F(\omega)$ を boundary が無い場合の $F_M(\omega)$ と boundary の効果を表わす項 $F_b(\omega)$ の和で書くと、観測時間 (detector を作動させる時間) 無限大の極限では、

$$\lim_{b \rightarrow \pm 0} F_b(\omega) \propto \delta(\omega) \quad (2)$$

と成ることをみつけた。このことを、response に対する場の各波数成分の寄与を調べてみることで、右向きの mode と左向きの mode の間の相関を明らかにして、異なった波数の寄与の干渉と言うことで解釈できることを示した。この結果は時空の次元によらず成立する。また観測時間を有限にすることで、boundary 効果の観測可能性と Thermality の回復を示すことが出来る。

はじめに、boundary の無い場合について、Thermalization Theorem と KMS 条件について説明し、何故、有限温度系と考えられるか、簡単に説明する。次に、boundary 効果について調べる。

2 Demonstration of Rindler Noise

内部励起準位を持つ、仮想原子を考える。これが、量子場と線形に相互作用している。このような仮想原子の事を、detector と呼ぶことにしよう。この detector の内部励起確率は、次で定義される response に比例する。

$$\mathcal{F}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' e^{-i\omega(\tau-\tau')} G^+(x(\tau), x(\tau')) \quad (3)$$

ここで $G^+(x, x') \equiv \langle O | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x') | O \rangle$ は、positive frequency Wightman 関数で

ある。ここで、以下の都合上、時間変数として、 $\Delta\tau \equiv \tau - \tau'$, $\bar{\tau} \equiv \frac{\tau + \tau'}{2}$ として、

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\tau} F(\omega, \bar{\tau}) \quad (4)$$

$$F(\omega, \bar{\tau}) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\tau e^{-i\omega\Delta\tau} G^+(\Delta\tau, \bar{\tau}) \quad (5)$$

と書ける。特に定常的な場合、(5)式は、単位時間あたりの response と定義される。この response は、場の状態と軌跡に依存する。特に、軌跡を(1)の一様加速度運動とした場合を、Rindler Noise と呼ぶ。4次元 massless scalar 場の場合、(5)は、

$$F(\omega) = \frac{\omega}{2\pi} \frac{1}{\exp((2\pi/a)\omega) - 1} \quad (6)$$

となり、温度 $T = a/2\pi$ の熱浴の中を静止している detector の response と一致する。

3 Thermalization theorem and KMS condition

一群の UAO に対する自然な量子論として、例えば、UAO の軌跡の Lorentz 変換に対して不変であることから、Boost に対するパラメーターを時間とする様な、量子論が可能である。それは、領域 R と領域 L、それぞれにいる一群の UAO にとって、独立に作られる。ところで、場 ϕ が、Minkowski 時空全域で定義される場合、それぞれ一群の UAO に対する量子論から見ると、Minkowski 真空状態は、領域 R と領域 L の状態に特殊な相関を持って、TFD と同じ構造 [7] になっている。即ち、領域 R の自由度が物理的自由度であるとすれば、領域 L の自由度は、tilde space の自由度に対応し、Minkowski 真空状態は、TFD で言うところの温度 T の真空状態に対応する。この様なことは、Thermalization theorem して知られている。(詳しくは [4] を参照) ここで、この Thermalization theorem を使って、UAO の軌跡を入れた Wightman 関数を書くと(この章では、2次元で書くが、任意の次元で、同様なことが起きる。)($\omega = |k|$ として)

$$G^+(\Delta\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dk |\varphi_k^R|^2 [(1 + n(\omega))e^{-i\omega\Delta\tau} + n(\omega)e^{i\omega\Delta\tau}] \quad (7)$$

とかける。ここで φ_k^R は、波数 k の mode の空間成分、 $n(\omega)$ は、Bose 分布関数である。これより、KMS 条件が、常に成立していることが分かる。フーリエ変換した response の形でみ

