

ナヴィエ=ストークス方程式の解に対する一意性定理

(東大・理) 増田 久 弥

§ 1. はしがき. 次の方程式を考えよう.

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \text{grad}) u = \Delta u - \nabla p$$

$$\text{div } u = 0, \quad x \in G, \quad 0 < t < T$$

境界条件は,

$$(2) \quad u = 0 \quad \text{on } \partial G.$$

ここで, G は, 有界な有界超曲面の外部領域,

u は, x, t の 3-次元ベクトル値関数, p は, x, t のスカラー値関数である. 我々の問題は, 次の通りである.

“(1), (2) によって行動が規定されている静止していない非圧縮性粘性流体の流れが, G の適当な小部分をとったとき, その上で, 有限時間たつて静止することが, あらえるだろうか?” いろいろかえると, Navier-Stokes 方程式は, 有限伝播速度の現象をもつか?

上の問に対する我々の結果をあげる前に記号を導入する.

$$C_{0,s}^\infty(G) \equiv \{g = (g_1, g_2, g_3); \text{div } g = 0, g \in C^\infty(G)\};$$

$$L_s^2 (= L_s^2(G)) \equiv \text{the closure of } C_{0,s}^\infty(G) \text{ in } L^2(G);$$

P ; $L^2(G)$ から $L^2_S(G)$ の上への直交射影.

A ; $D(-P\Delta) = \{u; u \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G}), \operatorname{div} u = 0, u = 0 \text{ on } \partial G\}$

$$(-P\Delta)u \equiv -P(\Delta u)$$

存在 L^2_S の中での対称作用素 $-P\Delta$ の Friedrichs 拡大を A とする。

X ; $\mathcal{D}(A^{\frac{s}{2}})$ にグラフノルム $\|u\|_X \equiv \|A^{\frac{s}{2}}u\| + \|u\|$ を入れた B -space. ($\|\cdot\|$ は、スカラー積 $(\cdot, \cdot)$ をもつ $L^2(G)$ の中のノルム)

$H_{0,s}^1 \equiv$ the completion of $\{u \in C_0^1; \operatorname{div} u = 0\}$ in the norm of $\|\nabla u\| + \|u\|$.

さて我々の結果は、次の通りである。

定理 1

u を, (1), (2) の解で且 $H_{0,s}^1$ 値の t ($0 < t < T$) の連続関数とする。このとき, $u(x, t)$ は $G \times (0, T)$ で (零集合, 修正の後に) ∞ まで t について解析的である。

定理 2

u を定理 1 の中の条件を満たす解とする。

もし, G の部分集合 $G_1 (\neq \emptyset)$ と t_1 ($0 < t_1 < T$) で,

$u(x, t) = 0, x \in G, \text{ for } t \in (0, T)$ ならば, u は $G \times (0, T)$ 全体で 恒等的に zero である。

定義 (1), (2) の解 u とは,

$$(i) \quad u(x, t) \in L^2_{loc}(G \times (0, T))$$

$$(ii) \quad \int (u, \operatorname{grad} \omega) dt = 0 \quad \text{for } \omega \in C_0^\infty(G \times (0, T))$$

値の $C_0^\infty(G \times (0, T))$ 函数 ω に対して成立。

$$(iii) \quad \int \{ (u, \Phi_t) + (u, \Delta \Phi) + (u, u \cdot \operatorname{grad} \Phi) \} dt = 0$$

が, $\operatorname{div} \Phi = 0$ なるベクトル値の $C_0^\infty(G \times (0, T))$ 函数 Φ に対して成立する。

§2. 補題.

補題 1

$$(a) \quad \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) = H_{0,s}^1, \quad \|A^{\frac{1}{2}}u\| = \|\nabla u\|$$

for $\forall u \in \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$

(b) $E \subset G$ なる任意の E に対して, 次の如き定数 $C = C(E)$ が存在する。

$$\sup_{x \in E} |v(x)| \leq C \|v\|_X, \quad v \in X.$$

補題 2

次の如き $u(t)$ の解析的拡大 $u(z)$ が存在する ;

$u(z)$ は複素平面中の $(0, T)$ のある近傍 U の中の z の X -値正則関数であつて

$$\frac{\partial(u, q)}{\partial \bar{z}} = -(u, Aq) - ((u \cdot \text{grad})u, q),$$

$$q \in C_{0,s}^\infty, \quad z \in U$$

をみたす。

§ 3 定理の証明.

