

反行形連分数とその応用

国際短大 田村 純一

この稿では,

$$b_0 + \frac{m_1}{b_1} + \frac{m_2}{b_2} + \frac{m_3}{b_3} + \cdots + \frac{m_n}{b_n} + (\theta_{n+1})$$

$$(b_i, m_j \in \mathbb{Z}, i=0, 1, 2, \cdots; j=1, 2, \cdots)$$

の形の‘長さ’が有限または無限の‘連分数’に関する結果を述べる.

この形の‘連分数’を以後, 反行形連分数 (RCF) と呼び, 通常
reverse continued fraction
の連分数に対応する用語をそのまま用いることにする. 但し

上の RCF は,

$$b_0 + \frac{m_1 + \frac{b_2}{m_2 + \frac{b_3}{m_3 + \cdots + \frac{m_n + (\theta_{n+1})}{b_n}}}}{b_1}$$

を意味するものと考える.

これはまた、一種の級数であり、

$$b_0 + \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{b_1 b_2 \cdots b_i} + \left(\frac{\theta_n}{b_1 b_2 \cdots b_n} \right)$$

と書くこともできる。特に、^{自然数} b_i を与えて、実数をこの形の
(有限または無限)級数に表示する方法など、既に、この type
の級数について、Cantor, Galambos 等が考えている。(cf. [2], [5])
Sierpinski等は、 m_j を与えたとき、上の形に実数を表示する
algorithm を、或る方法で与えて、単位分数に関する問題、
或る級数の無理性の判定に應用している。しかし、RCF
のものについては、余り調べていない。(cf. [4], [9], [10], [11])

また、J. Shallit は、上で、 ^{$n=\infty$} $b_i = v^{2^{i-1}}$ ($i > 1$), $b_1 = v$
($v > 2$) とおいた場合に相当する無限級数の正則連分数展開
を考えて興味ある結果を出している。(cf. [8])

ここでは、Sierpinskiとは別の流儀で、

- (i) admissible な RCF の特徴付け、
- (ii) 有理数、無理数の RCF の特徴付け、
無理数に対応する RCF の収束性、
- (iii) 有理数の RCF の長さの評価；

特に、 $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, $(a, b) = 1$ に対し、

$k = k(a, b) = a/b$ の B-type の RCF の長さ (後述)

とおき、

$$l = l(b) = \max_{1 \leq a \leq b} k(a, b) : \text{最大の長さ},$$

$$L(b) = \# \{a; 1 \leq a \leq b, k(a, b) = a\}$$

とした時,

(iii)₁ $l(b)$ の ^{なるべく} 上及び下からの精密な評価,

(iii)₂ $L(b)$ の 上からの評価,
(下からの評価は, 意味がない)

(iv) 関数 $L(b)$ の数論的性質, 特に partition $p(n)$

の持つような congruence property

等について調べる. また応用として,

(v) 巾級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{b_1 b_2 \cdots b_n}, \quad b_j \in \mathbb{Z}$$

の有理数値 x に対する $f(x)$ の値の無理性の判定

(たとえば " $\cos \frac{1}{\sqrt{n}} \notin \mathbb{Q}$ for $n \in \mathbb{N}$ 等を含む.)

また特に,

(vi) Diophantus 方程式

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad (n > 1)$$

の解の構成 (Erdős = Straus の予想)

についても述べる. この Erdős = Straus の '古い' 予想は, 多

くの挑戦がなされているにもかかわらず, 未だに, 解決され

ていない. (cf. [1], [3], [9], [12], [13], [14])

ここでも, この予想は, まだ完全には解けないが, 殆ど解けそうなことも示す.

§.0 記号

$[x] = x$ の整数部分; $[]$ Gauss の記号

$\langle x \rangle = x - [x]$; x の小数部分

$^*[x] = -[-x]$ star integer part of x ; $\pm$ の整数

$^*\langle x \rangle = x - ^*[x] = -\langle -x \rangle$ star fractional part of x

ただし, 上で $x \in \mathbb{R}$, また

$I = [0, 1) = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x < 1\}$, $-I = \{x; -x \in I\}$

の記号を, 以後用いる. さらに

$$T(x) = ^*[x^{-1}]x - 1 \quad (0 \neq x \in \mathbb{R})$$

$$T^n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_n, \quad T^0 = 1_{\mathbb{R}}; \text{恒等写像 } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

また, $(m_1, m_2, \dots) = M \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ に対して, fixして考える

$$T_j(x) = ^*[m_j \cdot T_{j-1}(x)^{-1}] T_{j-1}(x) - m_j \quad (j \geq 2),$$

$$T_1(x) = ^*[m_1 x^{-1}]x - m_1, \quad T_0 = 1_{\mathbb{R}}$$

とする. ただし上で, $T_i(x) \neq 0$ ($x \in I$, $i = 0, 1, \dots, j-1$)

としなければならないのは当然である.

§1 RCF展開の定義

1

$$x < -1 \Rightarrow T(x) = -1, \quad *[x^{-}] = 0$$

$$-1 \leq x < 0 \text{ or } 0 < x \Rightarrow *[x^{-}] \neq 0$$

特に,

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq x < T(x) \leq 0$$

$$\text{従って 帰納的に } \overbrace{T^{k-1}(x) \neq 0 \text{ なる}} \quad -1 \leq x < T^{k-1}(x) < T^k(x) \leq 0$$

$$(k > 1, -1 \leq x < 0)$$

$$(\odot T(x) = *\langle x^{-} \rangle x \text{ を用い, 3)}$$

$$0 < x \Rightarrow 0 \leq T(x) < x$$

さらに特に,

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 \leq T(x) < x < 1$$

従って, $T^{k-1}(x) \neq 0$ なる帰納的に

$$0 \leq T^{k-1}(x) < T^k(x) < 1 \quad (x \in I, k > 1)$$

[証明] $T(x)$ の定義を用いれば容易にできる. //

1を用いれば, 次のようにして, 実数 x の RCF 展開が, 2種類定義されることがわかる.

(A-type の RCF 展開の algorithm):

$x \in \mathbb{R}$ に対し,

$$x = *[x] + \theta_A, \quad \theta_A = *\langle x \rangle \in -I = \{x; -x \in I\}$$

として,

$$b_j = * [T^{\bar{j}-1}(\theta_A)^{-1}] , j \in \mathbb{N} ; b_0 = *[x]$$

ただし, 当然, $T^{\bar{j}-1}(\theta_A) \neq 0$ とする.

(B-type の RCF 展開の algorithm):

$x \in \mathbb{R}$ に対し

$$x = [x] + \theta_B , \theta_B = \langle x \rangle \in I$$

として

$$b_j = * [T^{\bar{j}-1}(\theta_B)^{-1}] , j \in \mathbb{N} ; b_0 = [x]$$

ただし, $T^{\bar{j}-1}(\theta_B) \neq 0$.

このようにして, 実数 x に対して, 有限または無限整数列

$$b_0, b_1, b_2, \dots$$

に対応する. この数列は, $T^{\bar{j}-1}(\theta) \neq 0$ ($1 \leq j \leq n$)

かつ $T^n(\theta) = 0$ (ただし $\theta = \theta_A$ or θ_B) なる, 有限整数列

$$\overbrace{b_0, b_1, b_2, \dots, b_n}^{\text{長さ}}$$

となり, $T^{\bar{j}-1}(\theta) \neq 0$ for all $j \in \mathbb{N}$ なる無限数列

となる. 後で, $x \in \mathbb{Q} \iff T^{\bar{j}-1}(\theta) = 0$ for $\exists j \in \mathbb{N}$

を示すか. ここで, A-type と B-type では, '長さ' n は, 一般には異なる. たとえば,

$x = \theta = \frac{18}{25}$ なる A-type では

$n = 3$, B-type では $n = 6$; $x = \theta = \frac{9}{25}$ なる

A-type では $n = 4$, B-type では $n = 3$ となる. (特に

$x \in \mathbb{Z}$ のときは, $\theta_A = \theta_B = 0$ で, 既に $T^0(\theta) = 0$ となるから, 長さは, 0 であると考えよう)

また, A-type, B-type 何れにしても,

$$x = b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} + T^n(\theta)$$

がなりたつ. この証明は, $T(x)$ の定義より,

$$x = \frac{1 + T(x)}{*[x^{-1}]} \quad \text{for } T^0(x) \neq 0$$

であるから, この式の x のところに, $T(x)$, $T^2(x)$, $\dots$

と順次代入した式を作れば明らかである.

