

数列にもとづく円周率の計算

京大数理研 一松 信

§1. 問題

円周率 π の計算法には、マチンの公式はじめ多くのよい公式が知られている。しかしたとえば教育用の練習に、10桁くらい求めるのなら、他の方法がいろいろ考えられる。

円に内接または外接する正 n 角形の周長を計算し、 n を次々に 2 倍してえられる数列の極限值として、 π の近似値を求めるのは、微分積分学の発見まで、ほとんど唯一の π の計算法であった。単に数列を次々に求めるだけでなく、それに巧妙な加速をほどこして、近似をよくする工夫は、ずいぶん大勢が試みている。

じつせいに、ただ内接、外接多角形の周ではとむだけなら、96 角形でも、アルキメデスのえた $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ くらいしかでないし、35 桁求めるには、ルドルフのやったように 2^{62} 角形までの反復がある。しかしうまく加速すれば、たとえば [5] にあるように、4 ~ 64 角形のデータから、

3.1415926534

くらい¹⁰の値が出せる。建部賢弘(1664-1739)は、正 2^{10} 角形までのデータから、小数点以下41桁正しい π の近似値を求めている([2]参照; [3]にも記述あり)。

これらの方法を、現代流に解釈し直すことを主眼としたのであるが、結果的には、これらの方法は、 π の級数の形で表現される誤差の主要項を π ごとくに消してゆく同知の算法(たとえば[4], 算法12.4)の応用であることがわかった¹⁰で、理論的にはとくに新しいことはない。事実上¹¹[1], [3]の紹介にすぎない。しかしこの種の実験なら、電卓でも可能であり、初等教育の教材の一つとして考えられると思う。

なおあわせて数値積分による π の計算にも言及する。

§2. 計算公式

便宜上半径1の円に外接および内接する正 n 角形の一辺を $2a, 2b$; 正 $2n$ 角形の一辺を $2a', 2b'$ とすれば、容易に

$$(1) \quad \begin{aligned} a' &= (\sqrt{1+a^2} - 1)/a, & b &= a/\sqrt{1+a^2} \\ b'^2 &= (1 - \sqrt{1-b^2})/2 \end{aligned}$$

がえられる。これは、三角関数の半角公式からもえられるし、また初等幾何学的な考察からも示される。——たとえば図から、 $\overline{AP} : \overline{AT} = \overline{OA} : (\overline{OA} + \overline{OT})$; $\overline{AH} \cdot \overline{OT} = \overline{OA} \cdot \overline{AT}$

からはじめの2つの式がでるし、

$$\overline{CM}^2 = \overline{CN} \cdot \overline{CO} = (\overline{CH}/2) \cdot \overline{CO}$$

から最後の式がでる。

a, b 両方とも使うときは、

$a_1 = 1$ ($n=4$) からはじめて、順次

$$(2) \quad a_{m+1} = (\sqrt{1+a_m^2} - 1)/a_m$$

$$b_m = a_m / \sqrt{1+a_m^2}$$

により、順次 $2^{m+1}a_m, 2^{m+1}b_m$ の列を作る。 b のみ有的时候には、 $b^2=s$ の形の列にして、 $s_1 = 0.5$ ($n=4$) からはじめて、 $s_{m+1} = (1 - \sqrt{1-s_m})/2$ により順次 $4^{m+1}s_m$ の列を作る。もちろんこのままでは桁落ちが生ずるから、