た KMS 条件は、

$$F(\omega) = e^{-\frac{\omega}{T}} F(-\omega) \quad (8)$$

であり、これは、釣合詳細の原理を表わしている。それ故、Thermalization theorem は、Rindler Noise が、KMS 条件を満たすことを保証する。すなわち、detector のアンサンブルを考えれば、この系は、熱平衡状態になることが言える。だから、UAO は、有限温度の熱浴の中にいると解釈する。ところで、KMS 条件を満たすからといって、Rindler Noise の spectrum が Planck 分布になるとは言えない。それは、一般に、 $|\varphi_k^R|^2$ が、 ω 依存性を持つからです。

4 Rindler Noise in spacetime with boundary

4 次元 massless scalar 場に於て、boundary の位置を fig 1 のように原点 o から b だけ離れたところに置くとする。この時の、Wightman 関数は、

$$G^+(x, x') = G_M(x, x') + G_b(x, x') \quad (9)$$

と書ける。ここで、 $G_M(x, x')$ は、boundary の無いときの Wightman 関数であり、

$$G_b(x, x') = G_M(X, \vec{Y}, t; -X + 2b, \vec{Y}', t') \quad (10)$$

は、boundary の効果を表わしている。一様加速度運動の軌跡を入れれば、

$$G_M(\bar{\tau}, \Delta\tau) \propto \left\{ \sinh\left(\frac{a}{2}\Delta\tau - i\epsilon\right) \right\}^{-2} \quad (11)$$

$$G_b(\bar{\tau}, \Delta\tau) \propto \left\{ A - B \cosh\left(\frac{a}{2}\Delta\tau - i\epsilon\right) \right\}^{-1} \quad (12)$$

$$\begin{cases} A \equiv (\cosh(a\bar{\tau})^2 + (ab)^2) \\ B \equiv 2ab \cosh(a\bar{\tau}) \end{cases} \quad (13)$$

となる。これより、boundary のある場合の Rindler Noise は、

$$\mathcal{F}(\omega) \equiv \mathcal{F}_M(\omega) + \mathcal{F}_b(\omega) \quad (14)$$

$$\mathcal{F}_b(\omega) = \int d\bar{\tau} \int d\Delta\tau e^{-i\omega\Delta\tau} G_b(\tau, \bar{\tau}) \quad (15)$$

$$\equiv \int d\bar{\tau} F_b(\omega, \bar{\tau}) \quad (16)$$

と書ける。 $\mathcal{F}_M(\omega)$ は、直接項であり、Boundary がない項に対応するの対し、 $\mathcal{F}_b(\omega)$ は、干渉項であり、 $b \rightarrow -\infty$ で、0 になる項で、Boundary 効果であることが分かる。また、この項は、KMS 条件を満たさず、Thermal spectrum からのずれをつくる。この、boundary 効果の b 依存性は、(15) の積分を実行することにより、

$$F_b(\omega, \bar{\tau}) = \left(\frac{a}{2\pi}\right) \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \left[\frac{1}{e^{\pm\beta\omega} + 1} \frac{\sin\left(\frac{\beta\omega}{\pi}\gamma\right)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right] \quad (17)$$

$$\gamma \equiv \cosh^{-1}\left(\left|\frac{A}{B}\right|\right) \quad (18)$$

ここで、+は、 $1 > b > 0$ の時であり、-は、 $b < 0$ の時である。ここで $b \rightarrow 0$ とすれば、

$$F_b(\omega, \bar{\tau}) \longrightarrow 2\pi\delta(\omega) \frac{1}{\cosh(a\bar{\tau})^2} \quad (19)$$

となり $\mathcal{F}_b(\omega) \propto \delta(\omega)$ と成ることが分かる。

5 More on Rindler Noise

ここで、Rindler Noise の boundary 効果 $\mathcal{F}_b$ が、boundary の位置を $b \rightarrow \pm 0$ にすると $\delta(\omega)$ になる物理的な理由を考えてみたい。そのため、Rindler Noise を、各波数ごとの寄与という形で、書いてみることにする。ここで、基本 mode を Right moving wave(RMW) と Left moving wave(LMW) の2つに分け、この2つの間の相関をはっきり判る形で行う。そして、Rindler Noise を、初めに時間積分を行った形で書く。 $x = b$ で、 $\phi = 0$ となる Dirichlet 条件を満たす基本 mode は、($k > 0$) として、

$$\begin{aligned} u_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} (e^{ik(x-b)} - e^{-ik(x-b)}) e^{i\vec{K}\vec{Y}} e^{-i\omega_k t} \\ &= \frac{e^{i\vec{K}\vec{Y}}}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} (e^{-ikb} u_k^R(x) - e^{ikb} u_k^L(x)) \end{aligned} \quad (20)$$

