

デジタル写真測量技術を応用した 岩盤崩落予測・防災・管理システムの開発

(課題番号 12555142)

平成12年度～平成14年度
科学研究費補助金（基盤研究(B)(2)）
研究成果報告書

京 都 大 学 図 書



9810057090

附 属 図 書 館

平成15年3月

研究代表者 大 西 有 三
(京都大学大学院工学研究科 教授)

デジタル写真測量技術を応用した 岩盤崩落予測・防災・管理システムの開発

(課題番号 12555142)

平成12年度～平成14年度
科学研究費補助金（基盤研究(B)(2)）
研究成果報告書

平成15年3月

研究代表者 大西 有三
(京都大学大学院工学研究科 教授)

はしがき

最近の豊浜トンネル・第二白糸トンネル坑口付近での岩盤崩落事故により、我が国の道路・鉄道に沿って危険な崖や斜面が残されていることが明らかになった。事故の後に建設省や運輸省が実施した緊急点検の結果、数百カ所に上る危険場所の抽出がされたものの、箇所が多さと対策の困難さなどから、大部分は手つかずの状態が続いている。

現在、多数の岩盤監視方法が提案されているが、もっとも有望視されているのが岩盤変位計測である。これは、岩盤崩落や落石の前兆現象として少なからず変位・変形が生じるものと考えられているためである。岩盤変位をモニタリングする技術としては、マンモス、セオドライトといった高性能測量機器や GPS、ボーリング孔埋込式の変位計が一般的であるが、それらを用いて斜面を広範囲に計測しようとする、習熟した技術と多大な手間がかかり、高い計測費用が要求される。道路斜面などを維持・管理するために変位・変形を広範囲に精度よくモニタリングする技術の開発が望まれているが、現状ではまだ開発されていないのが実状である。

本研究の目的は、上記の実状を鑑み、対象となる岩盤斜面を CCD カメラにて写真撮影するだけで高精度に多くの対象点の変位を算出する新しい計測手法を確立し、それに基づいた岩盤崩落予測・防災・管理システムを開発することである。具体的には、計測対象となる物体に標点を設置し（将来は標点を無くす予定）、CCD カメラ（本研究では市販のデジタルカメラ）を使って被写体を複数枚の写真に撮影し、航空写真測量などで利用されているステレオ写真投影の原理などを利用してその標点の 3 次元座標をほぼリアルタイムで高精度に算出する。計測である写真撮影は任意点から行われるので特別な訓練もいらず、計測の結果はコンピューター画面上に表示されるためコストがかからず簡便な計測が実行される。実用化されれば、日常的に岩盤斜面の計測が可能で、その結果を崩落予測・防災・管理に役立てることができる。

急崖からの岩盤崩落事故は過去にも生じていたが、観測にほとんど手段が講じられていない時代のことであった。今般の観測方法や解析方法の発展を考慮すると、岩盤の崩落予知・予測が単に不可能であると避けて通ることは社会的に許されなくなっている。しかし現実には、崩落の完全な予知・予測はで

きないが、崩落前には岩盤に変位が生じるため、変位を測ることによりある程度の予測が可能となっている。こうした背景および抽出された危険箇所を全て対策工事で対応することは不可能であることを考慮すれば、以下に示す本システムにより平易でかつ高精度の測定による危機管理を実施することで代替できれば、斜面の維持・管理コストはかなり低減できるものとする。本研究の特徴と期待される効果を示すと、次のようになる。

- (1) 写真はフリーハンドで行うことができる：計測に熟練技術は不要で、誰でも容易に計測できる
- (2) 多数の計測点を現場でリアルタイムに計測できる：多数典型則から変位の面的分布がわかり、対象物の3次元形状も表現できる
- (3) 高精度（mm 単位以下）で変位の3次元成分が計測できる：従来の手法では容易でなかった変位の x, y, z 成分が高精度で簡単に得られる。
- (4) 必要なハード機器は、デジタルカメラとパソコンのみ：ソフトは必要であるが、低コストで計測でき、長期間データを照合が可能である
- (5) 遠隔で計測できる：ターゲットの設置が必要でなくなれば、危険な岩盤斜面に近づいて計測することもなくなるので、安全性の面からも好ましい

上記のように、デジタルカメラを用いた精密写真測量手法による岩盤変位計測システムは画期的・独創的な特徴を持っており、実用化されれば応用範囲も広い。このシステムの開発により、建設工事における安全性を高めた上での省力化、道路斜面など国土防災上の安全性を確保できるノウハウや技術を社会に還元できるものとする。

研究組織

研究代表者： 大西有三（京都大学・工学研究科・教授）

大津宏康（京都大学・工学研究科・助教授）

西山 哲（京都大学・工学研究科・助手）

小野 徹（京都大学・工学研究科・助手）

研究経費

平成 12 年度 5,400 千円

平成 13 年度 4,600 千円

平成 14 年度 1,900 千円

研究発表

大西有三、西山哲：岩盤斜面崩落対策としてのリアルタイムモニタリング技術、地質と調査第 2 号、pp.22-27、2000

林訓裕、大西有三、大津宏康、西山哲、矢野隆夫：岩盤斜面モニタリング技術としての精密写真測量の可能性、第 2 回最近の地盤計測技術に関するシンポジウム発表論文集、pp.69-74、2000

林訓裕、西山哲、大西有三、大津宏康、中井卓巳：現場計測における写真測量手法の展望、第 35 回地盤工学研究発表会、pp.423-424、2000

中井卓巳、若林良二、渡辺紀彦、大西有三：デジタル精密写真測量による岩盤斜面の動態観測、第 30 回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集、pp.212-217、2000

中井卓巳、大西有三、大津宏康、矢野隆夫、西山哲、林訓裕：デジタル精密写真測量を利用したトンネルの変位計測について、第 21 回西日本岩盤工学シンポジウム論文集、pp.125-130、2000

大西有三、大津宏康、西山哲、矢野隆夫、足立純：コンピュータービジョンを利用した 3 次元変位計測手法の開発に関する基礎的研究について、平成 13 年度土木学会関西支部年次学術講演会論文集第 3 部門、pp.II-28-1-2、2001

Y. Ohnishi, H. Ohtsu, S. Nishiyama, N. Okada, T. Seya, Y. Yoshida, T. Nakai and M. Ryu : Application of CCD Photogrammetry System to Measurement of Tunnel Wall Movement due to Parallel Tunnel Excavation、Proceedings of The International Symposium on Modern Tunneling Science and Technology (IS-KYOTO 2001), pp.281-285, 2001

Y. Ohnishi, S. Nishiyama, T. Yano, H. Ohtsu, M. Nakamura, Y. Momiyama, T. Nakai and M. Ryu : Three-Dimensional Analysis of Rock Displacement by A digital Photogrammetric System, Proceedings of The 2001 ISRM International Symposium – 2nd Asian Rock Mechanics Symposium (ISRM 2001-2nd ARMS), pp.671-673, 2001

K. Akimoto, S. Hattori, S. Miura and Y. Ohnishi : Development of vision metrology combined with auxiliary observations for tunnel profile measurement, Proceedings of the International Symposium on Modern Science and Technology, pp.289-292, 2001

松井裕哉、大西有三、大津宏康、西山哲、矢野隆夫：地下空洞の変位計測へのデジタル画像計測法の応用、第 11 回岩の力学国内シンポジウム講演論文集、H05、2002

大西有三、西山哲：岩盤崩落と落石問題に関する現状と課題、地すべり第 39 巻第 1 号、pp.1-12、2002

西山哲、大西有三、大津宏康、矢野隆夫、緒方健治、松山裕幸：精密写真測量による斜面崩壊モニタリングシステムの研究、第 11 回岩の力学国内シンポジウム講演論文集 (CD-ROM)、I-12、2002

高橋学、大西有三、張春、長谷川裕幸、矢野隆夫、西山哲：Zoom レンズデジタルカメラ画像を利用した遠方監視モニタリングシステムの研究、第 11 回岩

の力学国内シンポジウム講演論文集 (CD-ROM)、J-08、2002

中村幾雄、大西有三、大津宏康、西山哲、矢野隆夫、島原直樹：デジタル画像計測法による斜面動態観測手法の掘削斜面への適用、第 11 回岩の力学国内シンポジウム講演論文集 (CD-ROM)、H-11、2002

Y. Ohnishi, S. Nishiyama, T. Nakai, M. Ryu, J. Matsumoto, T. Tanabe and N. Hayashizaki : Observational Construction Control for Tunnel by using Digital Precise Photogrammetry, Proceedings of 2002 ISRM Regional Symposium (3rd KOREA-JAPAN Joint Symposium) on Rock Engineering Problems and Approaches in Underground Construction, pp.464-469, 2002

目次

第1章	はじめに	1-1
	参考文献	1-18
第2章	デジタル写真測量技術の解析理論	2-1
2.1	モデルパラメータ	2-2
2.2	座標系と回転角	2-4
2.3	共線条件式の構築	2-8
2.4	系統誤差の取り扱い	2-10
2.5	共線条件式の線形化	2-16
2.6	モデル式の構築	2-23
2.7	近似値取得法の考察	2-25
2.8	第2章のまとめ	2-31
	参考文献	2-32
第3章	デジタル写真測量技術の数値解析法	3-1
3.1	基準点の存在のもとでの最小二乗解	3-2
3.2	基準点が存在しない場合の解法	3-4
3.2.1	座標軸と rank 欠損の関係	3-4
3.2.2	最小二乗解の概念	3-6
3.2.3	ベクトル空間による一般解の概念	3-10
3.2.4	擬似逆行列による解法	3-12
3.2.5	ノルム最小の最小二乗解の導出	3-14
3.3	擬似逆行列の成立条件	3-16
3.4	拘束条件の確立	3-18
3.5	擬似逆行列成立条件の検証	3-22
3.6	解析結果の管理のための制度の定義	3-25
3.7	ノルム最小の最小二乗解の再構築	3-30
3.8	第3章のまとめ	3-32
	参考文献	3-33

第4章 デジタル写真測量技術の岩盤崩落予測・防災・管理システムとしての計測手法の研究	4-1
4.1 計測作業に関する考察	4-4
4.1.1 計測作業の手順	4-4
4.1.2 計測精度向上のための計測点設置問題	4-7
4.1.3 長さ情報の付与に関する検討	4-14
4.1.4 撮影枚数および計測点数の検討	4-15
4.2 再現性の検証	4-22
4.3 地盤挙動計測のための拘束条件	4-24
4.4 第4章のまとめ	4-28
参考文献	4-29
第5章 斜面防災モニタリングシステムとしての具体的応用	5-1
5.1 斜面モニタリングシステムの概要	5-4
5.2 斜面モニタリングへの適用例	5-6
5.2.1 適用現場の特徴と計測計画	5-6
5.2.2 現場への適用結果と有用性の考察	5-13
5.3 3次元変位分布による斜面挙動評価法	5-18
5.3.1 変位ベクトル換算法	5-20
5.3.2 変位ベクトルによる斜面挙動評価	5-23
5.4 第5章まとめ	5-26
参考文献	5-26

第1章 はじめに

本報告はデジタル画像を入力とし、地山挙動を推定するための物理量である変位や歪みを出力とする計測システムを用いて、斜面災害による被害から都市機能を守るための防災モニタリングシステムの構築に関する研究をまとめたものである。

まず、本報告において解析手法として用いる“逆解析”について記述する。図 1.1 に順解析と逆解析の概念を示す [Groetsch(2002)]。十分な情報に基づいて適切に定められたプロセスに対して、入力を与えて出力を求めるのが順問題であり、逆解析は出力から入力を求める問題であると言える。このプロセスはモデルと称され、決定論的に K で与えられた場合、順解析は入力を x として出力 Kx を解く問題、逆解析は出力を y として $K^{-1}y$ から入力を解く問題であるとも言える。

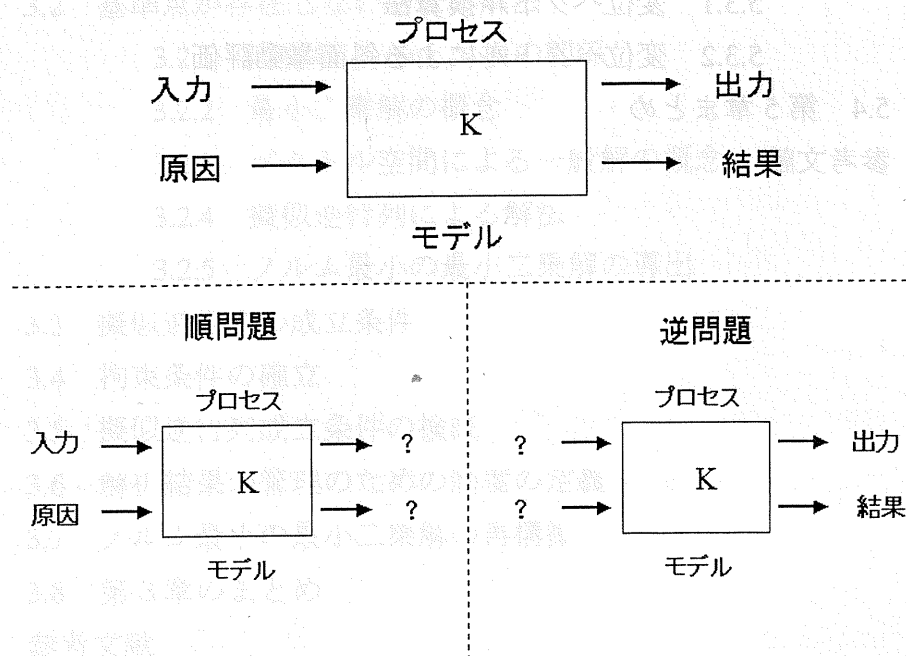


図 1.1 順解析と逆解析の概念図

プロセスが線形であれば、入力 $(c_1x_1 + c_2x_2)$ に対する出力は入力の一次結合である $K(c_1x_1 + c_2x_2)$ となる。ここでのモデルである K は、いわゆる演算子または作用素と称される働きをする。この場合の入力と出力の関係は、それらが連続関数として扱えるならば、演算子は式(1.1)のように表現される。

$$y(s) = \int_a^b G(s,t)x(t)dt \quad (1.1)$$

これは、フレッドホルムの第1種積分方程式であり、 G はデータ核と称される。入出力が離散化されているものであれば、式(1.2)となる。

$$y_i = \sum_j G_{ij}x_j \quad (1.2)$$

本研究は地山に設定した標点に対して、デジタル画像で捉えた標点の像を y として、 $K^{-1}y$ から標点の3次元座標を求める逆解析手法を行うものである。このように画像と対象物の物性、特に形状を関連付けるモデルを介して逆解析を行う手法として、従来より写真測量による計測が研究されている [例えば尾崎など (1995)]。

写真測量は19世紀初頭の写真の発明以後、航空機を用いた空中写真測量により飛躍的な発展を遂げた。カメラを通して物体が像を形成するとき、光線は歪みを受けて曲がっているために像は元の物体形状を正しく再現することはできないが、写真の後ろから逆方向に光を当て、もとのレンズを通して投影すると、出て来た光線は歪みのない元の方向に向かうというポロ・コッペの原理を利用したもので、さらに同一物体を2箇所から撮影してその位置を求める実体視の原理によって、対象物を3次元的に復元できることが分かり、その原理を取り入れたステレオコンパレータが20世紀初めに開発されてからは、航空用カメラの発達にも支えられ、地籍測量や道路台帳の作成、石油資源探査、森林調査や建設工事の設計などの広範囲への応用へと展開している。今では人工衛星の写真から、農業地帯の収穫量や気象予測など、地上や海洋における様々な情報を調査するリモートセンシングの技術も身近なものになっている [例えば長谷川など (1998)]。

この画像を使った逆解析という点では、本研究では写真測量に用いられている解析

手法を利用する。例えば、本報告で考察するような対象物を基準点無しに3次元的に復元する解析法は、フリーネット理論として測量学においても提唱されてきたものである [Koch(1987)]。特に近年では、人工衛星を利用した測量システムであるグローバルポジショニングシステム (GPS) を使った計測が普及しているが、それを使った精密測量では観測量が膨大になることから、解析処理に関する議論が再度検討されるに至り、これまで測量学における一つの分野であった近接写真測量 (Close Range Photogrammetry) が扱っていたこのフリーネット理論を初めとする最小二乗法に関する計算技術が見直されるようになった [原田健久 (2001)]。しかし、これら写真測量は被写体の形状の復元を中心としながらも、その凹凸などの細部を精度良く計測する試みに対する取り組みは少なく、例えば工業製品の品質管理などへの応用も最近になって研究成果が発表されるようになった段階である [秋本・服部他(1998)]。

その一方で、1980年代に Marr が提唱した視覚の計算理論に基づき、計算機が外界を見て理解できるようにするという視覚情報処理に関する技術がコンピュータービジョンという学問領域を作り上げ、同じく画像から被写体の3次元構造を復元する技術に取り組むようになった [Marr(1987)]。コンピュータービジョンはデジタル画像のノイズ処理、特徴抽出あるいはパターン認識といった画像処理 (Image Processing) を駆使し、人工知能における視覚分野の基礎的な手法を扱うものであったが、ステレオ視による奥行き計測や3次元物体の形状モデルを利用した物体認識論を高度化させ、さらに視覚機能を与える対称をコンピューターからロボットへ拡張させたロボットビジョンという学問も築くに至った [松山・久野他 (1998), 谷内田(1990)]。これら、写真測量およびコンピュータービジョンにおいて、従来扱ってきた地上測量や屋外風景の認識に関する技術を工業計測に発展させる試みは、今ではさらに新しい画像計測法 (Vision Metrology) という学問領域を築きつつある。

本報告は、これら画像を使った計測法を、地山挙動の評価として確立させるための試みに関する研究を行うものである。地山挙動の評価は、対象物が遠方にあること、限定される場所からの撮影しかできないことという計測自体の困難さに加え、ハードウェアであるカメラの性能に左右されず、また計測対象やカメラの位置および角度な

どが自由に選択できるという計測の簡便さに加えて、多数の標点をリアルタイムに高精度で計測することが要求される。このリアルタイム計測に実現に関しては、画像の取得機器であるデジタルカメラの高解像度化と解析を行うコンピューターの処理速度の向上が不可欠であったが、現場で取得されるデジタル画像処理と3次元形状復元の解析技術は、前述のコンピュータービジョンと写真測量の融合であり、まさにここ数年において急速に立ち上がった分野でもある。実際に、これら技術の土木分野への適用性を実証したのは1998年の岡本・大西らの研究まで待たねばならず [岡本・大西(1998)], 今では情報化施工への取り組みといった、応用面から見た技術の改良に関する研究もまとめられるようになった [Zhang (2000), 秋本(2002)].