また, 2 の RCF 展開を一般化して,

$$M = (m_1, m_2, \dots) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \text{ に対し,}$$

もし, 数列 $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ が, $m_{j_k} \neq 0$ for all $k \in \mathbb{N}$
 であるような部分列をもつなら, $(j_1 < j_2 < \dots < j_k < \dots)$

(M-RCF 展開の algorithm):

$x \in \mathbb{R}$ に対し $\theta = \langle x \rangle$ とし,

$$T_n(\theta) = *[m_n T_{n-1}(\theta)^{-1}] T_{n-1}(\theta) - m_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$T_0(\theta) = \theta$$

とき, $b_j = *[m_j \cdot T_{j-1}(\theta)^{-1}], \quad j \in \mathbb{N}$

$$b_0 = [x]$$

とすれば,

$$T_{n-1}(\theta) = \frac{m_n + T_n(\theta)}{*[m_n \cdot T_n(\theta)^{-1}]}$$

であるから、同様にして

$$x = b_0 + \frac{m_1}{b_1} + \frac{m_2}{b_2} + \frac{m_3}{b_3} + \dots + \frac{m_n}{b_n} + T_n(\theta)$$

となる。この M -RCF 展開では、 $\theta = \langle x \rangle$ としたから B -type であるが、 A -type 即ち $\theta = *\langle x \rangle$, $b_0 = *[x]$ としても別種の RCF 展開が定義される。

以後、 $m_1 = m_2 = \dots = m_n = \dots = 1$ かつ、 $\theta = \langle x \rangle$ とした場合に対応する RCF 即ち、最初に述べた B -type の RCF についての結果を記して、 A -type の RCF さらには M -RCF に関する結果は、後で述べることにする。

§2 有理数の RCF 展開

[2] 実数 x の B -type の RCF 展開が有限な長さで終了する
 為の必要十分条件は、 x が有理数であることである。

[証明]

必要性は明らか。

十分性を言うには、 $x \in \mathbb{Q}$ とし、

$x = [x] + \theta$ とおき、 $\theta = 0$ なら長さ = 0 となる
 からよい、 $\theta \neq 0$ なら、

$$\theta = a/b, \quad a, b \in \mathbb{N}, \quad b \geq 2, \quad 0 < a < b.$$

$$(a, b) = 1$$

と仮定する。 $\zeta = \mathbb{C}$,

$$T(\theta) = * \left[\frac{b}{a} \right] \frac{a}{b} - 1 = \frac{a_1}{b}$$

とすると,

$$a_1 = * \left[\frac{b}{a} \right] \cdot a - b \in \mathbb{Z}$$

しかも, $0 \neq \theta \in I$ であるから $\square \neq \eta$

$$0 \leq T(\theta) < \theta = T^0(\theta)$$

従って,

$$a = a_0 > a_1 \geq 0$$

以下,

$$T^n(\theta) = * \left[T^{n-1}(\theta)^{-1} \right] T^{n-1}(\theta) - 1$$

$$= \frac{a_n}{b}, \quad a_n \in \mathbb{Z}$$

と仮定するから (こゝで, $(a_n, b) = 1$ である必要はない.)

$a_{n-1} \neq 0$ なら, 帰納的に

$$a > a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n \geq 0$$

$$(a_j \in \mathbb{Z}, \quad j \in \mathbb{N})$$

が示される。従って $x \in \mathbb{Q}$ なる

$$\exists k = k(a, b) = k(x); \quad T^k(\langle x \rangle) = 0$$

となり, x の $R(\zeta)$ 展開は, 有限の長さで終了する. //

B-type の

[2] の証明より, 直ちに次の系が導かれる.

[3] $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, $(a, b) = 1$ とし

$$\frac{a}{b} = b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_k}$$

(右辺は a/b の B -Type の RCF)

なら, b_k は b の約数.

[証明]

$$T^{n-1}(\langle \frac{a}{b} \rangle) = \frac{a_{n-1}}{b} \quad (a_{n-1} \in \mathbb{Z}) \quad \text{とわかる.}$$

そこで $a_{n-1} | b$ のとき, 約分が起ると

$$T^{n-1}(\langle \frac{a}{b} \rangle) = \frac{1}{c} \quad (c \in \mathbb{Z}, c | b)$$

となり,

$$T^n(\langle \frac{a}{b} \rangle) = T(\frac{1}{c}) = {}^*[c] \cdot \frac{1}{c} - 1 = 0$$

従って $k = n$,

$$b_k = [T^{k-1}(\langle \frac{a}{b} \rangle)^{-1}] = {}^*[c] = c //$$

また, [2] の証明より, $T^n(\theta) > 0$ 2. $T^n(\theta)$ は n に

2, 単調減少するから, 直ちに, 次の系が導かれる;

[4] [3] により $2 \leq b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_k$

[証明] $b_{n+1} = [T^n(\theta)^{-1}]$ より明らか.

また, [3], [4] より 明らかには,

[5] a/b の B -Type の RCF の長さ $(= k \Rightarrow l(a, b)) \leq a$

以上, 有理数の B-type の RCF 展開について述べたが,
A-type については, 先と同様にして, $\mathbb{Z} \ni x \in \mathbb{Q}$ に対し

$$T^n(\langle x \rangle) = -\frac{a_n}{b} \quad (b, a_n \in \mathbb{N}, n=0, 1, 2, \dots)$$

とおくことができて,

$$a \Rightarrow a_0 > a_1 > \dots > a_{n-1} > a_n \geq 0$$

が示される. 従って,

[6] 実数 x の A-type の RCF 展開が有限の長さで終了
 $\Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}$.

また, 特に [6] の証明より,

$$\frac{a}{b} = b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k}$$

(右辺は, A-type の RCF 展開)

としたとき,

[7] $-1 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_k, \quad b_j \in \mathbb{Z}, \quad j \in \mathbb{N}.$

[8] b_k は b の約数.

[9] $k \leq a$.

また一般の M -RCF についても,

$$(m_1, m_2, \dots) = M \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$$

に対し, $m_{i_j} \neq 0$ ($i_j \rightarrow \infty$ as $j \rightarrow \infty$) なる部分列が存在
するとき, $m_n = 0$ とする n に対しては, 初めから, M
の中から m_n を取り除いた数列 $\tilde{M}$ を考え $\tilde{M}$ -RCF を

考えられは、 $\tilde{M}$ -RCF と M -RCF は、本質的には、同じで、
 2 の $\tilde{M}$ -RCF に對し 2 は、 $x \in \mathbb{R}$ に對し $\langle x \rangle = 0$ とし、

$$T_{j-1}(\theta) = \frac{m_j + T_j(\theta)}{*[m_j \cdot T_{j-1}(\theta)^{-1}]} \quad .$$

$$\begin{aligned} T_j(\theta) &= *[m_j \cdot T_{j-1}(\theta)^{-1}] T_{j-1}(\theta) - m_j \\ &= - * \langle m_j T_{j-1}(\theta)^{-1} \rangle \cdot T_{j-1}(\theta) \end{aligned}$$

故、 $T_{j-1}(\theta) \neq 0$ かつ、

$$T_j(\theta) / T_{j-1}(\theta) \in \mathbb{I}$$

さらに、

$$T_j(\theta) = 0 \text{ \& } T_0(\theta), T_1(\theta), \dots, T_{j-1}(\theta) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow * \langle m_j T_{j-1}(\theta)^{-1} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow T_{j-1}(\theta) = \frac{m_j}{t_j} \in \mathbb{Z} \text{ for some integer } t_j.$$

となる事などを用いて、 B -Type の RCF に関する結果
 M -RCF に関する

[2] ~ [5] に相当する結果 [10] ~ [13] が証明できる。証明

の‘力’は、この場合も、 $\theta = a/b$ に對し、

$$T_n(\theta) = r_n/b, \quad r_n \in \mathbb{N}, \quad n=0,1,2,\dots$$

とあけることにある。[10] ~ [13]のうち、たとえば" [11] "については、次のようになる；

$$\boxed{11} \quad \frac{a}{b} = b_0 + \frac{m_1}{b_1} + \frac{m_2}{b_2} + \dots + \frac{m_k}{b_k}$$

$$b_j = {}^*[m_j \cdot T_{j-1} (\langle \frac{a}{b} \rangle)^{-1}] , \quad j = 1, 2, \dots$$

$$b_0 = [\frac{a}{b}] , \quad m_k \neq 0$$

としたとき、

$$b_k = m_k d \quad \& \quad d \text{ は } b \text{ の約数}$$

となる。

(注：一般の b_j ($j=1, 2, \dots, k-1$) については、

b_j は、 m_j の倍数とは限らない)

また、A-type の M-RCF についても、同様なことが証明される。以後、面倒なので、M-RCF については、あまり触れない。

§3 無理数の RCF 展開と収束性及び諸公式

$\mathbb{Q} \neq x \in \mathbb{R}$ に対し、 $\langle x \rangle = 0$ とすれば、

$$b_0 = [x], \quad b_n = {}^*[T^{n-1}(0)^{-1}] \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

であるが、ここでも [1] より、

$$1 < b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \leq \dots, \quad b_n \in \mathbb{N}$$