である。これを使い、Rindler Noise を求める。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\omega) &= \int_0^\infty dk \int_{-\infty}^\infty d\vec{K} \frac{1}{2\omega_k(2\pi)^3} (|f_k^R(\omega)|^2 + |f_k^L(\omega)|^2) \\ &\quad - \int_0^\infty dk \int_{-\infty}^\infty d\vec{K} \frac{1}{2\omega_k(2\pi)^3} ((e^{-ikb})^2 f_k^R(\omega) f_k^{L*}(\omega) + (e^{ikb})^2 f_k^{R*}(\omega) f_k^L(\omega)) \\ &= \mathcal{F}_M(\omega) + \mathcal{F}_b(\omega)\end{aligned}\tag{21}$$

ここで、Rを、 $\sigma = +1$ 、Lを $\sigma = -1$ であらわすとして、

$$f_k^\sigma(\omega) = \int_{-\infty}^\infty d\tau e^{-i\omega\tau} u_k^\sigma(x(\tau))\tag{22}$$

である。ここで、rapidity ϑ_k を導入して(22)を書いてみる。rapidity ϑ_k とは、 $\omega_k \equiv \sqrt{k^2 + \mu_{\vec{K}}^2}$ 、 $\mu_{\vec{K}}^2 = \vec{K}^2 + m^2$ として、

$$\begin{cases} k = \mu_{\vec{K}} \sinh \vartheta_k \\ \omega_k = \mu_{\vec{K}} \cosh \vartheta_k \end{cases}\tag{23}$$

で定義される。これを、使うと、

$$\begin{aligned}f_k^\sigma(\omega) &= \int d\tau e^{-i\omega\tau} e^{\sigma i \frac{k}{a} \cosh(a\tau) - i \frac{\omega_k}{a} \sinh(a\tau)} \\ &= \int d\tau e^{-i\omega\tau} e^{-i \frac{\mu_k}{a} \sinh(a\tau - \sigma \vartheta_k)} \\ &= e^{-\sigma i \omega \frac{\vartheta_k}{a}} g(\vec{K})\end{aligned}\tag{24}$$

となる。ここで、 $f_k^\sigma(\omega)$ の積分に最も寄与する時刻は、

$$a\tau - \sigma \vartheta_k \approx 0\tag{25}$$

であるが、これは、ちょうど detector の速度と波数 k の波の群速度が等しい時である。それ故、 ϑ_k は、波数 k の波と同じ速度になる時刻という意味をつけることができる。これより、直接項は次のようになる。

$$\mathcal{F}_M(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^\infty d\vec{K} |g(\vec{K})|^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{1}{2\omega_k}\tag{26}$$

直接項は、全ての波数の寄与が、全ての時刻で、加算的である。このことは、boundary のない場合、軌跡の世界線が Lorentz 不変であるために、response に最も寄与する時刻が存在し

ないことに対応する。また、積分が発散するのは、観測時間無限大についての response を見ているからであり、単位時間あたりにすれば、(6) と一致する。これに対し、boundary 項 $\mathcal{F}_b(\omega)$ は、波数 k において、特徴的な時刻 $\tau_+ = \vartheta_k, \tau_- = -\vartheta_k$ の pair による phase と、boundary の位置が原点 o からずれているための phase の 2 つの競合によって決まっている。

$$\mathcal{F}_b(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{K} |g(\vec{K})|^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{(e^{-ikb})^2 (e^{-i\frac{\omega}{a}\vartheta_k})^2}{2\omega_k} \quad (27)$$

ここで、後ろの積分は、 $b \rightarrow \pm 0$ で、 $\frac{a}{4\pi} \delta(\omega)$ となる。ここで、Rindler Noise の $b = 0$ を境にした振舞の違いをみてる。boundary 効果の次の波数 k 積分を次のように書き換える。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i(kb + \frac{\omega}{a}\vartheta_k)}}{2\omega_k} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vartheta_k \exp(-2i(\mu_{\vec{K}} b \sinh \vartheta_k + \frac{\omega}{a} \vartheta_k)) \quad (28)$$