定理 1 $\Rightarrow$ 定理 2

$v(x, t) = \text{rot } u(x, t)$ とおき, (1) の両辺に対して rot を作用させると,

$$(3) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \text{rot } (u \cdot \text{grad}) u = \Delta v$$

こゝで, $v(x, t)$ は, 仮定から定理 1 にまつて, $G \times (0, T)$ の中で, x, t につき実解析的である。

仮定; $u(x, t) = 0, \quad x \in G_1$

と定理 1 により $u(x, t)$ は (x, t) につき解析的であるか

3,

$$u(x, t_1) = 0 \quad x \in G$$

又 v の定義より

$$v(x, t_1) = 0 \quad x \in G$$

をえる。

故に, (3) により

$$v_t(x, t_1) = [\Delta v - \operatorname{rot}(u \cdot \operatorname{grad} u)]_{t=t_1} = 0$$

故に,

$$(4) \quad \operatorname{rot}(u_t(x, t_1)) = 0 \quad x \in G$$

他方

$$\operatorname{div} u(x, t_1) = 0 \quad x \in G$$

より

$$(5) \quad \operatorname{div} u_t(x, t_1) = 0$$

さるに, $u(x, t) \in H_{0,s}^1$ である。補題より $u(x, t)$ は X -値解析関数したが、 $H_{0,s}^1$ -値 C^∞ -関数である。

あるから

$$(6) \quad u_t(x, t) \in H_{0,s}^1$$

(4), (5), (6) により

$$u_t(x, t_1) = 0 \quad x \in G$$

を, したがって

$$v_t(x, t_1) = 0 \quad x \in G$$

をえる。(3) を微分すると,

$$(7) \quad v_{tt} = \Delta v_t - \operatorname{rot}(u_t \cdot \operatorname{grad}) u - \operatorname{rot}(u \cdot \operatorname{grad}) u_t$$

をえるが, 右辺は, $t = t_1$ にゼロとあることがわかるから

$$(8) \quad v_{tt}(\alpha, t_1) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \operatorname{rot}(u_{tt}(\alpha, t_1)) = 0$$

(5) を微分して,

$$(9) \quad \operatorname{div} u_{tt}(\alpha, t) = 0$$

$u(\cdot, t)$ は, $H_{0,s}^1$ -値 C^∞ -函数より

$$(10) \quad u_{tt}(\alpha, t) \in H_{0,s}^1$$

(8), (9), (10) より

$$u_{tt}(\alpha, t_1) = 0$$

以下同様にして,

$$\partial_t^k u(\alpha, t) / \partial t^k = 0 \quad k=0, 1, 2, \dots$$

をえる。 $u(\alpha, t)$ は, $t \mapsto u$ は解析的であるから,

$$u(\alpha, t) = 0 \quad G \times (0, \infty)$$

をえる,

証明 7

定理 1 の証明

$$\Omega = \{(\xi, \eta) : \xi + i\eta \in U\} \quad v(\alpha, z) = \operatorname{rot}_\alpha u(\alpha, z)$$

$$u(\alpha, \xi, \eta) = u(\alpha, \xi + i\eta), \quad v(\alpha, \xi, \eta) = v(\alpha, \xi + i\eta)$$

$(\xi, \eta) \in \Omega$ とおく。(補題 2) にあてて, $u(\cdot, \xi)$, $v(\cdot, \xi)$ は, L^2 -値正則関数であるから, 任意の $\varphi \in C_0^\infty(G)$ に対し, $(u(\cdot, \xi, \eta), \varphi)$, $(v(\cdot, \xi, \eta), \varphi)$ は, ξ と η の 調和関数である;

$$(11) \quad ((u, [\partial^2/\partial \xi^2 + \partial^2/\partial \eta^2] \varphi \psi)) = 0$$

$$(12) \quad ((v, [\partial^2/\partial \xi^2 + \partial^2/\partial \eta^2] \varphi \psi)) = 0,$$

$$\varphi \in C_0^\infty(G), \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

である。 $((\cdot, \cdot))$ は, $L^2(G \times \Omega)$ の スカラー積 である。

す. $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$ であるから,

$$(u, -\Delta \varphi) = (v, \text{rot } \varphi), \quad \varphi \in C_0^\infty(G), \quad \text{と える.}$$

これは, $u \in L^2$ かつ $(u, \text{grad div } \varphi) = 0$ である。

注意すればいい。 かつ,

$$(13) \quad ((u, -\Delta \varphi \psi)) = ((v, \text{rot } \varphi \psi)),$$

$$\varphi \in C_0^\infty(G), \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega),$$