がわかるから、

$$b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots$$

$$= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_1 b_2 \dots b_n}$$

は、絶対収束している。 $*\langle x \rangle = 0$, $b_0 = *[x]$ とし、
A-type の RCF を考えて、

$$-1 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq \dots$$

だから、上の級数は、絶対収束する交代級数になる。そこで、
上の級数が x に収束するかどうか問題になるが、これにつ
いて次がなりたつ；

[14] 無理数 x の RCF 展開は、A-type 2つ B-type 2つ x に収束する。

[証明]

まず、

$$\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad n=2, 3, 4, \dots$$

$$p_1 = 1, \quad q_1 = b_1$$

で、整数 帰納的に、 $b_1 \sim b_n$ についての多項式 p_n, q_n を定
める。すると、帰納法により

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n}$$

が示される。

ここで, b_j ($j \in \mathbb{N}$) に整数値を代入したとき,
 整数値 p_n と q_n は, 互いに素と仮定する.

$$\text{今, } b_j = {}^*[T^{j-1}(\theta)^{-1}] \text{ , } j=1, 2, 3, \dots$$

$$\theta = \langle x \rangle \text{ または } {}^*\langle x \rangle$$

とし, $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\theta_n = \frac{1}{b_n} + \frac{1}{b_{n+1}} + \dots$$

(右辺は, 収束している)

と仮定するとき,

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \dots$$

$$= \frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{q_n} \theta_{n+1} \quad (= \theta, = \theta)$$

となる. 従って,

$$\theta_{n+1} \in I \quad \text{for } \theta = \langle x \rangle$$

$$\theta_{n+1} \in -I \quad \text{for } \theta = {}^*\langle x \rangle$$

$$q_n = b_1 b_2 \dots b_n \rightarrow \infty \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \theta$$

かわかる. //

第 n 近似分数 $\frac{p_n}{q_n}$ は, B -type では, 常に, 下からの近似,
 A -type では, 通常の連分数のように, 交互に, 上下からの
 正則

近似を与える。

また、ここで、ついでに、 $R \subset F$ の第 n 近似分数の分子、分母に関する公式等を与えておく；

$$\boxed{15} \quad p_n = 1 + \sum_{j=2}^n \prod_{k=j}^n b_k$$

$$q_n = \prod_{k=1}^n b_k$$

[証明]
$$\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \prod_{k=n}^2 \begin{pmatrix} b_k & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(右辺の $\prod_{k=n}^2$ は、右の大きい値 n から小さい値 2 まで、

順に、行列を左から右へ並べて掛けることを意味する)

より明らかである。(両辺行列式をとっても、 $\boxed{15}$ の下の式が出てくるだけで、通常の連分数のように $(p_n, q_n) = 1$ は等かれないばかりか、一般には、その模写とは言えない。しかし或る意味で (p_n, q_n) を上から評価することはできる、cf. §5 $\boxed{28}$) //

$\boxed{16}$ (通常の連分数と $R \subset F$ の近似分数の分子との関係)

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = b_n + \frac{p_{n-2}^{-1}}{b_{n-1}} + \frac{p_{n-3}^{-1}}{b_{n-2}} + \dots + \frac{p_1^{-1}}{b_2} + \frac{1}{b_1}$$

(右辺は、 $R \subset F$ でなくても、通常の連分数)

$\boxed{17}$ (通常の連分数の積と $R \subset F$ の関係)

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b_1} \right| + \left| \frac{1}{b_2} \right| + \dots + \left| \frac{1}{b_n} \right| \\
&= \frac{1}{b_1} \prod_{j=2}^n \left\{ 1 + \frac{b_j^{-1} p_{j-2}^{-1}}{b_{j-1} + \frac{p_{j-3}^{-1}}{b_{j-2} + \frac{p_{j-4}^{-1}}{\dots \dots \dots b_3 + \frac{p_1^{-1}}{b_2 + \frac{1}{b_1}}}}} \right\}
\end{aligned}$$

これ等は、かなり、下手ものの公式と言、て
よいが、証明は、 $\boxed{16}$, $\boxed{17}$ どちらにしても $\boxed{15}$ を用いてでき
る。

有限個の0を含まない 整数

M-RCF についても、たとえば、 M が 非減少列なら、
無理数 x を M-RCF 展開したものか、 x に収束する - とか
証明できる。

§4 RCF の admissibility

実数 x の RCF 展開

$$b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots$$

の部分分母 $b_j \in \mathbb{Z}$ ($j \in \mathbb{N}$) について、

A-Type $\Rightarrow -1 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$ (有限または無限)

B-Type $\Rightarrow 1 < b_1 \leq b_2 \leq \dots$ (")

かなりたったか、逆に、このような部分分母 b_j ($j \in \mathbb{N}$) を

与えたとき, RCF

$$b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots$$

or 或る実数 λ の A-type あるいは B-type の RCF 展開から得られる (即ち, admissible な) RCF かどうか問題になる. これについて追加する;

$$\boxed{18} \quad 1 < b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k, \quad b_j \in \mathbb{N} \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

$$b_0 \in \mathbb{Z}$$

$$\iff b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k} : \text{admissible RCF of type-B}$$

$$\boxed{19} \quad 1 < b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k \leq \dots, \quad b_j \in \mathbb{N} \quad (j \in \mathbb{N})$$

$$b_0 \in \mathbb{Z} \quad \& \quad \lim_{j \rightarrow \infty} b_j = \infty$$

$$\iff b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots : \text{admissible RCF of type-B}$$

$$\boxed{20} \quad -1 \geq b_1 > b_2 > \dots > b_k > \dots, \quad b_j \in \mathbb{Z}, \quad j=1, 2, \dots$$

(有限または無限整数列)

$$b_0 \in \mathbb{Z} \quad \& \quad b_j - b_{j+1} > 1$$

$$\implies b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots \text{ (有限または無限) : admissible}$$

RCF of type-A

[証明] 左へ右は, $\boxed{19}$ により.

$$(\iff) \quad b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots \text{ (無限) } \in \text{admissible RCF}$$

とすると, これは収束しているから, その値を x とすると,
 $x \notin \mathbb{Q}$. しかも $1 < b_1 \leq b_2 \leq \dots$ であることは既に述べ
 た. 従って $\lim_{j \rightarrow \infty} b_j = \infty$ を言えはよい. これは背理法で
 すぐに証明できる.

実際 $\lim_{j \rightarrow \infty} b_j \neq \infty$ とすると $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ の単調性より b_j
 は有界となり, しかも,

$$\exists N \in \mathbb{N} ; N \leq j \implies b_j = b_N (= b)$$

となることが言える.

すると,

$$\begin{aligned} x &= b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots \quad \text{無限に循環} \\ &= b_0 + \frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_{N-1}} + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_1} + \dots \\ &= b_0 + \frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_{N-1}} + \frac{1}{b-1} \end{aligned}$$

であるから x の無理性と矛盾する.

($\implies$)

b_j ($j=0, 1, 2, \dots$) が $\boxed{19}$ の上の条件をみたしている
 とすると,

$$b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots$$

は収束しているから, これを x とおくと

$$\frac{1}{b_1} < x - b_0 < \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_1} + \dots = \frac{1}{b_1 - 1} \leq 1$$

従って, $[x] = b_0$. $x - b_0 = \theta$ とおくと,
 $b_{-1} < \theta^{-1} < b_1$ 故 $^*[T^0(\theta)^{-1}] = ^*[\theta^{-1}] = b_1$

以下同様にして,

$$\left\{ x - \left(b_0 + \frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_{n-1}} \right) \right\} = \frac{\theta_n}{b_1 b_2 \dots b_{n-1}}$$

とおくと,

$$\theta_n = \frac{1}{b_n} + \frac{1}{b_{n+1}} + \dots$$

今, $^*[T^{j-1}(\theta)^{-1}] = b_j$ for $j=1, 2, \dots, n-1$
 と仮定すると,

$$\begin{aligned} T^{n-1}(\theta) &= ^*[T^{n-2}(\theta)^{-1}] T^{n-2}(\theta) - 1 \\ &= b_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{b_{n-1}} + \frac{1}{b_n} + \dots \right) - 1 \\ &= \frac{1}{b_n} + \frac{1}{b_{n+1}} + \dots = \theta_n \end{aligned}$$

であり, しかも, $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ に関する条件を用いて,

$$\frac{1}{b_{n+1}} < \theta_n^{-1} - b_n < \frac{1}{b_{n+1} - 1} \leq 1$$

が同様に示される. 従って

$$^*[\theta_n^{-1}] = ^*[T^{n-1}(\theta)] = b_n$$

が言える.