これまでの写真測量の扱ってきた計測対象および撮影方法は、先験情報の一つである未知数の初期値が用意され、また動的な挙動を追跡するのではなく、三角点や水準点が用意された上で対象物の形の静的な状態を決定するというものであった。地盤挙動を評価するためには、いつどこがどのように変化するかについての情報が無い対象物の動的な変形をモニタリングする必要がある。またコンピュータービジョンでは、対象物の3次元運動や形状解析を取り扱ってきたが、限られた位置から撮影した遠方に存在する対象物を画像から再構築する試みは想定されていない [徐・辻 (1998), Ullman(1979)]. このように本研究が対象とする地盤挙動は、それに対応する新たな要素を追加しなければ、評価法として対処する計測技術を確立することができなかった。岡本・大西は“精密写真測量 (Precise Photogrammetry)”という学問を立上げ、この土木分野での新しい計測法を探索してきた [例えば岡本・大西他 (1996)]. それは多視点からの画像を使って精度を向上させると同時に、計測点の認識精度の向上あるいは最小二乗解析における重みの研究に特徴をもち、さらに大西は精密写真測量の実用化の研究を発展させ、その特徴の一つである面的な変位分布を計測するという利点を活かし、斜面やトンネルの地盤挙動を推定する手法の有用性を現場実験にて証明してきた [例えば Ohnishi and Zhang et al. (1999)].

本報告は、応用面で言えば、斜面防災および地下空間の施工と維持管理に利用するモニタリングシステムを具体的に完成させるための研究をさらに発展させたものであ

り、これまで開発されてきた画像を使った計測技術を総称するものとして逆解析という言葉を使用する。

本報告での逆解析の特徴の一つは、ベクトル空間の概念を用いることである。そこで、再度図 1.1 における逆解析の物理的な意味を考察する。図 1.1 を図 1.2 のように書き換えると、順解析では 3 次元の計測対象をカメラにて撮影して 2 次元の画像を求め、逆解析は 2 次元の画像から 3 次元の対象物を再構築するプロセスであると言える。この場合、解析より写像という言葉の方がイメージしやすいが、前者の順解析を応用したものにコンピュータグラフィック(CG)があり、これもデジタル技術の発展と共に新たな学問領域を形成している。逆解析にはモデル $\mathbf{K}$ を求める場合もあるが、ここではモデルは決定論的に与えられるとし、画像から得られるデータからモデルを生み出すモデルパラメータを求める問題のみを扱う。いずれにせよ、本研究での逆解析プロセスは 2 次元から 3 次元を写像するという異次元のものを扱うものであり、根本的に不良設定問題 (ill-condition) を抱え、そのための数学的な困難さを伴う。データが n 個あり、モデルパラメータを m 個求めるとすると、それらは一連の数値なので、式 (1.3) のようにデータベクトル $\mathbf{d}$ およびモデルパラメータベクトル $\mathbf{m}$ として扱うことができ、図 1.2 に示すように、それぞれ n 次元データ空間 $\mathbf{S}(\mathbf{d})$ および m 次元モデル空間 $\mathbf{S}(\mathbf{m})$ を形成する。

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= [d_1, d_2, \dots, d_n] \\ \mathbf{m} &= [m_1, m_2, \dots, m_m] \end{aligned} \quad (1.3)$$

これにより式 (1.2) は式 (1.4) に書き換えられ、さらに簡略的表現した式 (1.5) を解析していく問題となる。

$$d_i = \sum_j G_{ij} m_j \quad (1.4)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m} \quad (1.5)$$

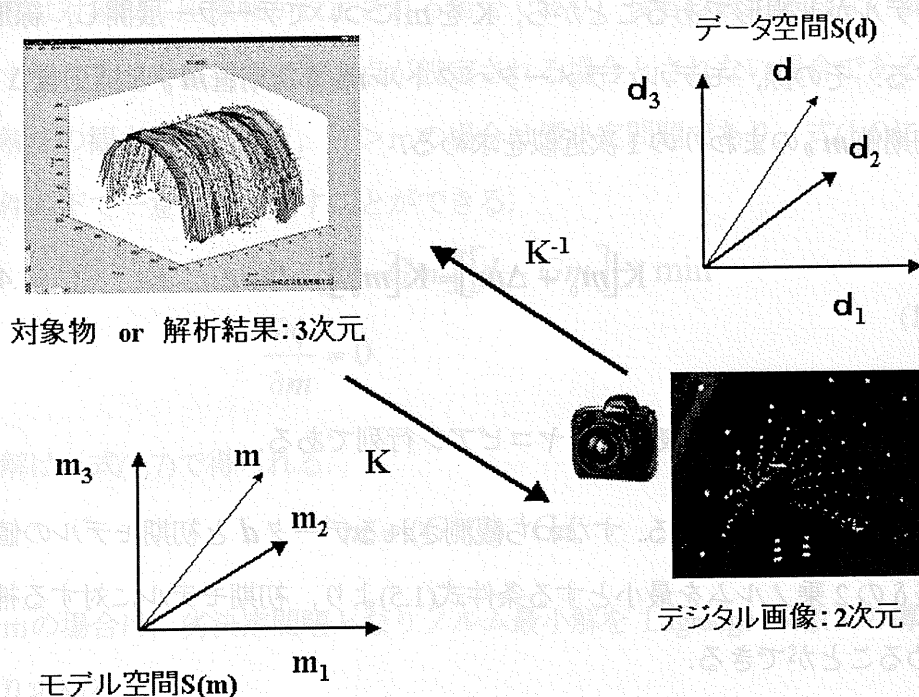


図 1.2 モデル空間とデータ空間

本報告は、式(1.5)の解析手法に関する記述と、それを利用した計測法により地盤挙動を評価するシステムの構築に関する記述から成る。解析手法の記述に関しては、第2章において式(1.5)を導いた後、逆解析手法について考察し、第3章および第4章ではその解析手法を地盤挙動を評価するシステムへと展開するために、ベクトル空間の概念を使った解析手法を再度考察していく。第5章および6章は、具体的な地盤挙動評価法への適用を論じたもので、序論および結論と今後の課題を含めて全体では7章から構成される。

各章の概要は次のとおりである。

第2章においては、逆解析すなわち逆写像のプロセスを論じる。演算子 K の逆演算子 K^{-1} を求めて、データベクトル d に対する適応からモデルパラメータベクトル m を直接求める手法もいくつか開発されているが [Groetsch (1996)], プログラムの作成が容易さを考え、本研究では初期値 m_0 を設定して順解析プロセスを解くことによってモデルパラメータベクトル m を求める解析手法を考察する。

まずモデルが非線形であることから、 K を $\mathbf{m}$ についてテーラー展開し、線形方程式に変換する。その際、モデルパラメータベクトル $\mathbf{m}$ を初期値 $\mathbf{m}_0$ と補正量 $\Delta \mathbf{m}$ に分解し、初期値 $\mathbf{m}_0$ のまわりの1次近似を求める。

$$K[\mathbf{m}_0 + \Delta \mathbf{m}] = K[\mathbf{m}_0] + J\Delta \mathbf{m} \quad (1.4)$$

ただし、 J は $J = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{m}}$ で表されるヤコビアン行列である。

最小二乗法をここで用いる。すなわち観測されるデータ $\mathbf{d}$ と初期モデルの値 $K[\mathbf{m}_0]$ との残差 δ の2乗ノルムを最小とする条件式(1.5)より、初期モデルに対する補正量 $\Delta \mathbf{m}$ を求めることができる。

$$[\delta - \Delta \mathbf{m}][\delta - \Delta \mathbf{m}] \rightarrow \min \quad (1.5)$$

次にこの補正量 $\Delta \mathbf{m}$ を用いて $\mathbf{m}_0 + \Delta \mathbf{m}$ として解を更新し、再度式(1.5)の過程を繰り返し、真値に近づけていく。第2章では、地盤挙動の評価をするシステムにおけるデータベクトル $\mathbf{d}$ およびモデルパラメータベクトル $\mathbf{m}$ を明確にし、それを結びつけるモデル K を導いていく。特に、モデル K に含まれる系統誤差に関する考察を行い、デジタルカメラという計測機器の取り扱いに関する先験情報が無い場合でも高精度の計測を可能にする手法を論じる。また、モデルパラメータベクトル $\mathbf{m}$ を初期値 $\mathbf{m}_0$ と補正量 $\Delta \mathbf{m}$ に分解して解く反復法は、計算手法としては分かり易いが、地盤挙動においてはその初期値を求める工程が必要となり、計測システムの実用化の支障になることが多い。本報告では、この初期値を与える問題について、計測対象として土木分野の構造物に適した手法を考察する。

第3章では、図1.2に示すように、 n 次元のデータ空間 $\mathbf{S}(\mathbf{d})$ から m 次元モデル空間 $\mathbf{S}(\mathbf{m})$ への写像を考え、 $n > m$ の場合と $n < m$ の場合に対応した数値解法を考察す

る。前者は対象物に座標軸が設定される場合であり、後者は設定されない場合に相当する。すなわち、対象空間に基準点が設定される場合とされない場合である。

数値解法の観点から見ると、 $n > m$ の場合は優決定問題であり、式(1.6)に示す最小二乗条件の下で一見解を見出すことができる。

$$\begin{aligned}\phi &= [d - Gm][d - Gm] \rightarrow \min \\ \frac{\partial \phi}{\partial m} &= 0\end{aligned}\quad (1.6)$$

この解は、式(1.7)で得られる。

$$m = (G^T G)^{-1} Gd \quad (1.7)$$

$n < m$ の場合は、劣決定問題となりノルム最小解を Lagrange 乗数 λ の導入より式(1.8)より求める。

$$\begin{aligned}\phi &= \|m^T m\| + 2\lambda^T (d - Gm) \rightarrow \min \\ \frac{\partial \phi}{\partial m_i} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda_j} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n\end{aligned}\quad (1.8)$$

一般的な解の形は式(1.9)となる。

$$m = G^T (G^T G)^{-1} d \quad (1.9)$$

これまでの逆解析手法の多くは、計算の桁落ちなどを防ぐため、あるいは優決定と劣決定の両方の問題に統一的に対処するために特異値分解を適用してきた [Lanczos(1961)]。これは、行列 G を3つの行列の積に分解するものであり、式(1.10)のように表す。

$$G = U \tilde{E} V^T \quad (1.10)$$

U はデータ空間 $\mathbf{S}(\mathbf{d})$ を張る $N \times N$ の固有ベクトルからなる行列, V は $M \times M$ のモデル空間 $\mathbf{S}(\mathbf{m})$ を張る固有ベクトルからなる行列である.

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_m] \quad U = [u_1, u_2, \dots, u_n] \quad (1.11)$$

また Λ は $N \times M$ の対角固有値行列であり, 対角要素は特異値と称される. 式(1.5)は, 式(1.12)となり, 式(1.13)の性質より式(1.14)が導かれ, 優決定問題の場合も劣決定の場合でも式(1.14)より $\mathbf{m}$ を求めることができる.

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m} = \mathbf{U}\mathbf{\tilde{E}}\mathbf{V}^T\mathbf{m} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}_m \quad (1.13)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{V}\mathbf{\tilde{E}}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{d} \quad (1.14)$$

式(1.14)の導出には Λ^{-1} 以外の逆行列の計算は含まれず, Λ^{-1} も Λ は式(1.15)で表される利点があり, 式(1.16)より求められる.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_m \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \frac{1}{\lambda_m} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

特異値が0を含む場合は式(1.16)が求められない。この場合は、P 個の0でない部分と零行列の部分に分ける。

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda_p & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

このとき式(1.10)は Λ の中の $P \times P$ 行列 Λ_p に相当する U_p , V_p を用いて式(1.18)になる。

$$G = U_p \ddot{E}_p V_p^T \quad (1.18)$$

U_p が張る空間はP次元のデータ空間 $S_P(\mathbf{d})$ であり、 V_p はP次元のモデル空間 $S_P(\mathbf{m})$ を張る。モデル空間について言えば、 $M \times (M-P)$ 行列中の $(M-P)$ 列からなるベクトル V_0 が形成する空間は零空間 $S_0(\mathbf{m})$ として定義されるものであり、式(1.19)のように、 V_1 から V_p までの部分が形成する空間 $S_P(\mathbf{m})$ と V_{m-p+1} から V_m までの部分が形成する空間 $S_0(\mathbf{m})$ に分解される。

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_p, v_{m-p+1} \dots v_m] \quad (1.19)$$

$N-P$ 列からなるベクトル U_0 が張る空間についても同様に分解され、 V_p と V_0 は直交し、また U_p と U_0 も直交する。

式(1.18)より、データ核 G は零空間 $S_0(m)$ の情報は全く含まないことが分かる。すなわち式(1.18)を用いて式(1.20)のように m を求めたとしても、 m のうちの P 個しかそれを表していないことになる。

$$m = V_p \ddot{E}_p^{-1} U_p^T d \quad (1.20)$$

これは、 V_p と V_0 は直交することから、式(1.20)の m と V_0 の積が 0 になることより証明される。

$$V_0 m = V_0 V_p \ddot{E}_p^{-1} U_p^T d = 0 \quad (1.21)$$

この意味を、さらに代数的に考察していく。目的は最小二乗解およびノルム最小解の代数的な証明である。

式(1.5)の $d = Gm$ の連立一次方程式に関して、ベクトル d とベクトル m を各々の空間における式(1.11)に示す基底ベクトルの一次結合で表す。

$$d = \sum_{i=1}^n d' u_i, \quad m = \sum_{j=1}^m m' v_j \quad (1.22)$$

また、式(1.5)のデータ核 G は $N \times M$ の行列であり、 $N \times N$ と $M \times M$ の零行列および G^T と組み合わせた $(N+M) \times (N+M)$ の正方行列に G を作り直す。

$$G = \begin{bmatrix} 0 & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

これで G の固有値を考えることができ、固有値 λ_i 、 $N \times M$ 次元の N 次元の固有ベクトルを u_i 、 M 次元の固有ベクトルを v_i とすると、式(1.24)のようになる。

$$(1.24) \quad \begin{bmatrix} 0 & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

再度式(1.5)に戻り、式(1.22)を代入し、式(1.24)から式(1.25)を得る。

$$(1.25) \quad \sum_{i=1}^n d'_i u_i = G \sum_{i=1}^m m'_i v_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i m'_i u_i$$

この式(1.25)の係数の対応を考えて、0でない固有値 λ_i の部分と0となる λ_i の部分に分けて式(1.26)のように対応関係を表す。

$$(1.26) \quad \begin{aligned} \lambda_i m'_i &= d'_i, & i &= 1, 2, \dots, P \\ 0 m'_i &= d'_i & i &= P+1, \dots, n \\ 0 m'_i &= 0 & i &= n+1, \dots, m \end{aligned}$$

ただし、これは $N < M$ の場合であり、 $N > M$ の場合は第2および3式が式(1.27)のようになり、 $N = M$ の場合は第3式は無い。

$$(1.27) \quad \begin{aligned} 0 m'_i &= d'_i & i &= P+1, \dots, m \\ 0 &= d'_i & i &= m+1, \dots, n \end{aligned}$$

0でない固有値 λ_i の部分は一義的に $m'_i = \frac{d'_i}{\lambda_i}$ と解け、式(1.28)のように式(1.22)を書き換えることができるので、式(1.29)が求まる。

$$(1.28) \quad d'_i = u_i^T d, \quad m'_j = v_j^T m$$

$$m = \sum_{i=1}^p \frac{u_i^T d}{\lambda_i} v_i \quad (1.29)$$

式(1.26)の第2式に対しては、 $d'_i = 0$ あるいは $u^T d = 0$ が解をもつ条件となる。
式(1.27)より、この条件は $N < M$ および $N > M$ の両者において成立し、このとき式(1.30)のように不定解をもった解が一般解となる。

$$m = \sum_{i=1}^p \frac{u_i^T d}{\lambda_i} v_i + \sum_{i=p+1}^m m'_i v_i \quad (1.30)$$