他才 $\text{rot } \varphi \in L^2$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$, 注意すれば,

(補題 2) により,

$$\partial(u, \text{rot } \varphi) / \partial \xi = (u, \Delta \text{rot } \varphi) - ((u \cdot \text{grad } u, \text{rot } \varphi)),$$

$(\xi, \eta) \in \Omega$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$ が 成立するから,

$$(14) \quad ((v, [\partial/\partial \xi + \Delta] \varphi \psi)) - ((u \cdot \text{grad } u, \text{rot } \varphi \psi)) = 0$$

$$\varphi \in C_0^\infty(G), \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

とえる。(A) と (12) 1, (B) と (11) に加えると,

$$((u, [\partial^2/\partial \xi^2 + \partial^2/\partial \eta^2 + \Delta] \varphi \psi)) + ((v, \text{rot} \varphi \psi)) = 0$$

$$((v, [\partial^2/\partial \xi^2 + \partial^2/\partial \eta^2 + \Delta + \partial/\partial \xi] \varphi \psi)) - ((u, \text{grad} u, \text{rot} \varphi \psi)) = 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(G), \psi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ とえるが,}$$

$\sum_{\text{finite}} \varphi_j \psi_j$ ($\varphi_j \in C_0^\infty(G), \psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$) は, $C_0^\infty(G \times \Omega)$ の中, $\mathcal{D}(G \times \Omega)$ の位相で dense であるから, 結局,

$$(15) \quad ((u, [\partial^2/\partial \xi^2 + \partial^2/\partial \eta^2 + \Delta] \varphi)) + ((v, \text{rot} \varphi)) = 0$$

$$(16) \quad ((v, [\partial^2/\partial \xi^2 + \partial^2/\partial \eta^2 + \Delta + \partial/\partial \xi] \varphi)) - (([u, \text{grad}] u, \text{rot} \varphi)) = 0$$

がすべて $\varphi \in C_0^\infty(G \times \Omega)$ に対して成立する。

(15), (16) から, 任意の k (正整数) に対して,

$$u \in W_{\text{loc}}^{k, 1/3}(G \times \Omega), \quad v \in W_{\text{loc}}^{k+1, 1/3}(G \times \Omega)$$

が示される。ソボレフの補題より, $u^* \in C^\infty(G \times \Omega)$, $v^* \in C^\infty(G \times \Omega)$ が存在して, 適当な零集合の訂正の後

$$\text{に, } u^*(\alpha, \xi, \eta) = u(\alpha, \xi, \eta), \quad v^*(\alpha, \xi, \eta) = v(\alpha, \xi, \eta)$$

とある。6次元ベクトル (u^*, v^*) は, 2次の非線形型

楕円型の系の解である。

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2} + \Delta u^* + \text{rot} v^* = 0$$

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial \eta^2} + \Delta v^* - (u^* \cdot \text{grad}) v^* - (v^* \cdot \text{grad}) u^* = 0$$

$$(x, \xi, \eta) \in G \times \Omega.$$

これより,

$$\operatorname{rot} (u \cdot \operatorname{grad} u) = (u \cdot \operatorname{grad}) \operatorname{rot} u - (\operatorname{rot} u \cdot \operatorname{grad}) u$$

[$\operatorname{div} u = 0$ に注意して置き換える] の関係式と (15)

(16) が示される。

故に, (u^*, v^*) は (x, ξ, η) の函数とみて, 解析的

である。ところが, $(u(\cdot, z), \varphi)$, $(v(\cdot, z), \varphi)$ は,

(補題 1) より z の解析函数であるから, 勿論,

$(u(\cdot, \xi, \eta), \varphi)$ は (ξ, η) の連続函数, 又 $(u^*(\cdot, \xi, \eta), \varphi)$ も

ξ, η の連続函数であり, $(u, \varphi) = (u^*, \varphi)$ c.e. (ξ, η)

であるから, $(u, \varphi) = (u^*, \varphi)$ が $\forall (x, t)$ の (ξ, η) に対

して成り立つ。故に $u(x, t) = u(x, t, 0) = v^*(x, t, 0)$

が c.e. $x \in G$ に対して成り立つ。 $v^*(x, t, 0)$ は,

x と t の解析函数であるから, 任意の t ($0 < t < T$) に対し

適当な修正の後に, $u(x, t)$ は, x について解析的となる

ことに, x, t についても解析的となることが示される。

である。

証明 了