この証明で 条件 $\lim_{j \rightarrow \infty} b_j = \infty$ をはす"す"とは, できない. [18] も [19] と同様にして, 帰納法によって証明される. [20] の証明は, 多少面倒であるが, 交代級数特有の不等式

を用いて評価すれば、大体同様にしてできる。

$M-RCF$ についても, $admissibility$ の判定に際して
次の結果などが導かれる。すなわち

$$m_j \in \lim_{j \rightarrow \infty} m_j \neq 0 \text{ なる整数列として, } M = (m_1, m_2, \dots) \text{ なる } M-RCF$$

$$u_0 + \frac{m_1}{u_1} + \frac{m_2}{u_2} + \dots \quad (= x)$$

ある実数 x について $u_0 = [x]$ かつ
 について, $u_j = u_j(\langle x \rangle) = {}^*[m_j \ T_{j-1}(\langle x \rangle)]$, $j \in \mathbb{N}$

なるとき、これ $\in$ $admissible$ な $M-RCF$ と呼ぶことにす
 れば、この $M-RCF$ について、次がなりたつ；

[21] 上の $M-RCF$: $admissible$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n-1}} > p_n \text{ for all } n=2, 3, \dots$$

$$= 2; \quad p_n = p_n(\theta) = \frac{{}^*[m_n \cdot t^{-1}]}{{}^*[m_{n-1} \cdot t^{-1}]}$$

$$t = T_{n-2}(\langle x \rangle)$$

[22] $\frac{m_n}{m_{n-1}} < \frac{u_{n-1}}{u_{n-1}} \text{ for all } n=2, 3, \dots$

$\Rightarrow$ 上の $M-RCF$ は $admissible$

また、ある自然数 j が存在して、この j について、

$$\frac{m_j}{u_j} + \frac{m_{j+1}}{u_{j+1}} + \dots$$

が admissible なとき,

$$u_0 + \frac{m_1}{u_1} + \frac{m_2}{u_2} + \dots$$

は admissible at ∞ と言うことにすれば,
特に, $m_j = t^j$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) としたときに対応する $M-RCF$ についての admissibility の判定に関する結果もいろいろと導かれる. これは, 後の有理数係数の中級数 $f(x)$ の有理数値 x における値の無理性の判定法について述べるとき用いる. (§ 6 の中で, 結果のみを, 証明なしに用いる)

§ 5 RCF の長さ, 特に $\ell(b)$, $L(b)$ の評価

$a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, $(a, b) = 1$ に對し, $\frac{a}{b}$ の B -type の RCF 展開を

$$b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k}$$

としたとき, この RCF の長さ k は, 勿論 a, b の関数である. そこで, $k = k(a, b)$ と書く. ($a | b$ の時は, $k(a, b) = 0$ と考える) そこで,

$$a \equiv a' \pmod{b} \implies k(a, b) = k(a', b)$$

であるから, $b \in \text{fix}$ したとき, $k(a, b)$ の最大値は, $1 \leq a \leq b$ の範囲の a について考えるだけで十分である. そ

とて,

$$l(b) = \max_{1 \leq a \leq b} k(a, b)$$

とおいたとき, $l(b)$ についての評価式を与える; $(k(a, b))$ の正則連分級に対応するものとして depth function がありこれについては, 既にいろいろと文献があり, Euclid の algorithm の長さの上からの評価などは, Lamé の定理として知られている. (cf. [6])

$$\boxed{23} \quad [\log_2 b] \leq l(b) \leq \min_{2 \neq j \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{j} b + \sum_{i=2}^j \log_i b \right] \quad \left(\begin{array}{c} \text{これは} \\ \text{Gauss の記号} \end{array} \right)$$

[証明] $1 \leq a \leq b$, $a, b \in \mathbb{N}$ であるから $\theta = a/b$ を

B-type の RCF 展開したときの RCF の形は,

$$\theta = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{l_2 \geq 0} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{l_3 \geq 0} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{m}}_{l_m \geq 0} + \cdots$$

$l_n \geq 0 \quad (n=2, 3, \dots)$

としてよい. (cf. §2, §4)

とて,

$$k_m = \sum_{n=1}^m l_n$$

とおき,

$$\tau^{k_m}(\theta) = \theta_{k_m+1}$$

とすれば、

$$\theta_{k_{m+1}} = \underbrace{\frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{m+1}}_{l_{m+1} \square} + \underbrace{\frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{m+2}}_{l_{m+2} \square} + \dots$$

であるから、

$$\theta_{k_{m+1}} < \underbrace{\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} + \dots}_{\infty} = \frac{1}{m}$$

と、3で、前記に述べたように (cf. §2 ②の証明)

$$T_{k_m}(\theta) = \frac{a_{k_m}}{b}$$

(a_{k_m} , b は正の整数と仮定する)

とあるから

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{m} - \frac{a_{k_m}}{b} &\leq \frac{1}{m} - \left(\frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{m+1} \right) \\ &= \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{m+1} \right)^{l_{m+1}}}{1 - \frac{1}{m+1}} \\ &= \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(m+1)^{l_{m+1}}} \end{aligned}$$

従って

$$0 < 1 - \frac{m a_{k_m}}{b} \leq (m+1)^{-l_{m+1}}$$

故に $l_{m+1} > 0$ である。

$$b \geq (m+1)^{l_{m+1}}$$

(h を下から評価する分には, $m a_{k_m} / h$ が十分小さく, h が大きい)

従って,

$$\left. \begin{array}{l} l_{m+1} = 0 \\ \text{または} \\ h \geq (m+1) l_{m+1} \end{array} \right\} m = 1, 2, 3, \dots$$

が成立する, 従って

$$\begin{aligned} L(h) &= \sum_{i=2}^{\infty} l_i \\ &= \sum_{i=2}^j l_i + \sum_{i=j+1}^{\infty} l_i \\ &\leq \sum_{i=2}^j \log_i h + \sum_{i=j+1}^{\infty} l_i \end{aligned}$$

ここで,

$$\theta_{k_{j+1}} = \underbrace{\frac{1}{j+1} + \dots + \frac{1}{j+1}}_{l_{j+1} \square} + \underbrace{\frac{1}{j+2} + \dots + \frac{1}{j+2}}_{l_{j+2} \square} + \dots$$

$$= T^{k_j}(\theta)$$

$$= \frac{a_{k_j}}{h}$$

従って [5] より,

$$\sum_{i=j+1}^{\infty} l_i = k(a_{k_j}', h') \leq a_{k_j}' \leq a_{k_j}$$

但し,

$$\frac{a_{kj}}{b} = \frac{a'_{kj}}{b'}$$

$$a'_{kj}, b' \in \mathbb{N} \quad \& \quad (a'_{kj}, b') = 1$$

とした。一方

$$\begin{aligned} \frac{a_{kj}}{b} &= \underbrace{\frac{1}{j+1} + \dots + \frac{1}{j+1}}_{l_{j+1} \square} + \underbrace{\frac{1}{j+2} + \dots + \frac{1}{j+2}}_{l_{j+2} \square} + \dots \quad (\text{有限で切れる}) \\ &< \underbrace{\frac{1}{j+1} + \frac{1}{j+1} + \dots}_{\infty \square} \\ &= \frac{1}{j} \end{aligned}$$

従って,

$$a_{kj} < \frac{1}{j} b$$

故,

$$\sum_{i=j+1}^{\infty} l_i < \frac{1}{j} b$$

結局, 任意の $2 \neq j \in \mathbb{N}$ に対して

$$l(b) < \frac{1}{j} b + \sum_{i=2}^j \log_i b$$

が得られたから, [23] に於ける $l(b)$ の上からの評価が導かれる。

次に $l(b)$ を下から評価する。まず

$$\begin{aligned} \frac{b-1}{b} &= \frac{1}{2} + \frac{b-2}{b} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{b-2^2}{b} \\ &\dots \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{n \text{ 回}} + \frac{b-2^n}{b} \end{aligned}$$

であり、これは $b-2^n > 0$ である限り、以下同様は続けられるから、

$$l(b) \geq l_2 \geq \log_2 b$$

従って、[23] における $l(b)$ の下からの評価も得られた。

ここで、[23] における $l(b)$ の下からの評価は、最良である。実際 $a = 2^n - 1$, $b = 2^n$ の時、

$$\frac{a}{b} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{n \text{ 回}} \quad (\text{B-type の RCF})$$