第1項は、 $d - Gm$ を考えると、 $d - Gm = \sum_{i=1}^p (d'_i - \lambda_i m'_i) u_i + \sum_{i=p+1}^m d'_i u_i$ となるから、残差 ϕ の2乗は式(1.31)で表される。

$$\phi^2 = (d - Gm)^T (d - Gm) = \sum_{i=1}^p \|d'_i - \lambda_i m'_i\|^2 + \sum_{i=p+1}^m \|d'_i\|^2 \quad (1.31)$$

これより、 $m'_i = \frac{d'_i}{\lambda_i}$ は残差 ϕ の2乗和を最小にすることから、最小二乗解となることが分かる。

また、 $m'_i = \frac{d'_i}{\lambda_i}$ を選択して最初二乗解を求めても、 $i = p+1, \dots, m$ の不定解が決定されないので、最小二乗解は一義的に求めることができない。その中で、式(1.30)の第2項を0とした解はその長さを最小にする。これはノルム最小解として定義される。

すなわち、最小二乗解は一義的には求まらない場合があり、ノルム最小解との組み合わせの考察が必要であることが分かる。

式(1.20) $m = V_p \ddot{E}_p^{-1} U_p^T d$ に戻って議論を進める。式(1.20)は式(1.21)のように書き改められる。

$$m = V_p \ddot{E}_p^{-1} U_p^T d = V_p \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \frac{1}{\lambda_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^T_1 d \\ u^T_2 d \\ \vdots \\ u^T_p d \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^p \frac{u^T_i d}{\lambda_i} v_i \quad (1.21)$$

これは式(1.30)の第1項である。従って、 $u^T_i d = 0$ のとき解をもつ条件が成立し、式(1.30)で与えられる一般解は、式(1.22)で表される。

$$m = V_p \ddot{E}_p^{-1} U_p^T d + \alpha V_0 \quad (1.22)$$

α は $[m'_{p+1}, \dots, m'_m]$ の $m-P$ 次元ベクトルであり、 $M-P$ 個の零空間ベクトルを含む形になる [Wunsch and Minster (1982)]。また、式(1.20)は第3章で述べる Moore-Penrose の一般逆行列の条件を満たすものとなる。いわゆる一般解は特殊解と同時方程式の解の和で表され、同じく $m-P$ 次元ベクトルの決定が必要である。

以上が、特異値分解に基づいた逆解析の代数的解法であるが、従来の特異値分解により係数行列の状態から解の形が導かれ、さらに最小二乗解あるいはノルム最小解を導出することができる。

本報告は、ここで定義された最小二乗解およびノルム最小解、あるいは零空間ベクトルなどを、敢えてすべてベクトル空間の概念を用いて導くことを試みる。これは、図 1.2 から展開する概念を使って、直観的に分かり易くするという理由だけでなく、その物理的意味を考察することにより、第2章で幾何学的な条件から導いたモデルと数値解法を結び付け、式(1.22)における零空間ベクトルなどを地盤挙動を計測し評価するための物理的な条件から導くためである。また、これを第4章でさらに発展させ、最小二乗解の重みをその物理的な概念から決定し、地盤挙動評価法としての計測システムの構築を試みる。これにより計測対象に応じた解析法が設計でき、また第4章では第3章まで議論した地盤挙動を評価するための計測理論を具体的なシステムへと

構築していくための計測手法や関連する要素技術に関しても考察し、第5および第6章で述べる具体的適用例へと発展させる。

この第5章と第6章は、前章まで考察したシステムを使って、具体的に地盤挙動を評価するための適用例について議論し、本研究の有用性を考察するものである。具体的には、第5章では都市を斜面崩壊や地すべりなどの災害から守るために、その挙動をモニタリングする手法について考察するものであり、第6章では新しい都市の生活場である地下空間開発技術に関して、その地盤挙動を評価することにより施工管理あるいは維持管理を行うシステムとしての利用について考察を行っていく。

第5章の目的について簡単に述べる。図1.3は地すべりによる、図1.4は斜面崩壊による道路の被災状況である。我が国はその7割が急峻な山地であり、また構造的に見ても地殻の変動帯に当たり脆弱な地質であるうえに、台風や豪雨あるいは地震といった地すべりや斜面崩壊を誘発する環境下にあり、事実数多くの災害事例が報告されている [例えば「地すべり」など(2002)]。国民生活あるいはそれを支える社会資本の災害に対する安全と信頼性を確保することが急務であるが、限られた管理体制の下で、効率的な防災管理による効果的な対策を実施できる技術が要求されている。

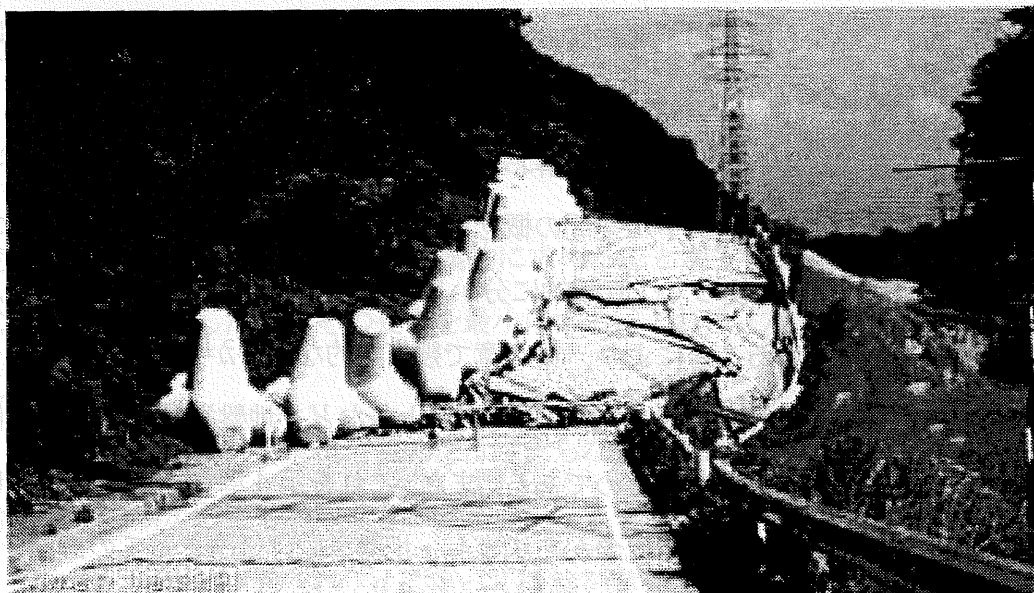


図1.4 地すべりによる道路被災状況例

これら斜面の防災技術は、次のような項目を実現することによって達成される。

- ・ ハザードを評価するための抽出技術
- ・ 影響を軽減する管理技術
- ・ 災害を予知する監視技術

ハザードを評価する抽出技術は、斜面災害発生の危険箇所を効率良く抽出し、その安定度を評価する技術であり、影響軽減の管理技術とは、例えば効果的な日常管理法を図ることにより、的確に道路の通行を規制し、さらには適切な対策工を実施するなどの対策の効率化を測ることであり、災害予知の監視技術とは、崩壊あるいは地すべり挙動の将来予測を行うために変状を面的かつ広範囲に監視、観測する技術の開発を図ることである。



図 1.5 岩盤崩壊による被害状況例

本研究の成果を利用することにより、次のような特徴をもつ計測システムの構築が可能になる。

- ・ データの取得にはデジタルカメラを使用するので、現位置にて解析することができ、リアルタイム計測が可能である。
- ・ 計測に必要なハード機器はカメラとコンピューターのみであり、機器構成に要するコストは安価であり、容易に技術導入できる。
- ・ 計測作業も写真撮影だけであるので、計測作業に熟練は要らず、計測に要する人的および時間的コストも安く済む。



参考文献

- 1) C.W.Groetsch : 大西和榮, 田沼一実, 山本昌宏訳, はじめての逆問題, サイエンス社, 2002.
- 2) 尾崎幸雄 : 写真測量 第5版, 森北出版, 1995.
- 3) 長谷川均 : リモートセンシングデータ解析の基礎, 古今書院, 1998.
- 4) K.R.Koch : Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models, Springer, 1987.
- 5) 原田健久 : 測量計算法, 鹿島出版会, 2001.
- 6) 秋本圭一, 服部進, 岡本厚, 井本治孝 : CCDカメラを用いた大型構造物の3次元精密計測, 計測自動制御学会講演会, 109C-1, 1998.
- 7) D.R.Marr : 乾敏郎, 安藤広志訳, ビジョン—視覚の計算理論と脳内表現—, 産業図書, 1987.
- 8) 松山隆司, 久野義徳, 井宮淳 : コンピュータービジョン 技術評論と将来展望, 新技術コミュニケーションズ, 1998.
- 9) 谷内田正彦 : ロボットビジョン, 昭晃堂, 1990.
- 10) 岡本厚・大西有三・張春 : 精密写真測量による岩盤変位計測方法について, 第10回岩の力学国内シンポジウム講演論文集, pp.229-232, 1998.
- 11) C.Zhang : Rock Displacement Measurement by Precise Close Range Photogrammetric System, 京都大学大学院工学研究科博士論文, 2000.
- 12) 秋本圭一 : 情報化施工のためのデジタル画像計測法に関する研究, 京都大学大学院工学研究科博士論文, 2002.
- 13) 徐剛, 辻三郎 : 3次元ビジョン, 共立出版, 1998.
- 14) Ullman : The Interpretation of Visual Motion, MIT Press, Cambridge, MA, 1979.
- 15) 岡本厚, 大西有三, 藤原弘一 : 精密写真測量による不連続面計測について, 第27回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集, pp.286-289, 1996.
- 16) Y.Ohnishi, C.Zhang, S.Nishiyama, K.Hayashi and A.Okamoto, Precise Close Range Photogrammetry System in Rock Displacement, '99 Japan-Korea Joint Symposium on

Rock Engineering, Fukuoka, pp.239-246, 1999.

- 17) C.W.Groetsch : 金子晃, 山本昌宏, 滝口孝志訳, 数理科学における逆問題, サイエンス社, 1996.
- 18) C.Lanczos : Linear Diggerential Operators, Van Nostrand-Reinhold, Princeton, New Jersey, 1961.
- 19) C.Wunsch and J.F.Minster : Methods for box models and ocean circulation tracers, Mathematical programming and non-linear inverse theory, J. Geophys. Res, Vol.87, pp.5647-5662.
- 20) (社) 日本地すべり学会 : 学会誌地すべり 岩盤崩壊・落石特集号, Vol.39, No.1, 2002.
- 21) (社) 土木学会編 : ニューフロンティア地下空間, 技報堂出版, 1990.
- 22) (社) 土木学会 : 土木学会誌 これからの都市の地下利用, Vol.87, 2002.
- 23) 桜井春輔, 足立紀尚 : 都市トンネルにおけるNATM, 鹿島出版会, 1992.
- 24) 久武勝保, 村上譲二, 村上敏夫 : トンネル覆工の安定性評価, 土と基礎, Vol.50, No.7, pp.19-21, 2002.

第2章 デジタル写真測量技術の解析理論

計測されるデータは一連の数値であり、それに影響を与える物理パラメータとは何らかの数式と関連付けられる。このデータと物理パラメータとを関係つける数式はモデルと称され、その意味では物理パラメータもモデルパラメータと称されるべきものになり、このモデルパラメータの推定値を得て、地盤挙動を考察していくことが本研究の目的である。これを遂行するためには、まずはこのモデルが存在することを前提とする。次に、その推定値から考えられない地盤挙動が発現したとき、まず解析法の正しさや測定の正しさを検証し、そこに何か間違いがなかったかの検討に入る。すなわち、モデル自身の妥当性を直接検討することはない。このように、逆解析を成立させるためには決定論的に扱うモデルが必要となる [久保 (1992)]。

本研究でのモデルも多くの逆解析問題と同様に、物理的な考察から導く。それは計測点、カメラおよび画像上の計測点の像の幾何学的な条件を考えることにより得られる共線条件式と称されるものである [日本写真測量学会 (1996)]。このモデル式は、写真測量などでは数学的に確立されていると論じられているが、実は系統誤差の取り扱いが決定しておらず、それを考慮するために、さまざまなモデルが提案されてきたのが実状である。この系統誤差は計測器であるデジタルカメラに起因するものであるが、デジタルカメラの技術的進歩に対して、計測器として取り扱うための議論が進んでいないため、その系統誤差の取り扱いがまだ確立していない。

また、モデル式は非線形であり、そのままでは解析の対象とはならない。解析のために非線形のモデルを線形にする過程が入るが、写真測量などで使用される射影変換式と比較して線形のモデル式を解く方法 [Abdel-Aziz et al.(1971)]、あるいはテーラー展開を用いて線形化を行う方法 [Mikhail et al.(2001)]などにより陽的(explicit)な関係式を導くなどの方法が存在する。前者は線形化の際に複雑な計算過程を経なくても済む利点がある反面、パラメータの物理的な意味が理解し難く未知数が増えるため解が安定しないという欠点がある。一方、後者は物理的な意味が明解で、コンピュータの発達により厳密な解析を行い易いという利点がある反面、線形化の際に必要な初期値の取り扱いが困難であるという欠点をもつ。これまでの画像を使った計測は、室内での工業製品を対象に

してきたことが多かったため、後者の手法を選択しても、初期近似値をあらかじめ容易に得ることが可能で、その工程は問題とはならなかった。しかし、地盤挙動を対象にした場合、計測点や撮影条件に関する初期近似値を、別の手段で計測するという工程が必要となることは、計測手法としては実用化の妨げになることが予想される。

本研究では、まず対象とするモデルパラメータを明らかにし、データとモデルパラメータが従う陽的な線形関係式の解析モデルを構築する。次に、デジタルカメラに関する先験的な知識を必要とせず解析的に系統誤差を取り扱う方法を考察する。これにより、計測の工程の中にカメラに関する誤差を求めるという作業を無くすことができ、非計測用のデジタルカメラを使った高精度の計測を可能にする。その結果、ハードウェアの低コスト化を進めることができると共に、計測器に関する知識が不要となり、計測手法から熟練した技術を排除することができる。さらに、その系統誤差を含めたモデル式に対して、解析過程のプログラミングが容易なテーラー展開を使った陽的線形化の手法を施す。そして、同時に初期近似値の取得法を考えることによって、画像取得という簡単な現位置作業だけで地盤挙動を評価できる計測手法を確立させることを考察する。

2.1 モデルパラメータ

計測対象をさまざまな位置や角度から撮影する。対象物において、その座標を計測したい点があれば、それを複数の画像に写し込む。計測したい座標が3次元ならば、2箇所以上の異なる位置から撮影した2枚以上の写真を用い、その撮影状態を復元する過程で得られる2本以上の光線の交点として当該座標を決定する。これが2次元の画像から3次元の計測対象を復元する原理である。図2.1.1はこの原理を図示したものである。図から明らかなように、画像が撮影されたときの状態に再現すると、2枚以上の対応する像とレンズ中心を結ぶ光束が交会し立体像が復元される。

この立体像の形成時には、画像を撮影したときの状態が厳密に再現される必要は無く、撮影時の画像の位置と傾きの関係が相対的に同じ状態になるようにすれば、被写体と相似な立体像を形成することが可能である。この際基本となる論理は図2.1.2に示すように、

「計測点の像は、被写体から反射された光がレンズ中心を直進して画像平面に投影されたもの」という中心投影の原理である。

中心投影の原理を考えるために、理想化したカメラを図 2.1.2 に描く。これは画像平面 P から距離 f の処に平行な面 P' を置き、その面 P' の上にピンホール C' を空けたもので、ピンホールカメラと呼ばれるものである。