$$(3) \quad a_{m+1} = a_m / (1 + \sqrt{1+a_m^2})$$

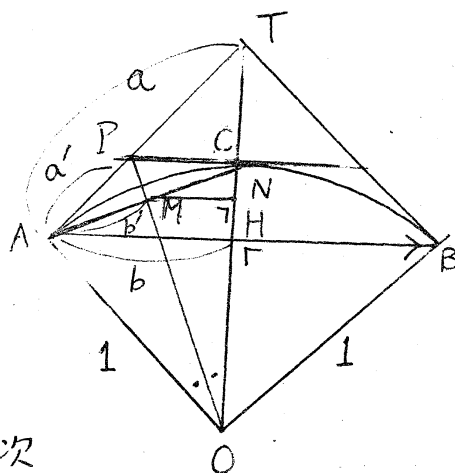
$$s_{m+1} = s_m / 2(1 + \sqrt{1-s_m})$$

と変形して計算する。 a_m, s_m があまり小さくなると、平方根の引き数の情報落ちが生ずるので、テイラー展開により、

$$(4) \quad a_{m+1} = \frac{a_m}{2} \left[1 - \frac{1}{4} a_m^2 + \frac{1}{8} a_m^4 - \dots \right]$$

の形で計算し、 $\sqrt{1+a_m^2}$ は、あらかじめ $1+a_m a_{m+1}$ として計算するほうが賢明である(そうすれば平方根の計算も不要になる)。

なお[3]には村松茂靖(赤穂義士の一人村松喜兵衛の義父)



が 2^{15} 角形までの同長から円周率を21桁出した(ただし誤差 10^{-8}) ことが紹介されている。彼の計算は二十数桁の多倍長計算で桁落ちをおさえる方式 ([3] の公式 (5)) で、とくに桁落ちをおさえるための工夫はしていないようである。

§3. 結果と加速

TOSBAC 3400 (仮教部 37ビット) の単長計算によっても、 2^{20} 角形までの反復で 3.1415926535 がえられる。

加速の一つの方法は、外接、内接多角形の周が

$$A = \pi + \frac{\pi^3}{3n^2} + \frac{2\pi^5}{15n^4} + \dots = n \tan \frac{\pi}{n}$$

$$B = \pi - \frac{\pi^3}{6n^2} + \frac{\pi^5}{120n^4} - \dots = n \sin \frac{\pi}{n}$$

であることを使い、 A, B を 1:2 の重みで平均して

$$C = \frac{A+2B}{3} = \pi + \frac{\pi^5}{20n^4} + \dots$$

を作ることである。その上で、 C の誤差が、 n が倍になるとほぼ $1/16$ になることを使って、1:16 の重みで平均し、これをくりかえしてゆく。~~加速を2度行うと~~ この加速を2度行なうと、正64角形までの結果だけで、3.1415926535 がえられる。
(別表参照)。

表 1. a

辺数	外接 A	内接 B	$C = (A + 2B) / 3$
4	4.00000 00000	2.8284271247	3.2189514165
8	3.3137084990	3.0614674590	3.1455478057
16	3.1825978781	3.1214451523	3.1418292942
32	3.1517249074	3.1365484906	3.1416072962
64	3.1441183852	3.1403311570	3.1415935664

表 1. b C による加速値 (3.14 を略す)

3.14 +

06542316

15813934 15961103

15924963 15926725 15926591

15926511 15926535 15926536 15926536

表 1. c A のみによる加速値

3.0849446653

3.1388943378 3.1424909826

3.1414339172 3.1416032225 3.1415891311

3.1415828778 3.1415928085 3.1415926433 3.1415926570

表 1. d B のみによる加速値

3.1391475704

3.1414377167 3.1415903931

3.1415829367 3.1415926180 3.1415926533

3.1415920458 3.1415926531 3.1415926536 3.1415926536

外接図のみによる加速値では、オーダーが1つ低く、64まででは8桁しかでない。ただし128角形の値まで使えば3.1415926536 ができる。

[2] によると、建部賢弘は、内接多角形の周長の2乗の系列 $\sigma_m = 4^{m+1} s_m$ に、つぎのような加速をほどこしている。まず $\sigma_{m+1} - \sigma_m$ を作ると、隣り同士の比 $(\sigma_{m+2} - \sigma_{m+1}) / (\sigma_{m+1} - \sigma_m)$ は $1/4$ に近づく。もし正確にこの比が $1/4$ ならば、 σ_m の極限値を σ とすると

$$\frac{\sigma_{m+2} - \sigma_{m+1}}{\sigma_{m+1} - \sigma_m} + \frac{\sigma_{m+3} - \sigma_{m+2}}{\sigma_{m+1} - \sigma_m} + \cdots + \frac{\sigma_{k+1} - \sigma_k}{\sigma_{m+1} - \sigma_m} = \frac{\sigma_{k+1} - \sigma_{m+1}}{\sigma_{m+1} - \sigma_m}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{k-m}} \rightarrow \frac{1}{3} \quad (k \rightarrow \infty)$$