であることは、すぐわかる。一般に約数関数 $d(b)$ の値が小さいとき、 $l(b)$ は b に比べて小さくなり、 b が素数のときには、 $l(b)$ が b と比べて大きくなることから [23] の証明から期待される。[23] の系として、直ちに、次の系 [24] が得られる；

$$[24] \quad l(b) < 2 \sqrt{b \log_2 b} (1 + o(b))$$

[証明] [23] において,

$$j = \left\lfloor \sqrt{\frac{h}{\log_2 h}} \right\rfloor + 1$$

と置いて, $\log_i h$ ($i=2, 3, \dots, j$) をすべて $\log_2 h$ に置きかえて簡単な計算をすれば,

$$l(h) < 2\sqrt{h \log_2 h} + \sqrt{\frac{h}{\log_2 h}}.$$

が得られる. //

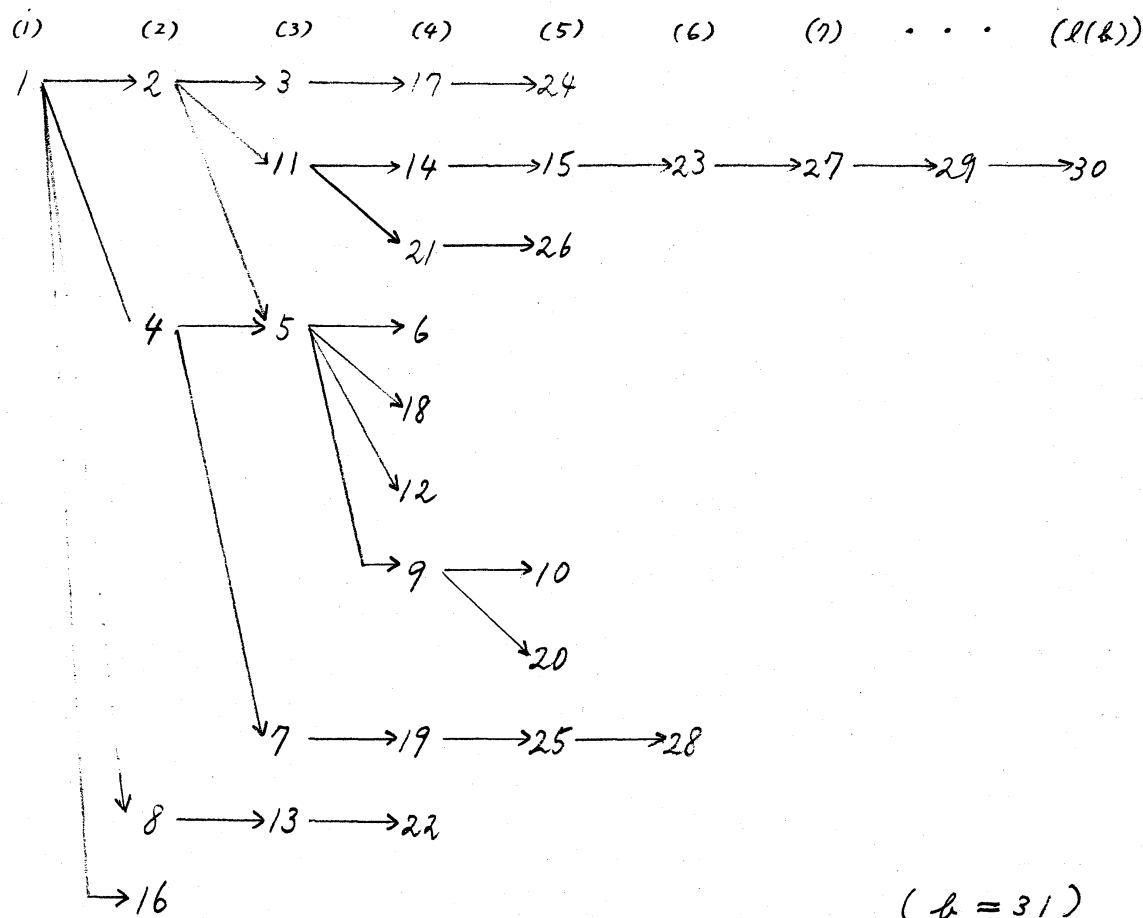
[24] の証明で, $\log$ の底をすべて 2 にしてしまうのは, もったいないようであるが, Jensen の不等式を用いて, $\log_i h$ ($i=2, 3, \dots, j$) たちを平均化しても, 評価には, 殆ど影響しない. [23] における $l(h)$ の上からの評価はもっと '精密' にできると思われる. 実際, たとえば, $h=31$ とすると,

$$\frac{(17)}{31} = \frac{1}{27} + \frac{1}{117} + \frac{1}{167} + \frac{1}{317}$$

一方

$$\frac{1}{117} + \frac{1}{167} + \frac{1}{317} = \frac{(3)}{31} \quad \text{の 'しほ'}$$

であるが, これを, $3 \rightarrow 17$ (上の RCF 展開は, 下の RCF 展開から出てくる) と書くことにして, $\frac{a}{31}$ の RCF 展開を $1 \leq a < 31$ について実行すれば, 次頁にあるような, 矢印がらなる図表が作られる (この表に関して, いいかげんな話を少しすることにする);



この表で、たとえば、20は5列目にあるから $20/31$ の RCF の長さは、5である。このような表は、 h を大きくすると、
 実際計算してみても、だんだん定形の長方形状に広がっていく
 ように思われ、 $l(h)$ の order は、 $\sqrt{h}$ くらいのように感じ
 られるが、かも知れない 上の表で、故意に、いくつかの数(分子)を除いて、

3 → 17 → 24

5 → 18

7 → 19 → 25 → 28

9 → 20

11 → 21 → 26

13 → 22

15 → 23 → 27 → 29 → 30

の様な図表を作ると, $\log_2$ 的な構造が表われて, $l(h)$ は $\log_2 h$ に近くなるようにも思われ, 実際, たとえば, $a > 1/2$ の時, $2a - h = c$ とおくと,

$$\frac{a}{h} = \frac{h+c}{2h} = \frac{1}{2} + \frac{c}{2h} \quad \therefore c \rightarrow a$$

(この矢印は, 前頁の意味)

のように, RCF (of type B) が, $\log_2$ 的な性質を持つ, ことを示す事実がいろいろとある。かなり, いいかげんな話になってしまった。参考のために, $l(h)$ の値の表を, 小さな h について示す:

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$l(h)$	0	1	2	2	3	3	5	3	4	4	4	4	6	6	6	4	5	5	7	5	7	6	8	5

$$l(31) = 9, \quad l(32) = 5, \quad l(2^n) = n \quad (n \in \mathbb{N})$$

等。

次に,

$$L(h) = \# \{ a; 1 \leq a \leq h, \quad l(a, h) = a \}$$

としたとき, $L(h)$ について, いろいろと調べる。この $L(h)$ という量は, a/h の RCF 展開について, 先に述べた, 分子 a に関する表で,

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \cdots \rightarrow L(h) \not\rightarrow L(h)+1$$

となつてゐることを示す。(証明は簡単; $h \cdot T^n(a/h) = a_n$ が, n について狭義単調減少であることを用いる。)

$L(h)$ に関する主な結果は、次のようにある；

$$\boxed{25} \quad 1 \leq L(h) \leq h \text{ の最小の素因数}$$

$$\boxed{26} \quad \limsup_{h \rightarrow \infty} L(h) / \Gamma^{-1}(h-1) \geq 1 \quad \text{即ち, 特に,}$$

$$L(h) = \Omega(\Gamma^{-1}(h))$$

$$\boxed{27} \quad h > 1 \text{ として, } \quad \nearrow \Gamma \text{ 関数の逆関数}$$

mod 2 で,

$$h \equiv 1 \Rightarrow L(h) \geq 2,$$

$$\text{otherwise} \Rightarrow L(h) = 1.$$

$h \equiv 1 \pmod{2}$ のとき,

$$h \equiv 1 \pmod{3!} \Rightarrow L(h) \geq 3,$$

$$\text{otherwise} \Rightarrow L(h) = 2.$$

$h \equiv 1 \pmod{3!}$ のとき,

$$h \equiv 1, 13 \pmod{4!} \Rightarrow L(h) \geq 4,$$

$$\text{otherwise} \Rightarrow L(h) = 3.$$

etc.

$$\boxed{27} \text{ より, } L(h) \text{ は, 下から評価しても意味がない. } \boxed{27} ?$$

出発点を mod 3 としても, 同様な結果が得られる

$$\boxed{25} \text{ の証明は,}$$

$$k(a, h) = n$$

$$\Leftrightarrow T^n(a/h) = 0 \text{ \& } T^{n-1}(a/h) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow h \cdot T^{n-1}(a/h) = a_n \text{ が } h \text{ の約数}$$

であるとして, a_n の単調性を用いればできる.

$$\boxed{26} \text{ の証明は, } a = n, \quad h = n! \cdot l + 1 \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{\frac{n!l+n}{n!l+1}}{\frac{n!}{n} \cdot l+1} = \left\lfloor \frac{1}{\frac{n!}{n} \cdot l+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{n!l+1} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{1}{\frac{n!}{n} \cdot l+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\frac{n!l+n-1}{n!l+1}}{\frac{n!}{n-1} \cdot l+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{n!}{n} \cdot l+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{\frac{n!}{n-1} \cdot l+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{n!l+1} \right\rfloor \\
&= \dots \\
&= \left\lfloor \frac{1}{\frac{n!}{n} \cdot l+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{\frac{n!}{n-1} \cdot l+1} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{1}{\frac{n!}{l} \cdot l+1} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{1}{\frac{n!}{1} \cdot l+1} \right\rfloor \\
&\qquad\qquad\qquad \text{長 } n
\end{aligned}$$

で、特に $l=1$ の場合を考えればよい。後半は、簡単に 出 3.