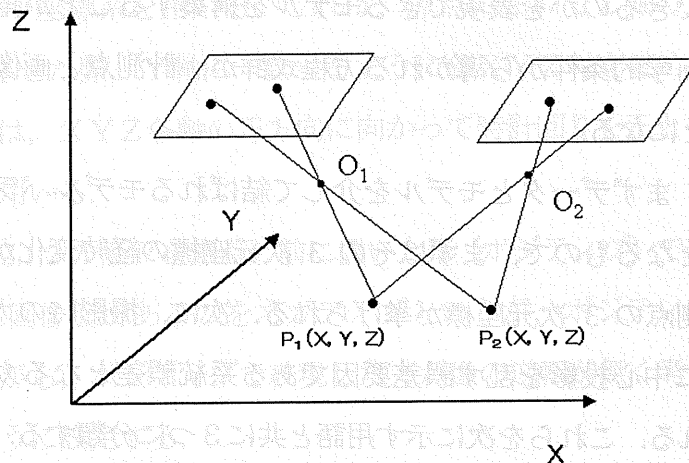


図 2.1.1 立体画像構築の原理

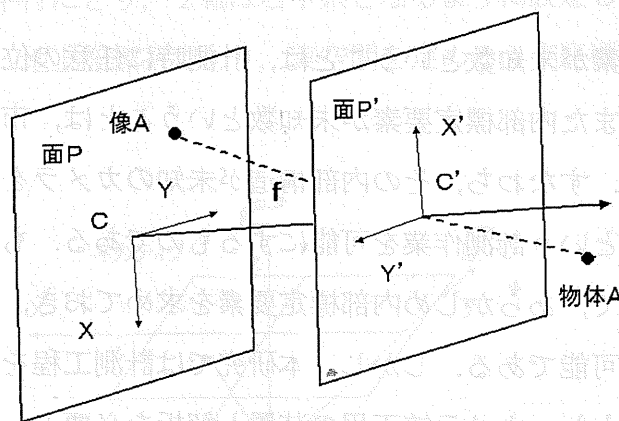


図 2.1.2 ピンホールカメラの概念図

点 C' を通り平面に垂直な線は光軸で、 f はレンズの焦点距離に相当する。物体 A からの光線はピンホール C' を通り面 P の上に像 A を結ぶ。デジタルカメラとその像の関

係は、この図 2.1.2 のピンホールカメラによって表現でき、これから述べるいくつかの幾何学的条件もこのピンホールカメラの概念が基礎となる。しかしながら、対象物からレンズを通して画像上に像を結ぶまで、光の直進性はレンズ歪などで妨げられるので、実際にはそれを考慮する必要がある。逆にどのようにしてピンホールカメラの状態に近づけることができるのかを表現できるモデルを構築することが重要になる。この中心投影を使った幾何学的条件から導かれる方程式群が、計測点と画像上に投影された像との関係を導くことになる。

ここでは、まずデータとモデルを介して結ばれるモデルパラメータを検討する。いわゆる未知数となるもので、まずはその 3 次元座標の経時変化から対象物の変形や変状を解析する計測点の 3 次元座標が挙げられる。次に、撮影時のカメラの位置と撮影角度があり、さらに中心投影を乱す誤差要因である系統誤差となるカメラの構造に起因するものがあげられる。これらを次に示す用語と共に 3 つに分類する。

① 計測点座標： (X, Y, Z)

② 外部標定要素：カメラの撮影位置 (X_0, Y_0, Z_0) および回転角 (θ, ϕ, κ)

③ 内部標定要素：焦点距離やレンズひずみ係数など。

2.1 モデルパラメータ

外部標定要素が未知数ということは、計測時に任意の位置と角度で撮影ができることを意味する。また内部標定要素が未知数ということは、市販のカメラを使用できるというを意味する。すなわち、その内部構造が未知のカメラを使用して、自由な位置と角度から撮影するという計測作業を可能にするものである。もちろん、専用のカメラ校正装置などを用いて、あらかじめ内部標定要素を求めておき、解析時の未知数を減らす工夫をすることも可能である。しかし、本研究では計測工程を簡便化するために、内部標定要素は未知数とし、カメラ校正用の装置と解析を必要としない方法を考察していく。この手法は写真測量ではセルフ・キャリブレーション法とも称される [日本写真測量学会 (1997)]。

2.2 座標系と回転角

画像上での計測点の像の2次元座標から当該計測点の3次元座標を算出するにあたり、本節ではその座標軸を考える。2次元座標は画像上に設けた座標系の値であり、3次元座標は地上座標系の値である。従って、解析においては座標系の変換作業が必然的に伴うことになる。そこで、座標系の設定とその関係を明らかにすることがまず必要となる。

座標系はすべて右手座標系を用いる。これは、原点においてZ軸の正方向に向いてX軸を 90° 右に回転させた際、Y軸に一致するように各XYZ軸を定めたものである。また、座標軸の回転角は、XYZ各軸の正方向に向かって時計回りを正とし、それぞれ ω 、 ϕ および κ の記号を用いる。

また、画像面は図2.1.2の面Pを焦点の前に置いた形（ポジティブ）で表現する。図2.2.1のように焦点の後に画像面があるのをネガティブというが、ポジティブの表現はネガティブと等価でありながら、ポジティブで表現した方が像の逆転が無く考え易くなる。

各座標系は次のように設定する。

- ・ 画像座標系 : 投影中心であるレンズ中心から画像へ下ろした垂線と画像との交点を主点と称し、この主点を原点とする2次元の直交座標系
- ・ カメラ座標系 : 同じくレンズ中心を原点とし、x軸、y軸を画像座標系のx軸およびy軸と平行にとり、z軸は右手系となるように設定した直交座標系。
- ・ 対象空間座標系 : 地上座標系であり、実空間を定める直交座標系。

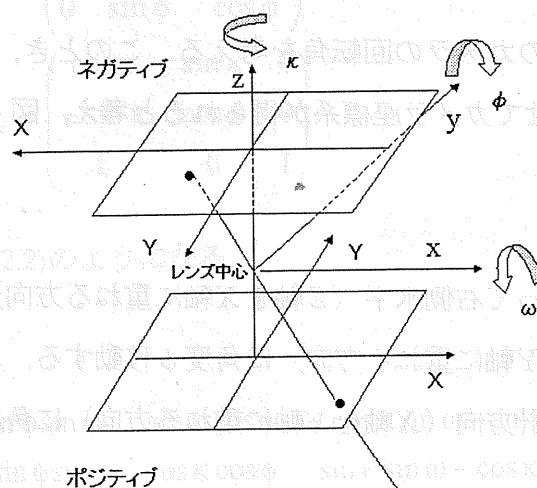


図 2.2.1 座標系と回転方向

対象空間座標は、対象物の適当な点を原点にとり、対象物に向かって右側水平方向に X 軸を、垂直上方に Y 軸を、手前方向に Z 軸をとる。また、カメラ座標 $x-y-z$ は、カメラの光軸を Z 軸上におき、 z 軸を原点から水平に延ばしたとき、画面右側を x 軸に、画面上方を y 軸にとる。そこで、図 2.2.2 に示すような対象空間座標とカメラ座標の関係となる。

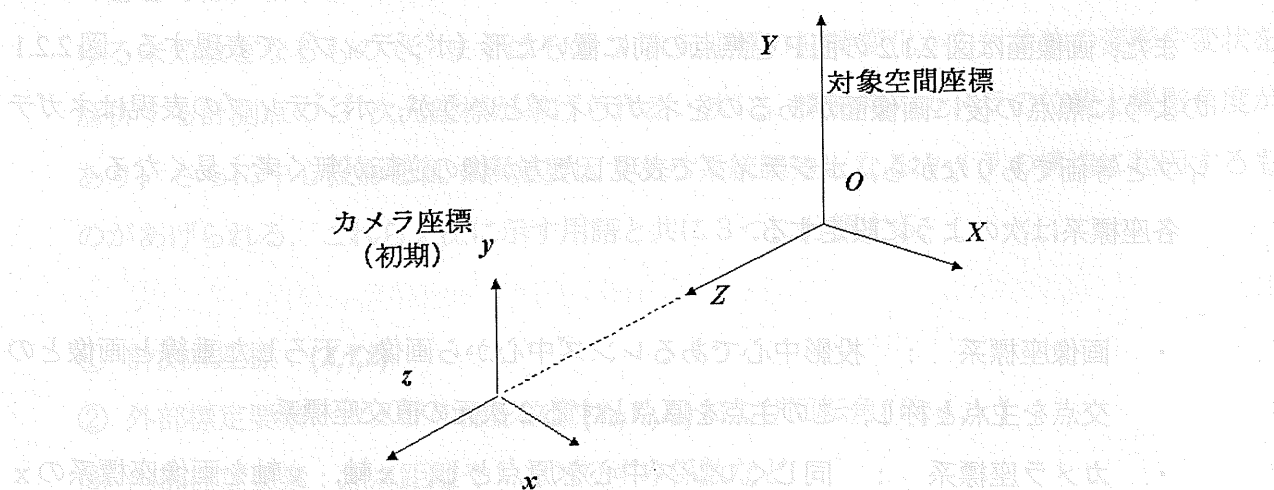


図 2.2.2 対象空間座標とカメラ座標系の関係

次に画像撮影時のカメラの回転角を考える。このとき、対象空間座標系を XYZ の各軸の周りに回転させてカメラ座標系が得られると考え、図 2.2.3 に示す回転の順序を次のようにとる。

- 1) 対象物に向かって右側水平 (Z 軸を X 軸に重ねる方向) に角度 ω 回転させる。
- 2) 上方 (Z 軸を Y 軸に重ねる方向) に角度 ϕ 移動する。
- 3) カメラを反時計方向 (X 軸を Y 軸に重ねる方向) に角度 κ 回転させる。

このように傾いたカメラの回転角を表す座標系は、式(2.2.1)に示すようにそれぞれの対象空間座標系からカメラ座標系に向かう回転行列で表す。

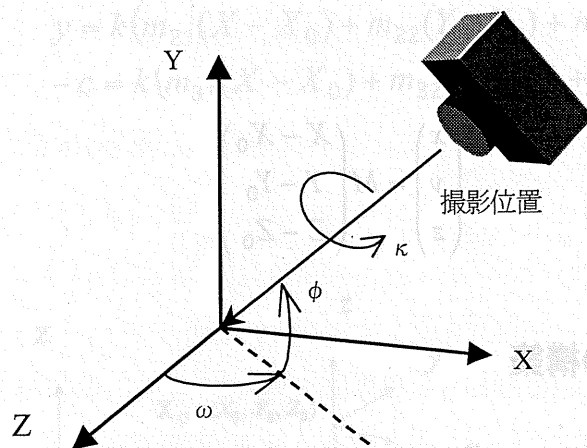


図 2.2.3 回転角の定義

$$\begin{aligned}
 M_{\omega} &= \begin{pmatrix} \cos \omega & 0 & -\sin \omega \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \omega & 0 & \cos \omega \end{pmatrix} \\
 M_{\phi} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \\
 M_{\kappa} &= \begin{pmatrix} \cos \kappa & \sin \kappa & 0 \\ -\sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

合成した回転行列は式(2.2.2)のようになる。

$$\begin{aligned}
 M &= M_{\kappa} M_{\phi} M_{\omega} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \kappa \cos \omega - \sin \kappa \sin \phi \sin \omega & \sin \kappa \cos \phi & -\cos \kappa \sin \omega - \sin \kappa \sin \phi \cos \omega \\ -\sin \kappa \cos \omega - \cos \kappa \sin \phi \sin \omega & \cos \kappa \cos \phi & \sin \kappa \sin \omega - \cos \kappa \sin \phi \cos \omega \\ \cos \phi \sin \omega & \sin \phi & \cos \phi \cos \omega \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

以下では行列 M の (i, j) 要素を m_{ij} と表す。

これより、対象空間座標系における計測点 (X, Y, Z) と、回転後のカメラ座標系から見た計測点の座標 (x, y, z) の関係は、カメラ座標系の原点を (X_0, Y_0, Z_0) とすると式(2.2.3)のように表せる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

2.3 共線条件式の構築

対象空間座標系の計測点と画像座標系の像の位置関係は、図 2.3.1 のようにレンズ中心を介して一直線上に存在するという原理に基づいて幾何学的に求める。この基本原理から導かれる条件式は共線条件式と称される。

図 2.3.1 における c はレンズの画面距離で焦点距離とほぼ同義である。

対象空間座標系 $X-Y-Z$ から見た点 P の座標を $\mathbf{X}=(X, Y, Z)^T$ 、カメラ座標の原点を $\mathbf{X}_0=(X_0, Y_0, Z_0)^T$ とする。また、カメラ座標系 $x-y-z$ から見た P の写像 p の座標を $\mathbf{x}=(x, y, -c)^T$ とし、空間座標系から見た p を $\mathbf{X}_p=(X_p, Y_p, Z_p)^T$ とする。写真面の z 座標は常に $-c$ である。共線条件より、この3点は1本の直線上に存在するから、任意の実数 k を用いて式(2.3.1)のように表せる。

$$\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_0 = k(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \quad (2.3.1)$$

また、 $\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_0$ はカメラ座標系における値であり、座標の回転行列 M を用いると式(2.3.2)のようになる。

$$\mathbf{x} = M(\mathbf{X}_p - \mathbf{X}_0) \quad (2.3.2)$$

式(2.3.1)および式(2.3.2)より式(2.3.4)が導かれる。

$$\mathbf{x} = kM(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \quad (2.3.4)$$

これを成分で書き下すと式(2.3.5)となる.

$$\begin{aligned} x &= k(m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0)) \\ y &= k(m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0)) \\ -c &= k(m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)) \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

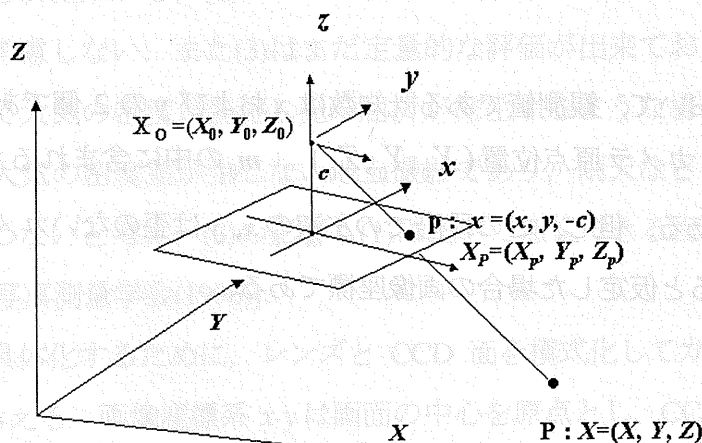


図 2.3.1 共線条件式概念図

第1式と第2式を, それぞれ第3式で割って k を消去して式(2.3.6)を得る.

$$\begin{aligned} x &= -c \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} \\ y &= -c \frac{m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

これが共線条件式である. 但し, m_{ij} の成分は式(2.3.7)のように式(2.2.1)で示す各軸周りの回転を表す行列の積からなる行列の成分である.

$$m_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \kappa \cos \omega - \sin \kappa \sin \phi \sin \omega & \sin \kappa \cos \phi & -\cos \kappa \sin \omega - \sin \kappa \sin \phi \cos \omega \\ -\sin \kappa \cos \omega - \cos \kappa \sin \phi \sin \omega & \cos \kappa \cos \phi & \sin \kappa \sin \omega - \cos \kappa \sin \phi \cos \omega \\ \cos \phi \sin \omega & \sin \phi & \cos \phi \cos \omega \end{pmatrix} \quad (2.3.7)$$

また、回転行列は式(2.3.8)に示すような直交性をもつ。

$$\begin{aligned} M_\omega M_\phi &= M_\phi M_\kappa = M_\kappa M_\omega = 0 \\ M_\omega^{-1} M_\omega &= M_\omega M_\omega^{-1} = 1 \quad M_\phi^{-1} M_\phi = M_\phi M_\phi^{-1} = 1 \quad M_\kappa^{-1} M_\kappa = M_\kappa M_\kappa^{-1} = 1 \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

この式において、観測値である既知数は x および y の 2 個であり、未知数は対象点座標 (X, Y, Z) 、カメラ原点位置 (X_0, Y_0, Z_0) 、 m_{ij} の中に含まれるカメラの回転角 (θ, ϕ, κ) の計 9 個である。但し、この段階での左辺の x, y は歪のないカメラで撮影し、中心投影原理が成立すると仮定した場合の画像座標である。

2.4 系統誤差の取り扱い

共線条件式(2.3.6)における計測点の像の 2 次元座標値である左辺が観測値である。但し、この観測値は歪みの無い理想的カメラで撮影した場合である。市販のデジタルカメラで撮影した場合、光軸のずれやレンズ歪みが存在し、中心投影原理が厳密には成立しなくなる。従ってこの補正をおこなう必要があり、これらは観測における画像座標 (x, y) に含まれる系統誤差として扱う。

真の座標値を (x, y) 、補正項を $(\Delta x, \Delta y)$ とすると、測定で得られた観測値 (x', y') との関係は式(2.4.1)のように表される。

$$\begin{aligned} x' &= x + \Delta x(x, y) \\ y' &= y + \Delta y(x, y) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

この補正項は次のような要因を含むものである。

- (1) 主点位置のずれや収差に関係したレンズによる歪み
- (2) CCD 素子の電氣的なノイズに関係した電気回路に起因する歪み
- (3) 大気による光の屈折の影響など撮影時の外的条件による歪み

このうち、(2)は CCD 画素子の暗電流やアンプ（増幅器）に起因するものでノイズパターンの分析も検証された例がある [Healey et al.(1992)].しかし、まだ定量的に考察された例は少なく、また分析結果から、(1)のレンズ歪みに比べて無視できる程度に小さいと考えられ、ここでは考慮しない。また(3)はまだ定量的な評価が出来ておらず、航空写真のように高度によって大気の密度が変化し光の屈折が発生するような場合は無視できないが、本研究では、大気の密度差が生じない地上撮影であり、雨天などの撮影環境が悪い場合には計測を行わないと考え、(3)の影響も(1)に比べて無視できる程の大きさと考えて考慮しない [日本写真測量学会(1996)].