から、 $(\sigma - \sigma_{m+1}) / (\sigma_{m+1} - \sigma_m) = 1/3$, すなわち

$$(5) \quad \sigma = \sigma_{m+1} + \frac{1}{3}(\sigma_{m+1} - \sigma_m) = \frac{4}{3}\sigma_{m+1} - \frac{1}{3}\sigma_m$$

である。これは σ_{m+1} と σ_m とを $4:-1$ の重みで平均したもの、である。

$$\sigma'_m = (5) \text{ の右辺}$$

とおく。 $\sigma'_{m+1} - \sigma'_m$ については、同様の比が $1/4^2 = 1/16$ に近づくので、同様にして

$$(6) \quad \sigma''_m = \sigma'_{m+1} + \frac{1}{15}(\sigma'_{m+1} - \sigma'_m)$$

とする。以下順次比が $1/4^3$, $1/4^4$, ... に近づくので、これを可能な限り反復する。ここで比の極限値は、実験の事実として計算を進めているが、このことは、つぎのようにして、

裏づけられる。すなわち ([4] 定理 12.4 参照),

$$A(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_{k-1} y^{k-1} + R_k(y)$$

$$|R_k(y)| < C_k y^k, \quad y > 0$$

(必ずしもこの級数は、収束しなくともよい、つまり漸近展開でもよい) ならば, $(m \geq n)$

$$A_{m,0} = A(x^m y_0), \quad A_{m,n+1} = \frac{A_{m,n} - x^{n+1} A_{m,n-1}}{1 - x^{n+1}}$$

と書いた列は, n がますます早く a_0 に収束する。じつは

$$A_{m,n} = a_0 + (-1)^n a_{n+1} x^{-n(n+1)/2} (x^m y_0)^{n+1} + O((x^m y_0)^{n+2})$$

である。

いまの例では, $\sigma_m = 2^m \sin^2(\pi/2^m)$ は, $y = (1/2^m)^2$ に対して, この形であり, $m \in \mathbb{N}$ かつ $x = 1/4$ としたことに相当するから, 順次の加速値の比は $1/4, 1/4^2, 1/4^3, \dots$ に近づき, 上記の加速で, つぎつぎに主要項が消えてゆく。係数を評価すると, $A_{n,n}$ の誤差は, ほぼ $2^{-n(n+1)}$ となる。番号がずれていることを考慮に入れると, 内外接の円の平均から始めれば, 正 2^n 角形までで $(n+1)(n+2)$ ビット ($n=10$ なら 132 ビット) 分は求められるはずなので, 40 桁くらいはこれでだせる。

表 1 は単長 (仮数部 37 ビット) で求めたものであるが, 倍長 (仮数部 74 ビット) で求めた結果を表 2 に示す。た

だし使用した計算機 (TOSBAC 3400) のF書式は、11桁しか精度がなく、D書式ではみづらいいので、専用の印刷プログラム (毎回10倍して整数部をとる方式) を自家用に作り、表2はそれによった。(1列に印刷したのを、切ってはりかえてある)。20桁しか印刷しなかったが、たぶん最後の値は、末位のビット近くまで正しくとれているはずである。

この計算は四則、平方根など基本的な演算だけからなり、130ビットくらいでも、10回の反復で求められるから、4倍長システムの検査用として、実用価値があるのではないかと考える。