[27] の証明は、たとえば、 $a=4$, $b=13+24l$ ($l=0,1,2,\dots$)

と お く と、

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{\frac{16+24l}{13+24l}}{4+6l} = \left\lfloor \frac{1}{4+6l} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{13+24l} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{1}{4+6l} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\frac{15+24l}{13+24l}}{5+8l} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{4+6l} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{5+8l} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{13+24l} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{1}{4+6l} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{5+8l} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\frac{14+24l}{13+24l}}{7+12l} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{1}{4+6l} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{5+8l} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{7+12l} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{13+24l} \right\rfloor
\end{aligned}$$

であること等を、いろいろと用いればよい。

[27] における $L(b)$ の congruence properties は、単位分数に

関する Diophantus 方程式の問題; 『 $n(a) \leq n$ であるすべての自然数 n に対して, $\uparrow$ a のみに depend

$$\frac{a}{n} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{x_j}$$

の解 $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ が, $\mathbb{N}^k$ あるいは $\mathbb{Z}^k$ の範囲で, 存在するかという問題』に関係してくる. 特に, $a=4$, $k=3$, $n(a)=2$ とした場合, 解 $\in \mathbb{N}^3$ が存在するであろうというのが, Erdős - Straus の予想である. これについては, §7 で述べる. この他にも, 単位分数に関する問題は, いろいろとあり, 論文も多数ある. 文献は [3] を参照されれば, イェツル式に, いろいろと見つけられるであろう. 特に,

Sierpiński は, ここで述べた A -type の RCF から得られる交代級数に似た形に, 実数 $\in I$ を展開する独得な algorithm 初めに述べたように を定義して, 単位分数に関する問題, 無理性判定に関する問題に應用している. また, *fractions continues ascendantes* についても言及しており, B -type の RCF と同等な algorithm も定義しているが, RCF そのものについては, 余り調べていない. (cf. §7 種々の algorithms の比較)

ここで, [24] の証明 を用いて, (p_n, q_n) の評価に関する結果 [28] が導かれることを注意する. (p_n と q_n は互いに素とは限らないことは既に述べた. たとえば: $5/32$ を B -type の

$R \subset F$ に展開すると,

$$\frac{5}{32} = \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{32} = \frac{p_3}{q_3}$$

であり, [15] を用いて計算すれば, $p_3 = 5 \cdot 7 \cdot 11$, $q_3 = 2^5 \cdot 7 \cdot 11$ となる!)

[28] 整数列 $2 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k$

を与えたとし,

$$p_k = 1 + \sum_{i=2}^k \prod_{j=i}^k b_j,$$

$$q_k = \prod_{j=1}^k b_j$$

とすれば, $(p_k, q_k) < \frac{b_1 b_2 \dots b_k}{\Phi^{-1}(k)}$.

但し, $\Phi(k)$ は effective に計算できる数で, Φ^{-1} は,

$$\Phi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$k = \Phi(b) = 2 \sqrt{b \log_2 b} + \sqrt{\frac{b}{\log_2 b}}$$

で定義される単調関数 Φ の逆関数である.

(上で, Φ の増加を漸しくする分には, ^{たとえば} かまわないから, 上の $\Phi(b)$ の代わりに, $\Phi(b) = b^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\varepsilon/2 + 1}}$ ($\varepsilon > 0$) ^{十分小} とすれば, $\Phi^{-1}(k) = k^{2-\varepsilon}$ ととれるが, このときは, ε に関係する数 $p(\varepsilon)$ があって, $k \geq p(\varepsilon)$ の範囲の k についてしか

(p_k, q_k) の評価式は使えなくなる)

[証明]

$p_k/q_k = a/b$, $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$
 とすると,

$$a/b = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k}$$

は, b_j ($j=1, 2, \dots, k$) が, [28] の条件を満たすとき,

admissible な B-Type の RCF であるから, [24] の証明より,

$$k \leq l(b) < \Phi(b)$$

$\therefore \Phi^{-1}(k) < b = \frac{q_k}{(p_k, q_k)}$. これより直ちに, [28] が出る. //

2 の [28] は, (p_k, q_k) ある程度小さいことを示しているが, 一方, (p_k, q_k) は, かなり大きくなることも示される;

[29] $a, b \in \mathbb{N}$, $1 \leq a \leq b$, $(a, b) = 1$ に対し,

$$a/b = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k} = p_k/q_k,$$

$$q_k = b_1 b_2 \dots b_k$$

↖ B-Type の RCF

のとき,

(i) $a=n$, $b=n!l+1$ ($2 \leq n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$) とすると,

$$k=n \text{ で, } (p_k, q_k) = \prod_{l=2}^n \left(1 + \frac{n!}{l} l\right)$$

(ii) $a=b-c$, $b=p=$ 奇素数 $> 2^l c$, $l>1$, $c>1$

とすると $k>l$ で, $(p_k, q_k) \geq 2^l$

(等号は, $b=1+c \cdot 2^l$ のときのみ成立)

[証明]

まず (i), (ii) どちらでも $(a, b) = 1$ は明らかであるから,
 (i) は, 26 の証明で示した RCF を用いて導かれる.

(ii) は,

$$\frac{a}{b} = \underbrace{\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^1}}_{l \text{ 回}} + \frac{b - 2^l c}{p}$$

を用いて導かれる. (ここで, $l = \lfloor \log_{\frac{b}{c}} \rfloor$ ととれる) //

他方, $(p_k, q_k) = 1$ とする例も, 人工的に作れる; 実際, たとえば, $a = 2^l - 1$, $b = 2^l$ とすると $k = l$ で,
 $q_k = b$ とすることば, 23 の証明の直後で既に見た.

§6 無理性 (irrationality) の判定

この節では, 巾級数

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{b_1 b_2 \dots b_j} x^j \quad (0 \neq b_j \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N})$$

の有理数値 x に対する $f(x)$ の値の無理性の判定について述べる. まず,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{t}{u}\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{b_1 u \cdot b_2 u \cdot \dots \cdot b_j u} \\ &= \frac{t}{b_1 u} + \frac{t^2}{b_2 u} + \dots + \frac{t^j}{b_j u} + \dots \end{aligned}$$

であるから, この type の M-RCF で admissible at ∞

であるものは、無理数であるから次の [30] が得られる;

$$[30] \quad f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{b_1 \cdot b_2 \cdots b_j} x^{\bar{j}} \quad (0 \neq b_j \in \mathbb{Z}, \bar{j} \in \mathbb{N})$$

とき、 $x, u \in \mathbb{N}$ としたとき、

(i) 十分大きな数 J に對し、

$$b_j \leq b_{j+1} \quad (j \geq J) \quad \text{かつ} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} b_j = \infty \quad \text{かつ}$$

$$x \nmid b_j \quad (j \geq J)$$

$$\Rightarrow f(x/u) \notin \mathbb{Q}$$

(ii) 十分大きな数 J に對し、

$$b_{j+1} - b_j < -x \quad (j \geq J) \quad \text{かつ}$$

$$x \nmid b_j \quad (j \geq J) \Rightarrow f(x/u) \notin \mathbb{Q}$$

(iii)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{j+1}}{b_j} > x \Rightarrow f(x/u) \notin \mathbb{Q}$$

[証明]

(i) は、 B -type の RCF の admissibility at ∞ より、

(ii) は、 A -type " " " " より導かれる。

(iii) は、 $m_j = x^{\bar{j}}$ とおいたときの M - RCF の admissibility at ∞ より導かれる。

[30] の系として、特に $e^{\frac{1}{u}}$, $\sqrt{u} \sinh \sqrt{\frac{1}{u}}$, $\cosh \sqrt{u}$
 $\cos \sqrt{\frac{2}{u}}$ (特に $u = 2 \cdot \text{平方数}$ のとき $\cos \frac{1}{m}$), $\sqrt{\frac{u}{2}} \sin \sqrt{\frac{2}{u}}$ 等の

値が無理数であることは、すぐにはわかる。(e の無理性については, G. Cantor と Sierpiński が, 似たような方法で既に示している. cf. [2], [10])

また、あたりまえのことであるか、この type の十進数に微分したり積分したりすると、M-RCF の関係式がいくつでも作れる;

たとえば、

$$(1+x)\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right) \\ = 1 + \frac{2x}{1} + \frac{3x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} + \frac{5x^4}{4} + \dots \quad \text{等.}$$

§7 種々の algorithms の比較

B-type の RCF を級数にすれば、有理数の^I単位分数の和への分解

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{c_j} \quad \left(2 \leq c_j, \quad c_j | c_{j+1} \text{ かも} \right. \\ \left. c_{j+1}/c_j \text{ は単調非減少} \right)$$

を与えるか、有理数を単位分数の和(差)に分解する algorithm は、いくつかあるので、それらの違いを、具体的事例で示す;

$$(i) \quad \frac{83}{129} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{1806} \quad (\text{greedy alg. cf. [7]})$$

$$(ii) \quad \frac{83}{129} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{43} \quad (\text{Sierpiński の alg. (1) cf. [10]})$$

$$(iii) \quad \frac{83}{129} = \frac{1}{21} + \frac{1}{41} + \frac{1}{71} + \frac{1}{331} + \frac{1}{631}$$

(Sierpiński の alg. (ロ) cf. [10])

||

(B-type の RCF alg.)

$$(iv) \quad \frac{83}{129} = 1 + \frac{1}{-21} + \frac{1}{-31} + \frac{1}{-71} + \frac{1}{-431}$$

(A-type の RCF alg.)