残る(1)の補正を具体化するために、レンズと CCD 面を模式化してカメラの内部構造を表した図 2.4.1 を考える。画像座標系 $x-y$ は画面の中心を原点とし、CCD 画素の配列と平行に両軸を設定する。レンズの中心から画面へ下ろした垂線の長さ c は画面距離で、その垂線と CCD 面の交点が主点であるが、主点は画像座標系の原点と一致するとは限らないので、この座標を (x_p, y_p) とおく。

ここでレンズ歪みが像の結合にどのような影響をもたらすかを考察する。これはレンズ収差によってもたらされ、放射方向歪曲収差(radial distortion)と接線方向歪曲収差(tangential distortion)に分けて考える。図 2.4.2 に示すように入射光は収差が無ければ結像面の光軸点から $c \cdot \tan \alpha$ 離れた点 O に像を結ぶ。しかし、収差が存在すると O からずれた点 O' に結像することになる。これが放射方向歪曲収差である。収差 d は、式(2.4.2)のように主点からの距離 r の関数で与えられる。

$$d = a_1 r + a_3 r^3 + a_5 r^5 + a_7 r^7 \quad (2.4.2)$$

従って、画像の中央部では d は小さいが、周辺部ほど大きくなり、特に広角レンズを

使用した場合は顕著に現れる。カメラによっては $10\sim 15\mu\text{m}$ あり，広角レンズでは $50\mu\text{m}$ にも達するとの報告もある [写真測量学会(1996)]。一方，接線方向歪曲収差は，複数のレンズを組み合わせた際に，その光軸が一致していないことによって生じ，直線を写した際に曲線となって現れるような歪みを発生させるものである。これら放射方向および接線方向の歪曲収差は，例えば正方形の形状のものを撮影した際，樽型あるいは糸巻き型の形状の像を与えることになる。

これらのレンズ歪みに対して，次の研究例がよく知られている。

- (1) まずレンズ歪みを表すパラメータでモデルを構築する。その後，歪みを無視した線形計算によってカメラパラメータの近似値を求め，次に全パラメータを非線形計算によって高精度に求める 2 段階の手法でキャリブレーションを行い，そのカメラで計測を行う。ただし，この場合接線方向歪曲収差は考慮しない。[Weng et al. (1992)]
- (2) レンズ歪みをパラメータにしたモデルを共線条件式に組み込んで他の未知数と同時に求める。また，その手法において，提案されているレンズ歪みのモデルをいくつか検証した結果，カメラを用いた画像計測では，主点位置のずれおよび放射方向歪曲収差が大きな影響を及ぼし，接線方向歪曲収差は放射方向歪曲収差の $1/10$ 程度であるので無視できると考える。また，焦点距離は未知変量扱いしても精度には影響を及ぼさない [村井 (1981)]。

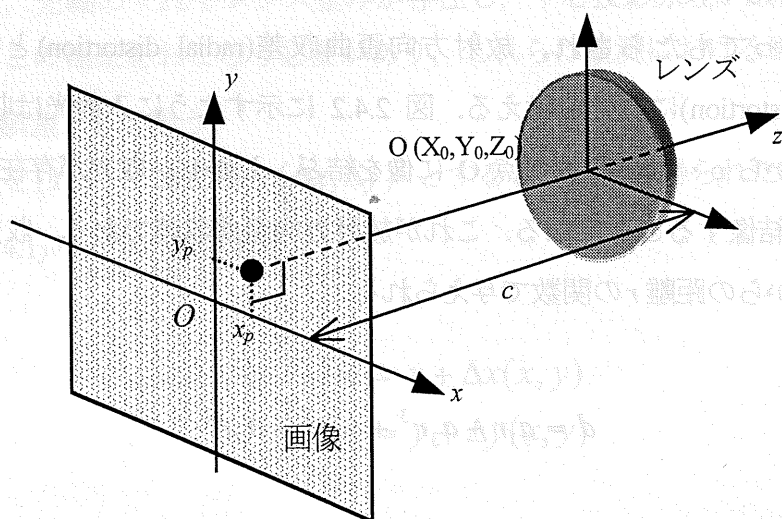


図 2.4.1 カメラ構造の模式図

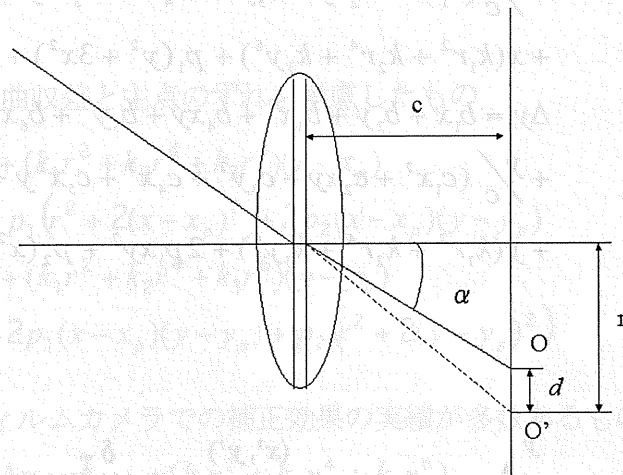


図 2.4.2 放射方向歪曲収差の概念

本研究では、(2) のレンズ歪みをパラメータにしたモデルを共線条件式に組み込んで他の未知数と同時に求める手法を用い、かつ高精度の計測を行うために、放射方向歪曲収差と接線方向歪曲収差の両者を考えることを試みる。

レンズ歪をモデル化するために、図 2.4.3 に歪曲収差による系統誤差の発生の模式図を示す。本来 (x, y) に存在する計測点の像が、放射方向歪曲収差と接線方向歪曲収差によって (x', y') に移動する。従って、この (x', y') と (x, y) の関係を数式で表現するのが、レンズ歪みのモデル化となる。

これまで提唱されている誤差モデルの多くは経験的に得られた多項式で表されるもので、使用されてきた代表的なものを記述する [Brown (1972), Ebner (1976), Weng (1992), Brwon(1966), 村井 (1981)]。

・ Brown (1972) : フィルムカメラにおけるフィルムの平坦度も表現したもの

$$\begin{aligned}
\Delta x &= a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^2y + a_7xy^2 \\
&+ \frac{x}{c}(c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x^3 + c_5x^2y + c_6xy^2 + c_7y^3) \\
&+ x(k_1r^2 + k_2r^4 + k_3y^6) + p_1(y^2 + 3x^2) + 2p_2xy + \delta_{xp} + \left(\frac{x}{c}\right)\delta_c \quad (2.4.3) \\
\Delta y &= b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 + b_6x^2y + b_7xy^2 \\
&+ \frac{y}{c}(c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x^3 + c_5x^2y + c_6xy^2 + c_7y^3) \\
&+ y(k_1r^2 + k_2r^4 + k_3y^6) + 2p_1xy^2 + p_2(x^2 + 3y^2) + \delta_{yp} + \left(\frac{y}{c}\right)\delta_c
\end{aligned}$$

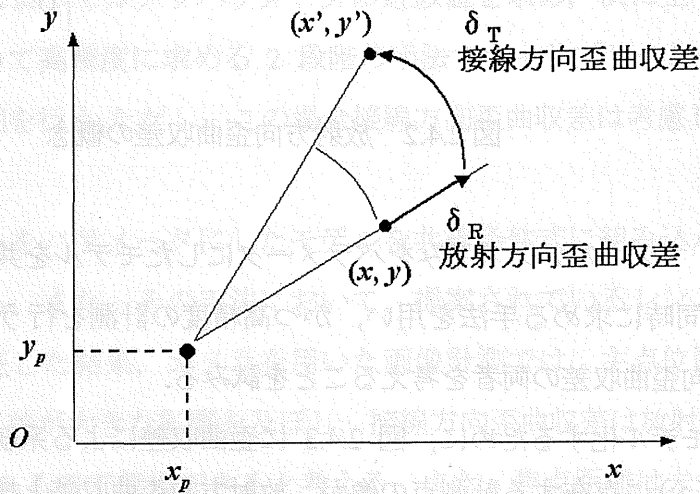


図 2.4.3 歪曲収差による系統誤差の概念

- Ebner (1976) : 直交性のある多項式の係数で表現したもの
$$\begin{aligned}
\Delta x &= b_1x + b_2y - b_3(2x^2 - 4\frac{b^2}{3}) + b_4xy + b_5(y^2 - 2\frac{b^2}{3}) \\
&+ b_7x(y^2 - 2\frac{b^2}{3}) + b_9(x^2 - 2\frac{b^2}{3})y + b_{11}(x^2 - 2\frac{b^2}{3})(y^2 - 2\frac{b^2}{3}) \quad (2.4.4) \\
\Delta y &= -b_1x + b_2y + b_3xy - b_4(2y^2 - 4\frac{b^2}{3}) + b_6(x^2 - 2\frac{b^2}{3}) \\
&+ b_8(x^2 - 2\frac{b^2}{3})y + b_{10}x(y^2 - 2\frac{b^2}{3}) + b_{12}(x^2 - 2\frac{b^2}{3})(y^2 - 2\frac{b^2}{3})
\end{aligned}$$

- Weng (1992) : コンピュータービジョンにおいて提唱されたもの

$$\begin{aligned}\Delta x &= k_1 x(x^2 + y^2) + p_1(3x^2 + y^2) + 2p_2 xy + c_1(x^2 + y^2) \\ \Delta y &= k_1 y(x^2 + y^2) + 2p_1 xy + p_2(x^2 + 3y^2) + c_2(x^2 + y^2)\end{aligned}\quad (2.4.5)$$

・Brown (1966) : 歪曲収差と主点のずれを考慮したもの

$$\begin{aligned}\Delta x &= -x_p + (k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)(x - x_p) \\ &\quad + p_1(r^2 + 2(x - x_p)^2) + 2p_2(x - x_p)(y - y_p) \\ \Delta y &= -y_p + (k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)(y - y_p) \\ &\quad + 2p_1(x - x_p)(y - y_p) + p_2(r^2 + 2(y - y_p)^2)\end{aligned}\quad (2.4.6)$$

・村井 (1981) : フィルムカメラでの補正効果の実績が多数あるもの

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_p + x(k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) \\ &\quad + (p_1 x + p_2 y + p_3 xy + p_4 y^2) \\ \Delta y &= y_p + y(k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) \\ &\quad + (2p_5 xy + p_6 x^2)\end{aligned}\quad (2.4.7)$$

$\Delta x, \Delta y$ 画像座標系での計測点の像の系統誤差

x, y 画像座標系での計測点の像の座標

a_i, b_i 系統誤差を表すための係数

c_i CCD面のゆがみに関する係数

k_i 放射方向歪曲収差周に関する係数

p_i 接線方向歪曲収差に関する係数

c 画面距離, δ_{ij} 主点位置のずれ

δ_c 画面距離補正值

$r^2 = (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2$ であり, レンズ歪みの中心と主点は一致すると仮定する.

歪みモデルにおいて物理的に厳密な意味をもたせる場合は, パラメータとなる係数の数が多くなる. しかし, その場合パラメータ間に相関性が発生する恐れがある. どの誤差モデルにおいても, 係数間の相関が大きいと不定解が生じる. また係数間に相関性がある場合は係数が独立しておらず, 正確に決定されにくい欠点をもつため, パラメータを多くしても最終的には相関をもつパラメータを固定して計算を再実行する必要が生じ

る。CCD面のゆがみなどの無視できる項を考慮し、またパラメータである歪曲収差の係数の多少を考慮して、本研究では Brown(1966)が提唱する式(2.4.6)の誤差モデルを使用する [Clarke and Fryer et al.(1998)].

これより、共線条件式(2.3.6)に補正項(2.4.6)を加えて式(2.4.8)を得る。

$$\begin{aligned} x + \Delta x &= -c \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} \\ y + \Delta y &= -c \frac{m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

この式(2.4.8)が最終的に得られるモデルを表す式である。従って、左辺の観測値を使った逆解析によって、右辺のモデルパラメータを求めることになる。

2.5 共線条件式の線形化

式(2.4.8)の右边を移項して式(2.5.1)を得る。

$$\begin{aligned} F_x &\equiv x + \Delta x + c \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} = 0 \\ F_y &\equiv y + \Delta y + c \frac{m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} = 0 \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

式(2.5.1)は未知数について非線形なので、陽的な線形化の式に変え計算を容易にする。そのために用いる手法はテーラー展開である。即ち、未知数を初期値のまわりでテーラー展開して線形化し、連立一次方程式群の形式にする。一般に未知数を X とすると、式(2.5.2)のように未知数を初期値近似値 X^0 (以下近似値と称す) と補正項 ΔX に分ける。

$$X = X^0 + \Delta X \quad (2.5.2)$$

式(2.5.1)においては、 $(X, Y, Z, X_0, Y_0, Z_0, \omega, \ddot{\omega}, \kappa, x_p, y_p, c, k_1, k_2, k_3, p_1, p_2)$ の計 17 個の未知

数があり、それぞれに式(2.5.3)が成り立つ。

$$\begin{aligned} X &= X^0 + \Delta X \\ Y &= Y^0 + \Delta Y \\ Z &= Z^0 + \Delta Z \\ &\vdots \\ p_2 &= p_2^0 + \Delta p_2 \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

また、観測値 x^{00} に関しては、真値 x と測定誤差 (v_x, v_y) の関係は、式(2.5.4)のようになる。

$$\begin{aligned} x &= x^{00} + v_x \\ y &= y^{00} + v_y \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

但し、回転角については、 $\theta = \theta^0 + \Delta\theta$ のように和の形で更新することも可能であるが、3つの回転角を個別に扱わず、3つの回転行列の積の形で更新する。回転行列は初期回転行列を M^0 とし、線形化によって得られた更新分を ΔM として式(2.5.5)のように表す。

$$M = M^0 \cdot \Delta M \quad (2.5.5)$$

このような形で線形化すると、微分係数から構成される係数行列に関して、後章で検討するように、この係数行列に直交するベクトルが解析的に容易に求まるという利点が生じる [Granshaw (1980)]。

回転角の微小変化と回転行列との関係について考えると、 ω, κ, ϕ がそれぞれ ω, κ, ϕ だけ微小変化したとき、余弦は 1 に、正弦は微小角に近似できるので、式(2.5.6)となる。

$$\Delta M = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\kappa & -\Delta\omega \\ -\Delta\kappa & 1 & \Delta\phi \\ \Delta\omega & -\Delta\phi & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5.6)$$

これにより、微小回転による回転行列 M の変化分 dM は式(2.5.7)のように計算できる。

$$\begin{aligned}
 dM &= M \cdot \Delta M - M \\
 &= M(\Delta M - I) \\
 &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Delta\kappa & -\Delta\theta \\ -\Delta\kappa & 0 & \Delta\phi \\ \Delta\theta & -\Delta\phi & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} m_{13}\Delta\theta - m_{12}\Delta\kappa & m_{11}\Delta\kappa - m_{13}\Delta\phi & m_{12}\Delta\phi - m_{11}\Delta\theta \\ m_{23}\Delta\theta - m_{22}\Delta\kappa & m_{21}\Delta\kappa - m_{23}\Delta\phi & m_{22}\Delta\phi - m_{21}\Delta\theta \\ m_{33}\Delta\theta - m_{32}\Delta\kappa & m_{31}\Delta\kappa - m_{33}\Delta\phi & m_{32}\Delta\phi - m_{31}\Delta\theta \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

ここでの m_{ij} の成分も式(2.3.7)で示す各軸周りの回転を表す行列の積からなる行列の成分である。それぞれの回転角の変化に対する回転行列の微分は式(2.5.8)となる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M}{\partial \theta} &= \begin{pmatrix} m_{13} & 0 & -m_{11} \\ m_{23} & 0 & -m_{21} \\ m_{33} & 0 & -m_{31} \end{pmatrix} \\
 \frac{\partial M}{\partial \phi} &= \begin{pmatrix} 0 & -m_{13} & m_{12} \\ 0 & -m_{23} & m_{22} \\ 0 & -m_{33} & m_{32} \end{pmatrix} \\
 \frac{\partial M}{\partial \kappa} &= \begin{pmatrix} -m_{12} & m_{11} & 0 \\ -m_{22} & m_{21} & 0 \\ -m_{32} & m_{31} & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

これらの計算によって、式(2.5.1)は式(2.5.9)ようになる。

$$\begin{aligned}
 v_x + F_x(X^0, Y^0, Z^0, X_0^0, Y_0^0, Z_0^0, \omega^0, \phi^0, \kappa^0, x_p^0, y_p^0, c^0, k_1^0, k_2^0, k_3^0, p_1^0, p_2^0) \\
 + \left(\frac{\partial F_x}{\partial X} \right)^0 \Delta X + \left(\frac{\partial F_x}{\partial Y} \right)^0 \Delta Y + \left(\frac{\partial F_x}{\partial Z} \right)^0 \Delta Z + \cdots + \left(\frac{\partial F_x}{\partial p_2} \right)^0 \Delta p_2 = 0 \\
 v_y + F_y(X^0, Y^0, Z^0, X_0^0, Y_0^0, Z_0^0, \omega^0, \phi^0, \kappa^0, x_p^0, y_p^0, c^0, k_1^0, k_2^0, k_3^0, p_1^0, p_2^0) \\
 + \left(\frac{\partial F_y}{\partial X} \right)^0 \Delta X + \left(\frac{\partial F_y}{\partial Y} \right)^0 \Delta Y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial Z} \right)^0 \Delta Z + \cdots + \left(\frac{\partial F_y}{\partial p_2} \right)^0 \Delta p_2 = 0
 \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

$\left(\frac{\partial F_i}{\partial}\right)^0$ は初期値における微分係数であり, F_x および F_y は式(2.5.1)に未知数の初期値と観測値を代入したものである. 式(2.5.9)を行列表示すると式(2.5.10)となる.