§4. 数値積分による計算

答に π を含むような積分は、はるはだ多いから、数値積分で、その近似値を求めることもできるはずである。しかしこのとき、積分と積分公式の選択が重要である。

もっとも直接的なのは

$$(7) \quad \pi = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

であるが、 $x=1$ が特異点 ($|f'(x)|=\infty$) であるため、

ACCELERATION

(平均値はもとより)

4	外 接 内 接 平均	2	3	4	5	6	7
4	4.00000000000000000000 2.82842712474619009760 3.21895141649746006506	3.14065423154946672475 3.14158150010275391488 3.14159248963883330746 3.14159265106589837270 3.14159265355050291592 3.14159265358917939348	3.14159621865121652107 3.14159266407591444067 3.14159265362823273088 3.14159265358994108328 3.14159265358979381376	3.14159265013640344428 3.14159265358726143006 3.14159265358979021995 3.14159265353979326623	3.14159265359063470277 3.14159265358979339257 3.14159265358979326849	3.14159265358979318712 3.14159265358979326846	3.14159265353979626846
8	3.31370849898476039041 3.06146745892071817382 3.14554780560873224602						
16	3.18259787807452311058 3.12144515225805228557 3.14182939419687756057						
32	3.15172490742925609847 3.13654849054593926381 3.14160729617371154203						
64	3.14411833524590426274 3.14033115695475291231 3.14159356638513669579						
128	3.14222362994245684538 3.14127725093277286806 3.14159271060266752717						
256	3.14175036916896645910 3.14151380114430107632 3.14159265715252237058						

収束がはるはだ悪い。じつさにやってみると、シン普森
公式により、17分点で 3.13439 ---, 1025分点で 3.1415786--
くらいにしかならない。積分域を $1/2$ までとし

$$(8) \quad \pi = 6 \int_0^1 \left[\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} x \right] dx$$

とすると、65分点のシン普森公式で 3.141592653 まで求
められる。

(7) の端の特異点を消したり、変換したりする工夫も興味
深い。数値積分によるならば

$$(9) \quad \pi = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

をシン普森公式によるのがずっと早い。17分点で
3.1415926535 まででる。(9)は、たとえば[6]に示され
ているように、特性関数の零点が、被積分関数の極を打消し
ている特異な例だから、 π の計算にはよくても、数値積分の
例には不適切である。またシン普森公式の誤差が刻み長の
6乗(小っつのように4乗でなく)に比例して減少するので、
10桁くらいはすぐにでるが、20桁、30桁となると、容易では
ない。

π 自身ではないが、 $\sqrt{\pi}$ を求めるには

$$(10) \quad \sqrt{\pi} = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

を利用し、台形公式で求めるのが早いようである。刻み幅

0.5 で $x=7$ まで計算すると, 17桁正しく求められる. しかもこのとき, e^{-x^2} の値は, $e^{-h^2}=a$ の値さえ求めれば, あとは漸化式で $a^4=a \times a^3$, $a^9=a^4 \times a^5$, ... を順次作ってゆけばよい.

π^2 , π^4 など直接に求めるには,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

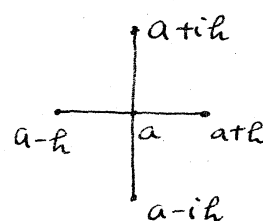
など=加速をばどこするのも, 手軽な方法である.

§5. 複素分点をもつ積分公式

Čebyšev の積分公式は, $n=8$ および $n \geq 10$ のとき, 複素分点をもつ. しかし複積分関数が解析的なら, それでも使えるはずである.

[7] に 複素 4点 (正しくは 5点) 公式
がでてくる.

$$\int_{a-h}^{a+h} f(t) dt = \frac{h}{15} [24 f(a)$$



$$+ 4[f(a+h) + f(a-h)] - [f(a+ih) + f(a-ih)]$$

$$+ h f^{(6)} \cdot (2h)^6 / 168 \cdot 6! \quad \text{累積誤差 } h^6$$

このまねをして 6点 (正しくは 7点) 公式を作ることか
ができる.