また、単位分数への分解とはちがいが、

$$(v) \quad \frac{83}{129} = \frac{12}{41} + \frac{12^2}{71} + \frac{12^3}{5161}$$

($m_j = 2^j$ としたときの M-RCF alg.)

$$(vi) \quad \frac{83}{129} = \frac{1}{21} + \frac{2}{71} + \frac{3}{3871}$$

($m_j = j$ としたときの M-RCF alg.)

等々.

(i), (iii) を比較すると, greedy alg. の方が B-type の RCF alg. よりも効率がよいように思われるが, greedy alg. の方が B-type の RCF よりも '長く' なることもあり, '短かさ' についての優劣はつけられない. greedy alg. では, 次に表われる (部分) 分母が, 前の (部分) 分母と大ききだけについてしか制限されないのので, 数論的には, 取り扱いにくい.

たとえば: greedy alg. の方が「長」なる例として,

(vii)

$$\frac{14}{129} = \frac{1}{10} + \frac{1}{118} + \frac{1}{9514} + \frac{1}{362068270}$$

(greedy alg.)

$$\frac{14}{129} = \left\lfloor \frac{1}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{43} \right\rfloor \quad (\text{B-type RCF})$$

また, 「長」が一致する例として,

(viii)

$$\frac{7}{129} = \frac{1}{19} + \frac{1}{613} + \frac{1}{1502463} \quad (\text{greedy})$$

$$\frac{7}{129} = \left\lfloor \frac{1}{19} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{33} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{43} \right\rfloor \quad (\text{B-type})$$

さらに, 「長」のみではなくて, 表現まで完全に一致することもある;

(ix)

$$\frac{5}{129} = \left\lfloor \frac{1}{26} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{129} \right\rfloor = \frac{1}{26} + \frac{1}{26 \cdot 129} \quad (\text{B-type})$$

$$\frac{5}{129} = \frac{1}{26} + \frac{1}{26 \cdot 129} \quad (\text{greedy})$$

B-type がかなり「長」なる例として,

(x)

$$\frac{53}{129} = \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{22} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{43} \right\rfloor \quad (\text{B-type})$$

$$\frac{53}{129} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{31} + \frac{1}{3333} + \frac{1}{6665} \quad (\text{greedy})$$

§ 8 Erdős - Straus の予想について

§ 5 で既に述べたように, Erdős と Straus は, $n > 1$ のとき, Diophantus 方程式 $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \dots (*)$ は, 自然数解 $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ を必ず持つてゐることを, 予想している. (cf. [3] p. 44)

上の Diophantus 方程式 (DE(*)) は, $1 < n \leq 10^8$ については, 解をもつことが知られている, (cf. [3], [14] 等)

また, Erdős - Straus の予想は, n が素数のとき解かれるば, 成り立つことは, 容易にわかる. また, [27] より,

$n \equiv 1, 13 \pmod{24}$ 以外のときには, $L(n) \leq 3$ であるから, DE(*) は 解を持つことは容易にわかる; たとえば,

$$\begin{aligned} \frac{4}{12m+7} &= \frac{\frac{12m+8}{12m+7}}{3m+2} = \frac{1}{3m+2} + \frac{1}{12m+7} \\ &= \frac{1}{3m+2} + \frac{1}{(3m+2)(12m+7)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6m+4} + \frac{1}{6m+4} + \frac{1}{(3m+2)(12m+7)}$$

より $n \equiv 7, 19 \pmod{24}$ のときには, 'O.K.' であることがわかる. また, $n \equiv 13 \pmod{24}$ の時は, 展開を途中で止めて

$$\begin{aligned} \frac{4}{24m+13} &= \frac{1}{6m+4} + \frac{1}{8m+5} + \frac{2}{24m+13} \\ &= \frac{1}{6m+2} + \frac{1}{(6m+4)(8m+5)} + \frac{1}{(3m+2)(8m+5)(24m+13)} \end{aligned}$$

とすれば、このときも、"OK"であることがわかる。従って、

[31] $n \equiv 1 \pmod{24}$ のとき, Erdős - Straus の予想は成立。
(L. Bernstein に F. 2. 5)

この結果は、既に、別の方法によって (RCF を用いないで) 得られている。(cf. [17]) Bernstein はまた、^{その}多くの moduli について、Erdős - Straus の予想が成立することを示している。一方 W. Webb は、Selberg の篩を用いて、Erdős - Straus の予想の成立しない $1 \leq n \leq N$ の個数 (0 かも知れないが) を上から評価している。(cf. [13])

また、R. C. Vaughan は Montgomery や Bombieri の不等式を用いて、 $DE(x)$ で、分子の 4 を一般の a で置きかえた場合について、同様のことを調べている。(cf. [12])

しかし、このように、篩の方法を用いても、Erdős - Straus の予想は、おそらく、永久に解けないであろう。それよりもむしろ、Bernstein の与えたような moduli を、より多く与えて、それらが、自然数全体を cover しているかどうかを調べる方が、近道であろう。これは、また、Erdős の与えた、system of covering congruences の問題にも関連してくる。

ここでは、 $4/n$ ($n=24m+1$) の RCF 展開に近い形を利用して、多くの m に関する moduli について、 $DE(x)$ が解を持つことを示す；

[32] $n = 24m + 1$ ($m \in \mathbb{N}$) に対し, $m \equiv a_j \pmod{m_j}$

$j \in \mathbb{N}$ のとき, Erdős-Straus の予想は成立する. 但し

a_j, m_j は, 次の表で与えられる: (1) ~ (36)

a_j	m_j		a_j	m_j	
$-7j+6$	$24j-21$	(1)	$-5j+1$	$24j-5$	(19)
$-5j+4$	$24j-21$	(2)	$-j$	$24j-5$	(20)
$-9j+7$	$24j-19$	(3)	$-j$	$24j-3$	(21)
$-13j+1$	$24j-17$	(4)	$-13j+1$	$24j-2$	(22)
$-13j+3$	$24j-17$	(5)	$-j$	$24j-2$	(23)
$-13j+8$	$24j-15$	(6)	$-5j$	$24j-1$	(24)
$-17j+1$	$24j-13$	(7)	$-3j$	$24j-1$	(25)
$-17j+3$	$24j-13$	(8)	$-2j$	$24j-1$	(26)
$-15j+8$	$24j-13$	(9)	$(2j-1)(3j-1)$	$12j-5$	(27)
$-13j+6$	$24j-13$	(10)	$-6j^2$	$12j-1$	(28)
$-13j+7$	$24j-13$	(11)	$(26j-23)(15j-12)$	$60j-53$	(29)
$-2j+1$	$24j-13$	(12)	$(22j-18)(15j-11)$	$60j-49$	(30)
$-5j+2$	$24j-10$	(13)	$-(22j-15)(15j-9)$	$60j-41$	(31)
$-19j+7$	$24j-9$	(14)	$-(26j-16)(15j-8)$	$60j-37$	(32)
$-17j+1$	$24j-9$	(15)	$(2j-1)(15j-6)$	$60j-29$	(33)
$-21j+6$	$24j-7$	(16)	$(14j-4)(15j-3)$	$60j-17$	(34)
$-21j+4$	$24j-5$	(17)	$-(14j-3)(15j-2)$	$60j-13$	(35)
$-10j+2$	$24j-5$	(18)	$-2j(15j+1)$	$60j-1$	(36)

(注: (1) だけで, 無限に多くの合同式を含んでいる!)