但し, e_i は $e = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = -F(X^0, Y^0, \dots, p_2^0)$ であり, 観測値と式(2.5.1)である解析モデルとの差で残差ベクトルと称す.

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{A}X_0 \\ \ddot{A}Y_0 \\ \ddot{A}Z_0 \\ \ddot{A}\dot{u} \\ \ddot{A}\ddot{o} \\ \ddot{A}\dot{e} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} & b_{17} & b_{18} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} & b_{27} & b_{28} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_p \\ \Delta y_p \\ \Delta c \\ \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ \Delta k_3 \\ \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} \quad (2.5.10)$$

この式(2.5.10)における係数は次のように計算される.

まず簡便な記述ができるように式(2.5.10)を式(2.5.11)のように表現する.

$$F_x = x + \Delta x + c \frac{N_x}{D} = 0 \quad (2.5.11)$$

$$F_y = y + \Delta y + c \frac{N_y}{D} = 0$$

ここで, 式中の記号については式(2.5.12)となる.

$$\begin{aligned} N_x &= m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0) \\ N_y &= m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0) \\ D &= m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0) \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

x座標について、式(2.5.11)を各未知変数で微分する。

外部標定要素に関する係数については式(2.5.13)となる。

$$\begin{aligned}
 a_{11} &\equiv \frac{\partial F_x}{\partial X_0} = \frac{c}{D^2}(-m_{11}D + m_{31}N_x) \\
 a_{12} &\equiv \frac{\partial F_x}{\partial Y_0} = \frac{c}{D^2}(-m_{12}D + m_{32}N_x) \\
 a_{13} &\equiv \frac{\partial F_x}{\partial Z_0} = \frac{c}{D^2}(-m_{13}D + m_{33}N_x) \\
 a_{14} &\equiv \frac{\partial F_x}{\partial \omega} = \frac{\partial F_x}{\partial m_{11}} \frac{\partial m_{11}}{\partial \omega} + \frac{\partial F_x}{\partial m_{12}} \frac{\partial m_{12}}{\partial \omega} + \frac{\partial F_x}{\partial m_{13}} \frac{\partial m_{13}}{\partial \omega} \\
 &\quad + \frac{\partial F_x}{\partial m_{31}} \frac{\partial m_{31}}{\partial \omega} + \frac{\partial F_x}{\partial m_{32}} \frac{\partial m_{32}}{\partial \omega} + \frac{\partial F_x}{\partial m_{33}} \frac{\partial m_{33}}{\partial \omega}
 \end{aligned} \tag{2.5.13}$$

ここで、各項の m に関する微分を計算すると式(2.5.14)になる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_x}{\partial m_{11}} &= c \frac{X - X_0}{D} & \frac{\partial F_x}{\partial m_{31}} &= -c \frac{N_x}{D^2} (X - X_0) \\
 \frac{\partial F_x}{\partial m_{12}} &= c \frac{Y - Y_0}{D} & \frac{\partial F_x}{\partial m_{32}} &= -c \frac{N_x}{D^2} (Y - Y_0) \\
 \frac{\partial F_x}{\partial m_{13}} &= c \frac{Z - Z_0}{D} & \frac{\partial F_x}{\partial m_{33}} &= -c \frac{N_x}{D^2} (Z - Z_0)
 \end{aligned} \tag{2.5.14}$$

さらに式(2.3.7)より

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial m_{11}}{\partial \omega} &= m_{13}, & \frac{\partial m_{12}}{\partial \omega} &= 0, & \frac{\partial m_{13}}{\partial \omega} &= -m_{11} \\
 \frac{\partial m_{31}}{\partial \omega} &= m_{33}, & \frac{\partial m_{32}}{\partial \omega} &= 0, & \frac{\partial m_{33}}{\partial \omega} &= -m_{31}
 \end{aligned}$$

であるから、これらを用いて式(2.5.15)を得る。

$$\begin{aligned}
 a_{14} &= c \frac{X - X_0}{D} m_{13} - c \frac{Z - Z_0}{D} m_{11} - c \frac{N_x}{D^2} (X - X_0) m_{33} + c \frac{N_x}{D^2} (Z - Z_0) m_{31} \\
 &= \frac{c}{D} \{ (X - X_0) m_{13} - (Z - Z_0) m_{11} \} - \frac{c N_x}{D^2} \{ (X - X_0) m_{33} - (Z - Z_0) m_{31} \}
 \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

同様にして a_{15}, a_{16} を得る.

$$\begin{aligned}
 a_{15} &\equiv \frac{\partial F_x}{\partial \phi} = \frac{c}{D} \{ (Z - Z_0) m_{12} - (Y - Y_0) m_{13} \} - \frac{c N_x}{D^2} \{ (Z - Z_0) m_{32} - (Y - Y_0) m_{33} \} \\
 a_{16} &\equiv \frac{\partial F_x}{\partial \kappa} = \frac{c}{D} \{ (Y - Y_0) m_{11} - (X - X_0) m_{12} \} - \frac{c N_x}{D^2} \{ (Y - Y_0) m_{31} - (X - X_0) m_{32} \}
 \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

次に内部パラメータおよび対象点座標に関する係数について計算する.

$$\begin{aligned}
 b_{11} &\equiv \frac{\partial F_x}{\partial x_p} = -1, \quad b_{12} \equiv \frac{\partial F_x}{\partial y_p} = 0, \quad b_{13} \equiv \frac{\partial F_x}{\partial z_p} = \frac{N_x}{D} \\
 b_{14} &\equiv \frac{\partial F_x}{\partial k_1} = r^2 (x - x_p), \quad b_{15} \equiv \frac{\partial F_x}{\partial k_2} = r^4 (x - x_p), \quad b_{16} \equiv \frac{\partial F_x}{\partial k_3} = r^6 (x - x_p) \\
 b_{17} &\equiv \frac{\partial F_x}{\partial p_1} = r^2 + 2(x - x_p)^2, \quad b_{18} \equiv \frac{\partial F_x}{\partial p_2} = r^2 + 2(x - x_p)(y - y_p) \\
 c_{11} &\equiv \frac{\partial F_x}{\partial X} = c \frac{m_{11} D - N_x m_{31}}{D^2} = -a_{11} \\
 c_{12} &\equiv \frac{\partial F_x}{\partial Y} = -a_{12} \\
 c_{13} &\equiv \frac{\partial F_x}{\partial Z} = -a_{13}
 \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

また, y 座標に関する計算の結果は次のとおりである.

$$\begin{aligned}
a_{21} &\equiv \frac{\partial F_y}{\partial X_0} = \frac{c}{D^2}(-m_{21}D + m_{31}N_y) \\
a_{22} &\equiv \frac{\partial F_y}{\partial Y_0} = \frac{c}{D^2}(-m_{22}D + m_{32}N_y) \\
a_{23} &\equiv \frac{\partial F_y}{\partial Z_0} = \frac{c}{D^2}(-m_{23}D + m_{33}N_y) \\
a_{24} &\equiv \frac{\partial F_y}{\partial \omega} = \frac{c}{D} \{(X - X_0)m_{23} - (Z - Z_0)m_{21}\} - \frac{cN_y}{D^2} \{(X - X_0)m_{33} - (Z - Z_0)m_{31}\} \\
a_{25} &\equiv \frac{\partial F_y}{\partial \phi} = \frac{c}{D} \{(Z - Z_0)m_{22} - (Y - Y_0)m_{23}\} - \frac{cN_y}{D^2} \{(Z - Z_0)m_{32} - (Y - Y_0)m_{33}\} \\
a_{26} &\equiv \frac{\partial F_y}{\partial \kappa} = \frac{c}{D} \{(Y - Y_0)m_{21} - (X - X_0)m_{22}\} - \frac{cN_y}{D^2} \{(Y - Y_0)m_{31} - (X - X_0)m_{32}\}
\end{aligned} \tag{2.5.18}$$

$$\begin{aligned}
b_{21} &\equiv \frac{\partial F_y}{\partial x_p} = 0, \quad b_{22} \equiv \frac{\partial F_y}{\partial y_p} = -1, \quad b_{23} \equiv \frac{\partial F_y}{\partial c} = \frac{N_y}{D} \\
b_{24} &\equiv \frac{\partial F_y}{\partial k_1} = r^2(y - y_p), \quad b_{25} \equiv \frac{\partial F_y}{\partial k_2} = r^4(y - y_p), \quad b_{26} \equiv \frac{\partial F_y}{\partial k_3} = r^6(y - y_p) \\
b_{27} &\equiv \frac{\partial F_y}{\partial p_1} = r^2 + 2(x - x_p)(y - y_p), \quad b_{28} \equiv \frac{\partial F_y}{\partial p_2} = r^2 + 2(y - y_p)^2 \\
c_{21} &\equiv \frac{\partial F_x}{\partial X} = c \frac{m_{21}D - N_y m_{31}}{D^2} = -a_{21} \\
c_{22} &\equiv \frac{\partial F_x}{\partial Y} = -a_{22} \\
c_{23} &\equiv \frac{\partial F_x}{\partial Z} = -a_{23}
\end{aligned}$$

以上の操作により式(2.4.7)の共線条件式は線形化される。

線形化された式を行列表示すると(2.5.19)のようになる。ここで添字 1 は外部標定要素、添字 2 は内部標定要素、および添字 3 は計測点に関する量を表す。

$$\mathbf{v} + A_1 \mathbf{x}_1 + A_2 \mathbf{x}_2 + A_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{e} \tag{2.5.19}$$

この式がモデルを表す観測方程式である。計測点 1 点につき式(2.5.19)は 2 つ成立するため、 n 点の計測点を m 枚の画像に写したとすると方程式の数は $2mn$ となる。これは式

(2.5.19)の行数に相当する。従って、式(2.5.19)の各係数行列の大きさは次のようになる。

$$A_1 : 2mn \times 6m$$

$$A_2 : 2mn \times 8$$

$$A_3 : 2mn \times 3n$$

式(2.5.19)の構成を具体的に書くと図 2.5.1 のようになる。

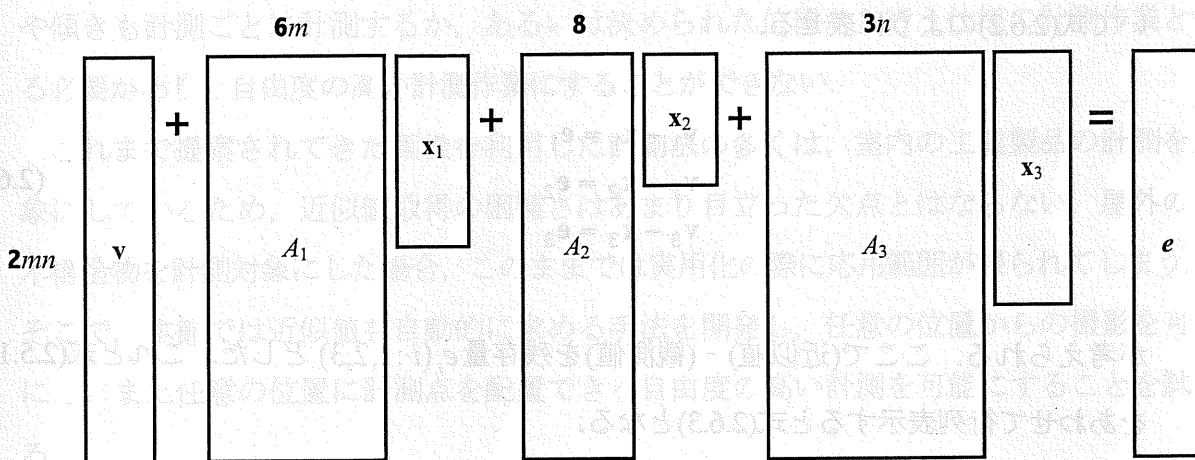


図 2.5.1 解析モデルの構成

2.6 モデル式の構築

式(2.6.1)のように $\mathbf{x}_1$ は各画像の外部標定要素、 $\mathbf{x}_2$ はカメラパラメータ、および $\mathbf{x}_3$ は計測点の補正量ベクトルである。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= (\cdots \Delta X_0^i \Delta Y_0^i \Delta Z_0^i \Delta \omega^i \Delta \phi^i \Delta \kappa^i \cdots) \\ \mathbf{x}_2 &= (\Delta x_p \Delta y_p \Delta c \Delta k_1 \Delta k_2 \Delta k_3 \Delta p_1 \Delta p_2) \\ \mathbf{x}_3 &= (\cdots \Delta X^j \Delta Y^j \Delta Z^j \cdots) \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

i は第 i 番目の画像を, j は第 j 番目の対象点を表す.

続いて, モデルパラメータに対する観測式を考える. これは, 対象とする計測点に別途計測した座標値があり, それを固定点として使用する場合, あるいはあらかじめレンズ歪みなどを検定し, その結果カメラ内部標定要素の一部を固定する場合などに, 重みをつけて使用する. 観測値がまったくない場合は重みを 0 として, 計算時にこの式が寄与しないようにする. 真値, 観測値および近似値と補正量の関係は次のようになる.

$$(\text{真値}) = (\text{観測値}) + (\text{誤差}) = (\text{近似値}) + (\text{補正量})$$

の関係から, $(\text{誤差}) - (\text{補正量}) = (\text{近似値}) - (\text{観測値})$ が導けるので, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ それぞれについて式(2.6.2)のように表せる.

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 - \mathbf{x}_1 &= \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{v}_2 - \mathbf{x}_2 &= \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{v}_3 - \mathbf{x}_3 &= \mathbf{e}_3\end{aligned}\tag{2.6.2}$$

が考えられる. ここで $(\text{近似値}) - (\text{観測値})$ を残存量 $\mathbf{e}_i (i:1,2,3)$ とした. これと式(2.5.19)とをあわせて行列表示すると式(2.6.3)となる.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ -\mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}\tag{2.6.3}$$

これらを統合すると式(2.6.4)となる.

$$\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}\tag{2.6.4}$$

これがデジタル画像をデータとして利用する際のモデル式となる.

$\mathbf{A}$ は序論で記述したヤコブ行列であり, 以下計画行列と称する.

2.7 近似値取得法の考察

前節で構築した線形のモデル式は、非線形のことをモデルパラメータの近似値に関してテーラー展開を行うことで得たものである。このため、この線形のモデル式を解析する場合には、デジタル画像の取得時に計測点およびカメラの撮影位置や角度に関する近似値を計測する作業も要求される。しかしながら、地盤挙動を計測の対象とする場合、計測点を多数配置すること、あるいは計測点は規則正しく配置されず任意の位置に設置される理由により、その近似値の計測は煩雑な作業となる。また撮影時のカメラの位置や傾きも計測ごとに計測するか、あるいは決められた位置から行う仕様の計測作業とする必要があり、自由度の高い計測作業にすることができない。

これまで提案されてきた画像を利用した計測法の多くは、室内の工業製品の計測を対象にしているため、近似値取得の困難さはあまり目立った欠点とはならない。屋外の土木構造物を計測対象にした場合、このままでは実用化の際に応用範囲が限られてしまう。そこで、本節では近似値を自動的に求める手法を開発し、任意の位置からの撮影を可能にし、また任意の位置に計測点を配置できる自由度の高い計測を可能にすることを試みる。

まず一つの画像の中に撮影された幾つかの既知座標に成立する幾何学的条件を利用してカメラの位置と傾きを求める。その際、画像座標系と対象空間座標系の間の関係を求めることになるが、この手法は写真測量において後方交会法とも称される。本研究でも、計測作業時にあらかじめ、その 3 次元座標を計測した既知点を配置した物体を画像の中に取り込み、その値から近似値を取得する後方交会法を計測の最初に実施する。外部標定要素が求まれば、逆にその値から対象空間座標系における任意の計測点の 3 次元成分を求めることができる。これは後方交会法に対して前方交会法と称される手法である。この一連の工程を実現するには、式(2.3.6)の共線条件式を解けば良いのであるが、ここでは同じく画像座標系と対象空間座標系との関係を別の数式で表現し、共線条件式との対応関係を考えることで解を求めていく。まず式(2.3.6)の共線条件式を考える

$$\begin{aligned} x &= -c \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} \\ y &= -c \frac{m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)} \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

これを式(2.7.2)に変換する.

$$\begin{aligned} x &= \frac{b_1 X + b_2 Y + b_3 Z + b_4}{b_9 X + b_{10} Y + b_{11} Z + 1} \\ y &= \frac{b_5 X + b_6 Y + b_7 Z + b_8}{b_9 X + b_{10} Y + b_{11} Z + 1} \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

(X, Y, Z) は既知点の対象空間座標系での3次元座標成分である.