ここで、この積分の寄与より、

(i) $b \rightarrow 0$; すべての pair の時刻の寄与が、正負に振動することで、 $\omega = 0$ 以外は打ち消しあってしまう。このため、 $\omega \neq 0$ で、boundary 効果は消える。

(ii) $b > 0$; response に寄与する時刻は $\tau_{\pm} \approx 0$ である。これを、波数の見方で、読み直せば、Rindler Noise に、low energy $k \approx 0$ が、主に寄与している。

(iii) $d < 0$; response に寄与する時刻 $\tau_{\pm} = \pm \frac{1}{a} \cosh^{-1}(|\frac{\omega}{\mu_{\vec{K}} b}|)$ がおもに効く。すなわち、特徴的波数 $\pm k$ が、Rindler Noise に寄与するということである。

すなわち、boundary 効果の現れ方は次の通りである。

1. 波数 k (RMW) と波数 $-k$ (LMW) の干渉である。これは、boundary が原点からずれていることによる幾何学的な phase と、波数と軌跡によって決まる特徴的な時刻 ϑ からでてくる phase の干渉である。

2. 波数同士の寄与が、干渉し、打ち消しあっている。そして、特に、 $b \rightarrow \pm 0$ のときは、全ての波数同士の寄与がすべて打ち消し合うことで、 $\mathcal{F}_b(\omega) \rightarrow \delta(\omega)$ となる。なお、この議論は、一般に n 次元 massive scalar 場について成立する。

6 Concluding Remarks

boundary のある時空で、boundary 効果がどの様に量子効果に現われるかを、Rindler Noise を調べることで見た。なお、boundary として、Dirichlet 条件を採ったが、Neumann 条件をとった場合の Wightman 関数は、

$$G^+(x, x') = G_M(x, x') - G_b(x, x') \quad (29)$$

である。Rindler Noise を調べるにあたって、今回観測時間無限大として扱っているが、現実の問題として、観測時間有限の場合どうなるか興味がある。これに関しては、場との相互作用の coupling constant に、switching factor を入れることで、単位時間あたりの response を定義できる。例えば、

$$\mathcal{F}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' e^{-\pi(\frac{\tau-\tau_0}{T})^2} e^{-\pi(\frac{\tau'-\tau_0}{T})^2} e^{-i\omega(\tau-\tau')} G^+(x(\tau), x(\tau')) \quad (30)$$

とすると、単位時間あたりの response は次のようになる。

$$\begin{aligned} F(\omega) &\equiv \frac{\mathcal{F}(\omega)}{T} \\ &= F_M(\omega) + \Delta F_M(\omega, T) + F_b(\omega, T, \tau_0) \end{aligned} \quad (31)$$

ここで、 T は観測時間、 τ_0 は観測の代表時刻であり、 τ_0 が大きくなるほど boundary から遠くなる。 $\Delta F_M(\omega, T)$ は、観測時間が有限の為にでてきた項であり、 $T \rightarrow \infty$ に従って、消える。 $F_b(\omega, T, \tau_0)$ は、単位時間あたりの boundary 効果である。とくに、 $\tau_0 \rightarrow \infty$ とすれば、 $F_b(\omega, T, \tau_0) \rightarrow 0$ となる。すなわち、Thermalization が回復することが示せる。

最後に、これまで、Rindler Noise という見方で、調べたが、Thermalization theorem を、 n 次元の boundary のある時空に拡張したときどの様になるか興味がある。それと、Rindler Noise との対応を調べ、"Thermal" な性質の原因について、理解を深めたい。

REFERENCES

1. W.G.Unruh, Phys.Rev D14(1976),870.
2. S.W.Hawking, Commun.Math.phys.43(1975),199,
3. J.D.Bekenstein, Physics Today January (1980)
4. S.Takagi, Prog.Theor.Phys.Supp88(1986)
5. T.D.Lee, Nucl.Phys.B264,(1986) 437
6. T.Mishima, Prog.Theor.Phys.82(1989),930
7. W.Israel, Phys.LettA57(1976),107