[証明] これら (1) ~ (36) の moduli を導きだすには, かなり多量の計算を必要とするので, 一部の方針を与えるだけにします;

まず,

$$\frac{4}{24m+1} = \frac{1}{6m+1} + \frac{1}{8m+1} + \frac{1}{12m+1} + \frac{1}{24m+1}$$

であり, これが $1/x + 1/y + 1/z$ ($x, y, z \in \mathbb{N}$) に等しいとすると, $24m+1$ が素数のときを考慮して, $l = k(24m+1)$ とおくのがよい. また, $x = 6m+1$ としないで, $x = 6m+l$ とおくと, 簡単な計算より,

$$\frac{1}{y} = \frac{(4k-1)l - 6m - k}{k(24m+1)(6m+l)}$$

従って, 恒等式:

$$\frac{4}{24m+1} = \frac{1}{k(24m+1)} + \frac{1}{6m+l} + \frac{(4k-1)l - 6m - k}{k(24m+1)(6m+l)}$$

がなりたつ. そこで, 右辺の最後の項が 0 または 単位分数になる場合として,

$$\begin{aligned} (4k-1)l - 6m - k &= 0, \\ ((4k-1)l - 6m - k &= 1) \\ \left. \begin{aligned} (4k-1)l - 6m - k / k &= h^{-1}, \\ (4k-1)l - 6m - k / 24m+1 &= h^{-1}, \\ (4k-1)l - 6m - k / 6m+l &= h^{-1}, \\ (4k-1)l - 6m - k / k(24m+1) &= h^{-1}, \\ (4k-1)l - 6m - k / k(6m+l) &= h^{-1} \end{aligned} \right\} h \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

なる場合を考える.

$$((4k-1)l - 6m - k) / (24m+1)(6m+l) = h^{-1} \quad \text{など}$$

については, 解 (k, l) を, explicit に記述するのは

困難であるので、この場合などは除外してしまう)

たとえば、

$$(4l-1)l - 6m - k = 24m + 1 \quad \text{--- (★)}$$

なる場合については、これを変形して、

$$pm - ql = -l - 1, \quad p = 30, \quad q = 4l - 1$$

として、 $l = 15j - i$ ($i = 14, 13, 12, \dots, 1, 0$) の 15通りの場合のうち、 $(p, q) = 1$ となる場合について、 p/q を、正則連分教に展開して、その近似分教を用いて、自然数解 m を求めることができた。たとえば、実際、

$$l = 15j + i \quad \text{で、} \quad i = 3t + 1 \quad \text{のときは、} \quad (p, q) = 3 \quad \text{となり、}$$

$$-l - 1 = -15j - 3t - 2 \not\equiv 0 \pmod{3}$$

一方、

$$pm - ql \equiv -ql = -(4l-1)l = -(60j + 12t + 3)l \equiv 0 \pmod{3}$$

故 DE (★) は解を持たない。他方、たとえば、

$$l = 15j - 13 \quad \text{のときは、} \quad (p, q) = 1 \quad \text{で、}$$

$$\begin{aligned} p/q &= \frac{30}{4l-1} = \frac{30}{60j-53} = \frac{30}{60j-60+7} \\ &= \frac{1}{2j-2+\frac{7}{30}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2j-2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \quad (\text{通常の正則連分教!})$$

そこで,

$$\frac{1}{2j-2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{13}{26j-23}$$

(注) もし j について 2 次式にならないう時;
 $m = ahj + bj + cl + d$
 (a, b, c, d : 定数)
 の type の解に対しては, j を fix
 した場合には l を fix した場合
 も congruences を与えるので, 2 種類
 の congruences が 導かれることがある

従って, $30(26j-23) - (60j-53)13 = -1$ なる恒等式

が得られ, $DE(*)$ の解として,

$$\begin{aligned} m &= (26j-23)(l+1) + (60j-53)l \\ &= (26j-23)(15j-12) + (60j-53)l \end{aligned}$$

がとれる. これは, [32] にある (29) である. 他のものも
 同様について, 適当に場合分けをすれば, p/q が正則連分
 数に展開されて, $DE(*)$ の解 m が得られる. (上の注)

さて, [32] で与えられる m で, 自然数全体が cover
 されるかという点, それは, 問題である. というのは,
 $m \equiv 1 \pmod{*}$ なる合同式が, cover する為必要であ
 るからである. しかし, これは, 別の方法で与えられる;

[33] $n = 24m + 1$ ($m \in \mathbb{N}$) に対し, $m \equiv e \pmod{f}$

を, Erdős-Straus の予想は成立する. 但し, e, f は,
 次の表で与えられる: (37) ~

e	f	
1	5	(37)
2	7	(38)
5	11	(39)
7	13	(40)
...	...	etc

(注) この表の系統の作り方は, 証明
 の中で述べる. また, この表の
 中の congruences の中には, [32]
 に含まれるものもある.
 たとえば, $(38) \subset (4)$, $(39) \subset (11)$

[証明] $1 < n \leq 10^8$ については, Erdős-Straus の予想は, 成立しているから,

$$n = e + fg$$

$$\text{といて, } n = 24m + 1 = 24fg + (24e + 1)$$

で, $(24f, 24e + 1)$ が, 10^8 以下の素因数の倍数になる
ときは, Erdős-Straus の予想は, 成立している, そこで,

$24e + 1$ ($e = 1, 2, \dots$) について, 小さい素因数がでてく
る順に表をつくれは, [33] が得られる. たとえば, $e = 3$

として $24e + 1 = 73 = (\text{素数})$ であるから, このときは,

$f = 73$ とすればよい. たゞし $e = 3, f = 73$ は, [33]

の表では, かなり下の方にあることになる. //

[31], [32], [33] を眺めてみると Erdős-Straus の予想が,

完全に解決そうなきがししてくる. 実際, [32], [33] において

で, いくつかの 有限個の congruences を選んで, そこに表われる

moduli の G.C.M. ($= N$) を作って, $1 \sim N$ のうち, 選ば

れた congruences を満たさないものは, 非常に少ないことが,

実験的に確かめられる. そこで, 次の予想される,

[34] (予想): [32], [33] のうちの有限個の congruences

をみたす m によって, 自然数全体が cover されるであろう.

文献

[1] L. Bernstein: Zur Lösung der Diophantischen Gleichung $\frac{m}{x_1} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$, insbesondere im Fall $m=4$, J. reine angew. Math., 211 (1962), p1~10.

[2] G. Cantor: Über die einfachen Zahlensysteme, Zeitschrift für Math. und Physik XIV (1879), p121~128.

これについては, Gesammelte Abhandlungen, Springer (1980) が新しく出ているので, すぐ見つけられる.

[3] P. Erdős and R. L. Graham: Old and New Problems and Results in Combinatorial Number Theory, L'Enseignement Mathématique Univ. de Genève, Monographie N°28 (1980).

[4] G. Faber: Über die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen, Math. Ann., 60 (1905), p196~203.

[5] J. Galambos: Representations of Real Numbers by Infinite Series, Lecture Note 502, Springer (1976)

[6] R. Honsberger: Mathematical Gems II, Dolciani Math. Expositions No 1, 2; Math. Assoc. of America (1976).
これについては, 一松信氏が 数学 (30巻, 1978) に書評 (p.166~) を書かれているので, 見て. Lamé の定理のことも見られてもいい.

[7] L. Pisano (= Fibonacci): Scritti, Vol. 1,

B. Boncompagni, Rome (1857), p. 77 ~ 83. これについて
 17. Erdős - Graham の本 [3] を参照せよ。p. 30 に
 'greedy' algorithm の定義が出てくる。

[8] J. Shallit : Simple Continued Fractions for
 some Irrational Numbers, J. of Number Theory, 11
 (1979), p. 209 ~ 217.

[9] W. Sierpiński : Sur les décompositions de
 nombres rationnels en fractions primaires, Mathesis, 65
 (1956), p. 16 ~ 32.

[10] " : Sur quelques algorithmes pour
 développer les nombres réels en séries, C. R. Soc. Sci.
 Varsovie, 4 (1911), p. 56 ~ 77. (O kilku algorytmach
 dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi)

Sierpiński の論文については, Oeuvres Choisies, Tome I,
 Drukarnia Univ. Jagiellońskiego, PWN-Éditions
 Scientifiques de Pologne (1974) が、新しく手に入
 り易いので、これを見られるといい。

[11] G. Stéphanos : Sur une propriété remarquable
 des nombres incommensurables, Bull. de la Soc.
 Math. de France, 8 (1879), p. 81 ~ 83

[12] R. C. Vaughan : On a problem of Erdős, Trans

and Schinzel, *Mathematika*, 17 (1970), p. 193 ~ 198.

[13] W. Webb : On $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$,
Proc. Amer. Math. Soc., 25 (1970), p. 578 ~ 584.

[14] K. Yamamoto : On the diophantine equations
 $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, *Memoirs of the Faculty of
 Science, Kyushu Univ., Ser. A, Vol. 19, No. 1*
 (1965).