ここで, 式(2.7.1)と(2.7.2)は次のような対応関係にある.

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{cm_{11}}{B}, b_2 = -\frac{cm_{12}}{B}, b_3 = -\frac{cm_{13}}{B}, b_4 = \frac{c(m_{11}X_0 + m_{12}Y_0 + m_{13}Z_0)}{B} \\ b_5 &= -\frac{cm_{21}}{B}, b_6 = -\frac{cm_{22}}{B}, b_7 = -\frac{cm_{23}}{B}, b_8 = \frac{c(m_{21}X_0 + m_{22}Y_0 + m_{23}Z_0)}{B} \\ b_9 &= -\frac{m_{31}}{B}, b_{10} = -\frac{cm_{32}}{B}, b_{11} = -\frac{cm_{33}}{B}, B = -(m_{31}X_0 + m_{32}Y_0 + m_{33}Z_0) \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

式(2.7.2)を解いて, 式(2.7.3)の関係より外部標定要素を求める.

このとき, 式(2.7.2)の次のような線形関係の式になおす.

$$\begin{aligned} Xb_1 + Yb_2 + Zb_3 + b_4 - xXb_9 - xYb_{10} - xZb_{11} &= x \\ Xb_5 + Yb_6 + Zb_7 + b_8 - yXb_9 - yYb_{10} - yZb_{11} &= y \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

行列の形に直せば式(2.7.5)となる.

$$\begin{aligned}
 BX &= d \\
 B &= \begin{pmatrix} X & Y & Z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -xX & -xY & -xZ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & Y & Z & 1 & -yX & -yY & -yZ \end{pmatrix} \\
 X^T &= (b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \quad b_6 \quad b_7 \quad b_8 \quad b_9 \quad b_{10} \quad b_{11}) \\
 d^T &= (x \quad y)
 \end{aligned} \tag{2.7.5}$$

未知数は 11 個であり, 既知点 1 点につき 2 個の方程式が成立することから, 6 個以上の既知点の値から, 第 3 章で述べる最小二乗法を使って $X = (B^T B)^{-1} B d$ より未知数 b_i を求めることができる. また, $\sum_{i=1}^3 m_{ii}^2 = 1$ より式(2.7.3)の第 1 式から第 3 式を用いて式(2.7.6)を求め, 再度式(2.7.3)より外部標定要素を計算する.

$$B = \frac{c \sqrt{\sum_{i=1}^3 m_{ii}^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 b_i^2}} = \frac{c}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 b_i^2}} \tag{2.7.6}$$

あるいは, 既知点を平面的に構成されたもので得るならば, 式(2.7.2)を式(2.7.7)のような 2 次元の式で扱うことができる.

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{b_1 X + b_2 Y + b_3}{b_7 X + b_8 Y + 1} \\
 y &= \frac{b_4 X + b_5 Y + b_6}{b_7 X + b_8 Y + 1}
 \end{aligned} \tag{2.7.7}$$

式(2.7.2)あるいは(2.7.7)は射影変換式と称され, これらの解法を利用して既知情報無しに, あるいは簡単な操作で外部標定要素の近似値を得ることができる.

この共線条件式を射影変換式に置き換えて計算を行う手法は **DLT (Direct Linear Transformation)** 法とも呼ばれ, 写真測量などでは用いられてきた実績があるが, 実際の応

用では幾つかの問題点が存在するため高精度の計測には適用されていない [Abdel-Aziz et al.(1971)]. その問題点の一つは、解が不安定になることである。これは、求めたい未知数は外部標定要素の6個であるのに、式(2.7.2)の射影変換式では 11 個の未知数に増やすことになることに起因する。すなわち、本来は独立した未知数が6個であるものを 11 個に増やすことが原因で解の不安定につながりやすい欠点がある。

このことを数学的な側面から考察する。外部標定要素6個と射影変換式の 11 個の未知数の差は5個存在する。これはその分だけ制約条件が存在していることになる。その制約条件とは式(2.7.3)に示す回転行列 m_{ij} が直交していることであり、式(2.7.8)に示すもの

である。

$$b^2_1 + b^2_2 + b^2_3 = \frac{c^2 \sum_{i=1}^3 m_{1i}}{B^2} = \frac{c^2}{B^2}, \quad b^2_5 + b^2_6 + b^2_7 = \frac{c^2 \sum_{i=1}^3 m_{2i}}{B^2} = \frac{c^2}{B^2} \quad (2.7.8)$$

$$b^2_9 + b^2_{10} + b^2_{11} = \frac{c^2 \sum_{i=1}^3 m_{3i}}{B^2} = \frac{c^2}{B^2}, \quad b_1 b_9 + b_2 b_{10} + b_3 b_{11} = -\frac{c^2 \sum_{i=1}^3 m_{1i} m_{3i}}{B^2} = 0$$

$$b_1 b_9 + b_2 b_{10} + b_3 b_{11} = -\frac{c^2 \sum_{i=1}^3 m_{1i} m_{3i}}{B^2} = 0, \quad b_5 b_9 + b_6 b_{10} + b_7 b_{11} = -\frac{c^2 \sum_{i=1}^3 m_{2i} m_{3i}}{B^2} = 0$$

従って、式(2.7.8)の下で前述の解法を用いる必要があるが、これも非線形なので何らかの計算上の工夫が必要となり、厳密に解放を考えるとDLT法の利点が生かせないことになる。実際使用してみると、これら制約条件は特に考慮する必要の無いことが分かるが、制約条件を考慮しない代わりに、本研究では解が不安定にならないよう既知点を10点以上配置し、20個の方程式を用意して最小二乗法を行うなどの工夫を行う。

また、この解法に代わって、次に述べる近似値を使った最小二乗解を用いる方法を考察する。式(2.7.2)の未知数を $b_i = b^0_i + \Delta b_i$ と初期値と補正量に分け、初期値のまわりで

線形化する。

$$\frac{X}{B_1^2} \Delta b_1 + \frac{Y}{B_1^2} \Delta b_2 + \frac{Z}{B_1^2} \Delta b_3 + \frac{1}{B_1^2} \Delta b_4 - \frac{xX}{B_1^2} \Delta b_9 - \frac{yY}{B_1^2} \Delta b_{10} - \frac{zZ}{B_1^2} \Delta b_{11} = \frac{B_2}{B_1} - x \quad (2.7.9)$$

$$\frac{X}{B_1^2} \Delta b_5 + \frac{Y}{B_1^2} \Delta b_6 + \frac{Z}{B_1^2} \Delta b_7 + \frac{1}{B_1^2} \Delta b_8 - \frac{yX}{B_1^2} \Delta b_9 - \frac{yY}{B_1^2} \Delta b_{10} - \frac{yZ}{B_1^2} \Delta b_{11} = \frac{B_3}{B_1} - y$$

$$B_1 = b_9^0 X + b_{10}^0 Y + b_{11}^0 Z + 1$$

$$B_2 = b_1^0 X + b_2^0 Y + b_3^0 Z + b_4^0$$

$$B_3 = b_5^0 X + b_6^0 Y + b_7^0 Z + b_8^0$$

この式を用いて同じく最小二乗法で補正量を求め、繰り返し近似値を更新して未知数を求める。その後次式により、外部標定要素を算出する。

$$b_1 X_0 + b_2 Y_0 + b_3 Z_0 = -b_4$$

$$b_5 X_0 + b_6 Y_0 + b_7 Z_0 = -b_8$$

$$b_9 X_0 + b_{10} Y_0 + b_{11} Z_0 = -1$$

$$m_{31} = b_9 B, m_{32} = b_{10} B, m_{33} = b_{11} B \quad (2.7.10)$$

$$m_{11} = -\frac{b_1 B}{c}, m_{12} = -\frac{b_2 B}{c}, m_{13} = -\frac{b_3 B}{c}$$

$$m_{21} = -\frac{b_5 B}{c}, m_{22} = -\frac{b_6 B}{c}, m_{23} = -\frac{b_7 B}{c}$$

ただし、 $B = -(m_{31} X_0 + m_{32} Y_0 + m_{33} Z_0)$ である。

この方法は近似値を必要とするが、あらかじめ既知点を適当に配置させた物体を撮影するようにすれば、その対象空間座標の既知点の近似値はあらかじめ得ることができ、外部標定要素も画像から容易に類推することができる。精度の高い近似値を得ることができながらも、簡便な手法であるので有用である。未知数が 11 個であり、1 点の既知点から 2 つの式が導けるので 6 点を配置させれば解くことができる。

本研究では、近似値を全く必要としない解法を第 5 章の斜面を対象にした計測に適用する。

以上、図 2.7.1 に外部標定要素を求める概念図を示す。

(1) 幾何学的な関係から構築されたモデルであるため、その幾何学の成立を妨げる要因を排除する必要がある。その要因の一つに計測時に系統誤差として発生するレイヤ誤差

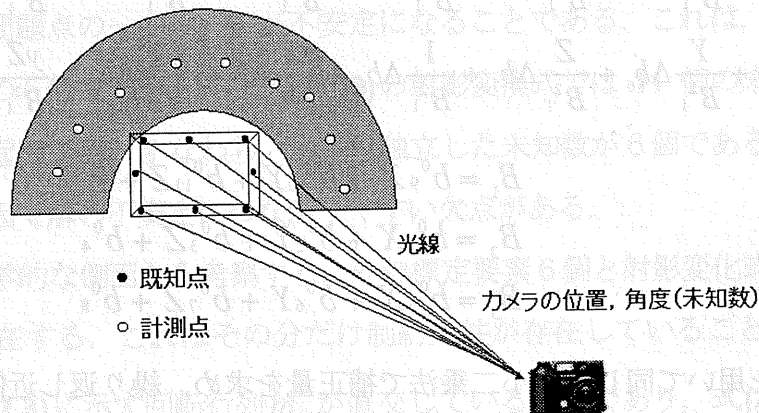


図 2.7.1 外部標定要素近似値取得の概念図

ひとたび外部標定要素が求まれば、同じく式(2.7.4)の b_i が求まるので、2枚以上の画像を用いて、画像上の任意の計測点の (x, y) より当該座標の3次元成分 (X, Y, Z) を式(2.7.11)にて求めることができる。

$$\begin{aligned} (b_1 - b_9 x)X + (b_2 - b_{10} x)Y + (b_3 - b_{11} x)Z &= x - b_4 \\ (b_5 - b_9 y)X + (b_6 - b_{10} y)Y + (b_7 - b_{11} y)Z &= y - b_8 \end{aligned} \quad (2.7.11)$$

式(2.7.11)において、前述と同様最小二乗法にて解 (X, Y, Z) を求める。図 2.7.2 に任意の計測点の3次元座標を求める手法の概念を示す。

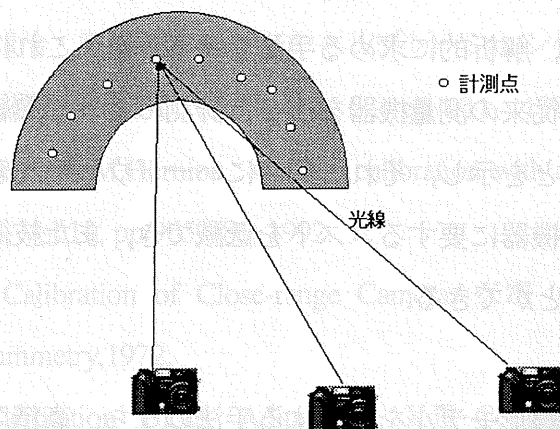


図 2.7.2 計測点の 3 次元座標を求める概念図

厳密には式(2.7.4)においてもレンズ歪みなどの系統誤差の影響を補正し、重みを考慮すれば解の精度を向上させることが可能であるが、ここでは近似値を取得するのを目的とするため、そこまでの高精度は必要とせず、むしろ簡便な方法で近似値を求めることを重視した手法を適用する。

2.8 第 2 章のまとめ

本章は逆解析の基礎理論における地盤の変形および変状を表すモデルパラメータ(未知数)を明らかにし、解析対象となるモデルの構築を行った。このモデルは計測点とその像の幾何学的な関係から容易に導かれるものであるが、モデルパラメータから見て非線形なものである。従って、解析においては非線形から線形な方程式へと変換する必要があるが、その過程における地盤挙動を計測対象にした場合の問題点を本章では明らかにし、次のような結論を得た。

- (1) 幾何学的な関係から構築されたモデルであるため、その幾何学の成立を妨げる要因を排除する必要がある。その要因の一つに計測時に系統誤差として発生するレンズ歪み

がある。本研究においてはモデルにおいて、このレンズ歪などカメラの内部構造に関する要素を設定し、解析的に求める手法を考察した。これによりカメラに関する情報が不要で、例えば従来の測量機器を使った計測のような熟練した技術を要しない計測法が確立できることを示し、それと同時にハードウェアを容易に構成することが可能となるため、計測機器に要するコストを低減でき、また技術導入が容易な計測システムを完成させることができる。

- (2) 非線形モデルから線形モデルを形成する手法のうち、高精度の計測に対応する線形化プロセスは、モデルパラメータに関する近似値を必要とし、地盤挙動の計測には不適である。それに対して、本章では近似値取得のための手法を考察し、カメラによる撮影という簡便な計測作業だけで近似値取得することを可能にし、その後の高精度の解析へと連携する工程を確立した。

また、これにより多数の計測点を任意の位置に配置しても、簡便な計測作業で高精度に当該計測点の 3 次元座標を求めることができるので、地山の面的な挙動を容易に解析することができる。

参考文献

- 1) 久保司郎：逆問題，培風館，1992.
- 2) 日本写真測量学会：解析写真測量，1996.
- 3) Y.A.Abdel-Aziz and H.M.Karara : Direct of linear transformation from comparator coordinates into object space coordinated, In ASP Symposium into Close-range Photogrammetry, Falls Church, Virginia, American Society of Photogrammetry, pp.1-18, 1971.
- 4) E.K.Mikhail, J.S.Bethel and J.C.McGlone : Introduction to Modern Photogrammetry, John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- 5) G.Healey and R.Kondepudy : CCD camera calibration and noise estimation, CVPR, pp.90-95,

1992.

- 6) 村井俊治・松岡龍治・奥田勉：セルフキャリブレーション付きバンドル法の精度比較，
東京大学生産技術研究所報告，Vol.29, No. 6, pp.4-11, 1981.
- 7) J. Weng, P.Cohen and M.Herniou : Camera calibration with distortion models and accuracy
evaluation, T-PAMI, Vol.14, pp.965-980, 1992.
- 8) D.C.Brown : Calibration of Close-range Camera, X II Congress of the International
Society of Photogrammetry, 1972.
- 9) H.Ebner, Self Calibration Block Adjustment, XIII Congress of the International Society for
Photogrammetry, Helsinki, 1976.
- 10) S.I. Granshaw : Bundle Adjustment Methods in Engineering Photo- grammetry ,
Photogrammetric Record, Vol.10, No.56, pp.181-207, 1980.
- 11) P.R.Wolf and B.A.Dewitt : Elements of Photogrammetry with Applications in GIS. McGraw-
Hill 3rd edition, 2000.
- 12) D.C. Brown : Close-Range Camera Calibration, Photogrammetric Engineering, Vol.37, No.8,
pp.855-866, 1971
- 13) T.A.Clarke, J.F.Fryer and X.Wang : The principal point and CCD cameras, Photogrammetric
Record, Vol.16, No.92, pp.293-312, 1998.
- 14) 田島稔・小牧和雄：最小二乗法の理論とその応用 [改訂版]，東洋書店，1996
- 15) 中根勝見：測量データの3次元処理，東洋書店，1994
- 16) 柳井晴夫・竹内啓：射影行列・一般逆行列・特異値分解，東京大学出版会，1983

第3章 デジタル写真測量技術の数値解法

前章において、逆解析のための陽的な線形のモデルを導いた。本章では、このモデルからモデルパラメータを求める手法を考察する。一般的には最小二乗法から導かれる正規方程式を解くことにより解は得られる。しかしながら、地山挙動を計測対象とした場合、座標軸をどのように決定するかという問題が発生する。すなわち、固定された基準点が設置される場合は問題がないが、広範囲の地すべり挙動を対象にした場合や、あるいは精密に計測する対象が不明な斜面崩壊などを対象にした場合、基準点を設置する場所の選定が困難であり、基準点を用意しないで変形・変状を解析する手法が必要とされる。しかし基準点無しに対象空間座標系において座標軸を決定することは、正規方程式の解の存在と一意性に関する数学的な工夫が要求される。

これまでの逆解析の手法では、陽的な解析モデルが構築されれば、あとは数学的取り扱いで解を求めることができる。例えば、最小二乗解を求める過程を含めて、これまで長方形行列や **rank** 欠損により逆行列が存在しない場合などにも対応するように、一般逆行列の手法が提供されている。正規方程式から逆行列を用いて解く手法は、計算過程で桁落ちが発生するので、精度が悪くなり回避される場合が多いために、一般に特異値分解が用いられてきたことは序論にて述べた。