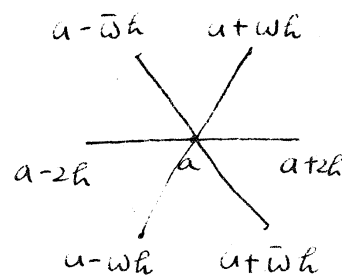
$$\int_{a-2h}^{a+2h} f(t) dt = \frac{2h}{315} [540 f(a)$$

$$+71 [f(a+h) + f(a-h)]$$

$$-(13+7\sqrt{3}i) [f(a+\omega h) + f(a-\omega h)]$$

$$-(13-7\sqrt{3}i) [f(a+\bar{\omega}h) + f(a-\bar{\omega}h)]]$$

$$-h f^{(8)}(4h)^8 / 9! \cdot 4^7 \quad \text{累積誤差 } h^8$$



$$\omega = 1 + \sqrt{3}i$$

これを $\int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2} = \pi$ に応用してみた結果を下記に示す。

ただしこのプログラムは、複素数計算ではなく、複積分関数の実部と虚部（の分子と分母）を別々の文関数に書き、すべて実数計算で、実数部のみを計算した。虚数部は互いにうすけ（あう）。計算は $[0, 1]$ を何区間かに分け（じっさいはプログラムの都合上 6点公式では $n/4$ 個、他は $n/2$ 個）、そのおののの小区間に上記の公式を使い、それを合計した。

表 3

$1/h=n$	4点	6点	SIMPSON (比較)
4	3.1416068375	3.1408969408	3.1415686274
8	3.1415927138	3.1415905153	3.1415925624
16	3.1415926543	3.1415926534	3.1415926511
32	3.1415926535	3.1415926536	3.1415926535

被積分関数の特異点 $\pm i$ が近すぎるせいか、誤差のへり方は、理論どおり $O(n^p)$ の形であるので、これに加速してもうまくない。6点公式によると、 $n=16$ で4桁であるが、この公式は複雑で、係数も大きく、实用価値は疑問である。

何よりも、複素分点を有する積分公式を特に使う意義、利点か、私にはまだまったくわからない。——

§6. むすび

以上はまだ思いつき程度にすぎず、せいぜいシステムのテスト用にしかならなかったが、このへんに、数値解析の演習問題がたくさんありそうである。計算式の比較・選択にあたっては、たとえば10桁正しく求めるのに要する時間と、所要桁数が増えたときの時間の小えちとは、区別して考える必要があるだろうし、 π を10桁出すのに、どの方法がもっとも時間が少ないか、まだはっきりしない。

Exeter (イギリス) での第2回国際数学教育会議 (1972年7月) の折に、アメリカの Grossman が、(7) と (9) との収束の早さの差が、数値計算教育のよい材料であると論じていた。 π の計算は、高校以下の計算教育のよい話題の一つとして、一つの試論をのべておきたい。

文 献

- [1] 一松 信, 教室に計算機をもちこもう. 第2部 3, 4
— 円周率 π の計算. 数学セミナー 1972年5月号
76-80 ; 6月号 48-52.
- [2] 藤原松三郎, 明治前日本数学史, 第二卷, 岩波
1956. — 第3章 建部賢弘.
- [3] 森口繁一, アルゴリズム歩-1. 円理論追試,
数学セミナー, 1964年4月号 16-21.
- [4] P. Henrici, Elements of Numerical Analysis, Wiley, 1964.
- [5] H. S. Wilf, Advances in numerical quadrature, — Mathematical
Methods for Digital Computers, II, 1967, Wiley, 133-144.
- [6] H. Takahasi & M. Mori, Error estimation in the numerical
integration of analytic functions, Report of the Computer
Centre, Univ. of Tokyo, 3 (1970), 41-108.
- [7] M. Abramowitz - I. A. Stegun ed., Handbook of Mathematical
Functions with formulas, graphs, and mathematical tables,
National Bureau of Standards, A.M.S. 55 (1964), (Dover 版の
廉価版もある) — §25.4.27, p.887.