ここで、あらためて特異値分解と最小二乗解の関係を考察する。

特異値分解は、行列 A を固有値固有値 Λ と固有ベクトル U と V の積に分解する手法であり、 $A = U\Lambda V^T$ とする。両辺に U^T , Λ^{-1} , V を順に掛けていくことで、解を直接(3.1)として求める手法である。

$$X = (V\Lambda^{-1}U^T)e \quad (3.1)$$

これを後述する正規方程式 $(A^T A)X = A^T e$ に当てはめ、 $(U\Lambda V^T)X = Ye$ とすることで

$$A^T A = (U\Lambda V^T)^T (U\Lambda V^T) = V\Lambda U^T U\Lambda V^T = V\Lambda^2 V^T \quad (3.2)$$

を得る。この式は、 $(A^T A)^{-1} = V\Lambda^{-2}V^T$ から、

$$X = (A^T A)^{-1} A^T e = (V \Lambda^{-2} V^T)(U \Lambda V^T)^T e = (V \Lambda^{-1} U^T) e \quad (3.2)$$

とすることができる。式(3.1)と(3.2)を比較すれば、特異値分解も最小二乗解と同じ解を求めており、繰り返し計算が無い分だけ計算過程上、桁落ちに対して有利であることが分かる。また、一般逆行列に対しても特異値分解で直接対応することができるので、逆解析においては、一般にこの手法が選択される [松岡 (1986)]。

しかしながら、逆解析過程において最小二乗解を用いる場合、その重みが重要な意味を持つ。特に本研究では、モデルパラメータの物理的な意味を考えながら重みをつける必要があり、それによって解の精度が大きく左右されてしまう。これは、遠方の対象物を計測し、また限られた範囲での撮影しかできないという地盤挙動を評価するための計測に対処するためには必要な手法であり、単に特異値分解によって数学的に解を求める手法を用いたのでは、従来の写真測量やコンピュータビジョンの延長線上の計測しかできず、高精度で地山挙動を追跡するモニタリングシステムの構築が不可能である。

本研究では、物理的意味を考慮しながら数値解法を導いていく。これにより、前章で幾何学的に導いたモデルと数値解法を結びつけて考えることができ、最小二乗条件に拘束条件を付与する場合でも、その拘束条件を対象とする地山挙動や撮影状態に応じて設定することが可能になる [Granshaw(1980)]。本報告では、この解法を導く基としてベクトル空間の概念を利用する。本章では擬似逆行列の概念を含めて、空間の中で解を探索する手法を駆使し、拘束条件も幾何学的に導出させる。

3.1 基準点の存在のもとでの最小二乗解

式(2.6.4) である $\mathbf{v} + A\mathbf{x} = \mathbf{e}$ において、まず残差の 2 乗を最小にする最小二乗条件から未知数を求める [田島・小牧 (1996)]。残差の 2 乗は式(3.1.1)の条件で表せる。

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v} = (\mathbf{e} - A\mathbf{x})^T (\mathbf{e} - A\mathbf{x}) \quad (3.1.1)$$

最小 2 乗法においては、未知数の重みを考慮する必要がある。式(2-36)においても、あらかじめ計測された値、例えば固定された基準点が設置されているような場合はその未知数の重みを大きくすることを考慮する。従って、式(3.1.1)においても重み行列である式

(3.1.2)を導入する。計測において、計測点の中に精度の優劣をつける場合は、この重み行列で調整する [中根 (1994)]。

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & & & 0 \\ & w_2 & & \\ & & w_3 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & w_n \end{pmatrix} \quad (3.1.2)$$

式(3.1.1)に重み行列(3.1.2)を導入すると式(3.1.3)となる。

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i v_i^2 = \mathbf{v}^T W \mathbf{v} = (\mathbf{e} - A\mathbf{x})^T W (\mathbf{e} - A\mathbf{x}) \quad (3.1.3)$$

ここで、重みを式(3.1.4)のように表す。

$$w_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \quad (3.1.4)$$

σ_i^2 は事前分散とも称され、その決定には二つの方法がある。一つは、観測の結果得られた分散を用いる方法であり、もう一つは誤差構造を決めて経験的に求めた値を用いる方法である。前者は統計学的には母分散が未知で標本分散を用いる場合であり、後者は母分散が既知の場合に相当する。すなわち、あらかじめ経験的に設定される分散値である。本研究では計測点の画像上の計測値についての経験値を設定する。

σ_0^2 は数値のスケールを調整するための定数で事前基準分散と称され、 $w_i = 1$ のとき $\sigma_0^2 = \sigma_i^2$ の条件を満たす定数である。この比例定数を導入することにより、残差は標準化され、その結果いくつもの観測値を統合的に処理でき、また計算上のオーダーを揃える便宜を図ることができる。例えば、残差が μm のオーダーの値であり、他の数値と比較して極端に小さい場合、標準化されることにより計算の際の桁数の違いによる不便さを解消することができる。

残差ベクトル $\mathbf{e}$ の分散共分散行列は、誤差の各要素が偶然誤差のみで相関を持たないので、式(3.1.5)のよう表される。

$$\Sigma_e = E(ee^T) = E \begin{pmatrix} e_1 e_1 & e_1 e_2 & \cdots & e_1 e_n \\ e_2 e_1 & e_2 e_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ e_n e_1 & \cdots & \cdots & e_n e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \quad (3.1.5)$$

従って、式(3.1.4)の重み行列は、この値の逆数を用いて式(3.1.6)となる。

$$W = \begin{pmatrix} \sigma_0^2 / \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \sigma_0^2 / \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_0^2 / \sigma_n^2 \end{pmatrix} = \sigma_0^2 \Sigma_e^{-1} \quad (3.1.6)$$

これらの重みを導入した式(3.1.3)では、その停留値を求めるために左辺を $\mathbf{x}$ で偏微分して 0 とおいた式は(3.1.7)となる。

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}) = 2A^T W \mathbf{e} - 2(A^T W A) \mathbf{x} = 0 \quad (3.1.7)$$

式(3.1.7)を整理して式(3.1.8)で表される正規方程式が導かれる。

$$(A^T W A) \mathbf{x} = A^T W \mathbf{e} \quad (3.1.8)$$

これより、左辺が逆行列をもてば、未知数の推定値 $\hat{\mathbf{x}}$ は式(3.1.9)より求めることができる。

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T W A)^{-1} A^T W \mathbf{e} \quad (3.1.9)$$

3.2 基準点が存在しない場合の解法

3.2.1 座標軸と rank 欠損の関係

式(3.1.8)において $A^T W A = N$ とおき、その解を $\hat{\mathbf{x}} = N^{-1} A^T W \mathbf{e}$ とすることは、係数行列 N の rank が未知数の数に等しく rank 欠損が無いという前提のもとに求めたものである。行列の rank は「行列の 1 次独立な行ベクトルあるいは列ベクトルの最大個数」と定義されるが、rank の数は未知数より成る図形の座標軸の決定問題と関係している。ある空間内に座標軸を設けた場合、その並進、回転および長さを拘束しなければ、座標軸は固定されない。図 3.2.1 に座標軸を固定する概念を示す [中根 (1994)]。

従って、式(3.1.9)により求められる解は、基準点が座標軸を決定するのに足りる数だけ設置されている場合の解であると言える。

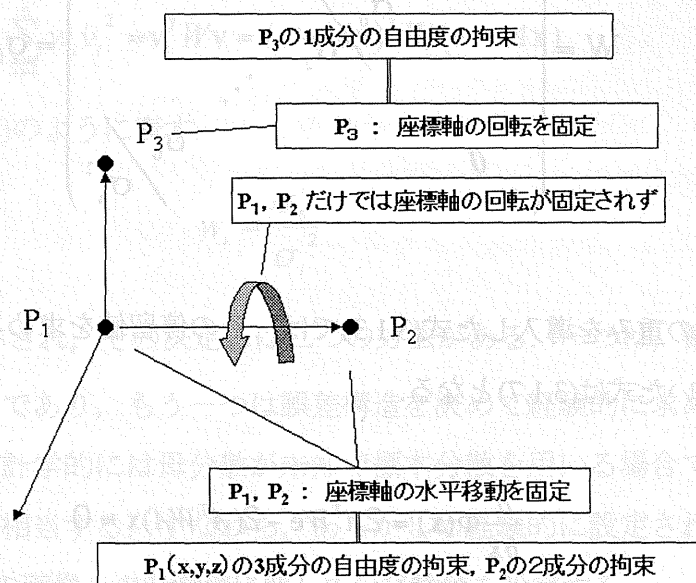


図 3.2.1 座標軸の固定の概念

並進を固定するには、まず 1 点をどこかに固定する必要がある。例えば、図 3.2.1 における点 P_1 を考える。ここで点 P_1 の 3 つの座標成分値が指定される。次に方向を定める点 P_2 を固定すれば、座標軸の 1 つが固定され、座標軸全体の並進が固定される。しかし、まだ線分 P_1P_2 の回りに座標軸は回転することができるので、これを固定しなければ座標軸は決定されない。このためは、点 P_3 を用意すれば良いが、点 P_3 の 3 成分すべてを固定する必要は無く、1 つの成分を固定すれば回転は固定される。これは、座標軸を決定する際の自由度の問題であり、空間内で座標軸は並進と回転に関して 6 個の自由度を有し

ていることになる。これは、そのまま係数行列 N の rank 欠損として現れ、未知数の方が方程式より多い状態、即ち逆行列 N^{-1} が存在しないことを意味する。

また、並進や回転といった運動に関するものだけでなく、長さに関する情報も座標軸決定には必要なものである。これは、図 3.2.1 においては点 P_2 に 1 成分を加えれば情報として与えられ、1 の自由度を有している。このように、基準点を設けない計測においては 7 つの自由度を有した状態での解析を行うことになり、数学的には係数行列 N において 7 つの rank 欠損を生じていることになる。従って、基準点を設けることによって座標軸を固定する場合は、ここで述べたような座標成分が設定できる固定点を用意して計測を行う。

その一方で、既に述べたように地盤挙動を評価する場合は基準点を設けることが困難なことが多く、座標軸を決定することができない場合の計測方法を確立させる必要がある。

これを解決するためには次のような手法が選択できる。

- 1) 対象空間内に固定点を人工的に設ける。
- 2) 異種観測により自由度に相当する計測点の座標成分を計測する。
- 3) ランク欠損を補う拘束条件を設定する。

1) や 2) は地盤挙動を計測する際には適しない場合が多い。すなわち、計測対象近傍に固定点を設けることや、いくつかの計測点を他の計測手法で精密に計測することは、計測作業の煩雑さを伴い、本計測手法の有用性を妨げるものとなる。そこで、本計測においては、3) の拘束条件により rank 欠損を補うことを考え、基準点となる固定点が無い場合の解法として擬似逆行列を用いた数値解法を考察する [G.Strang (1996)]。

3.2.2 最小二乗解の概念

まず、一般化された例として、モデルパラメータと観測データが、式(3.2.1)のように線形もしくは線形化された関係にある場合を考える。

$$Ax = d \quad (3.2.1)$$

いま、 A を m 個の観測方程式と n 個の未知数を表す m 行 n 列の行列とする。 A x が形成するベクトルは A の列空間内 $R^n(A)$ に存在する。 R は空間を意味し、添字 m は空間の

次元を表す。Aの列空間とは式(3.2.2)のように係数行列Aをその成分で表した際、式(3.2.3)で表現される列ベクトルが形成する空間である。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

$$a_1 = [a_{11} \quad \cdots \quad a_{m1}], \cdots, a_n = [a_{1n} \quad \cdots \quad a_{mn}] \quad (3.2.3)$$

また、式 (3.2.4) で表されるAの行ベクトルからなる行空間 $R^n(A^T)$ も同様に定義される。

$$a_1 = [a_{11} \quad \cdots \quad a_{1n}], \cdots, a_n = [a_{n1} \quad \cdots \quad a_{nn}] \quad (3.2.4)$$

A $\mathbf{x}$ 任意の係数行列Aと任意の $\mathbf{d}$ に対して解 $\mathbf{x}$ が定められるとき、 $A\mathbf{x}$ が形成するベクトルは、前記列空間内に存在する。 $A\mathbf{x}$ は、図 3.2.1 のように、行空間 $R^n(A^T)$ から列空間 $R^m(A)$ への写像と見ることもできる。

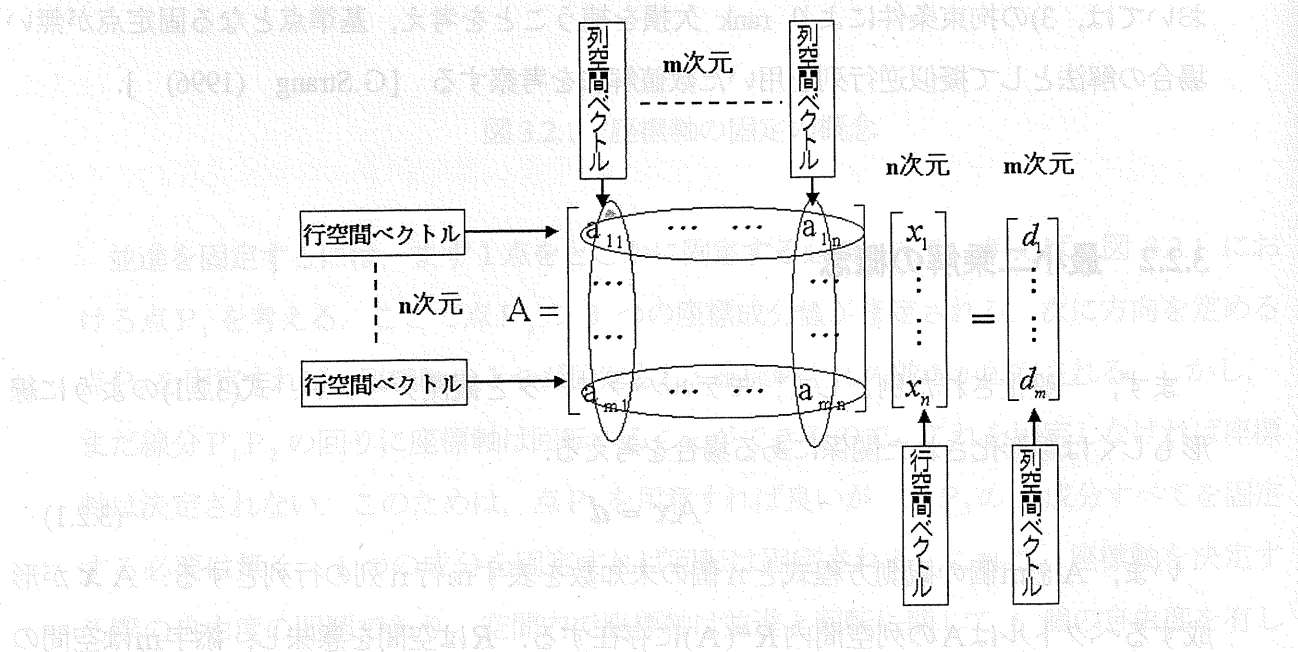


図 3.2.1 行空間から列空間への写像

式(3.2.1)は式(3.2.5)のように書き換えることができ、 $A\mathbf{x}$ は列空間ベクトル(3.2.5)に示すように、未知数ベクトル $\mathbf{x}$ の重みがついた線形結合として表すことができる。従って、図 3.2.2 に表されるように、 $\mathbf{d}$ がこの列空間内に存在する際、式 (3.2.1) は解をもつ。

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

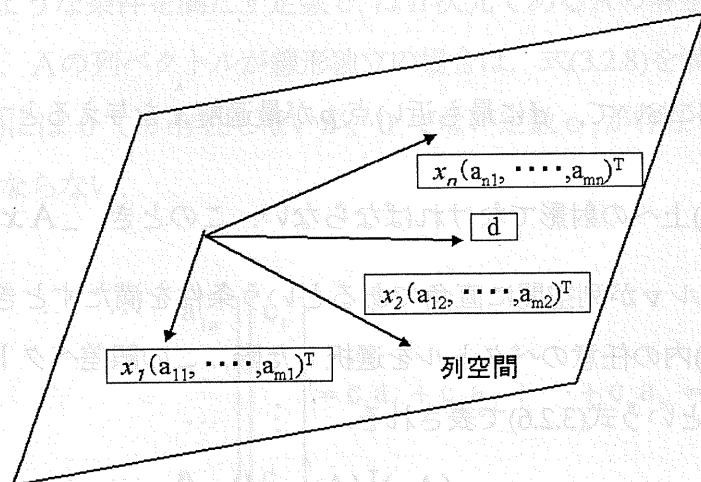


図 3.2.2 $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$ が解をもつ状態

しかし、一般に誤差によって $\mathbf{d}$ は列空間内にない場合が多く、その最適解を選択する必要が生じる。誤差ベクトル $\mathbf{v}$ は $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{d}$ で表されるので、この値が最小になるものを解として選ぶのが最適であると言える。これは列空間内上の点 $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ と $\mathbf{d}$ との距離であり、 $\mathbf{d}$ の列空間 $R^m(A)$ への射影である $\mathbf{p}$ の位置を求めることとなる。

誤差ベクトルの距離を最小にすることは、数学的に言えば最小二乗解を考えることと

等しい意味をもつ。図 3.2.3 はベクトル空間による最小二乗解の概念を示す。

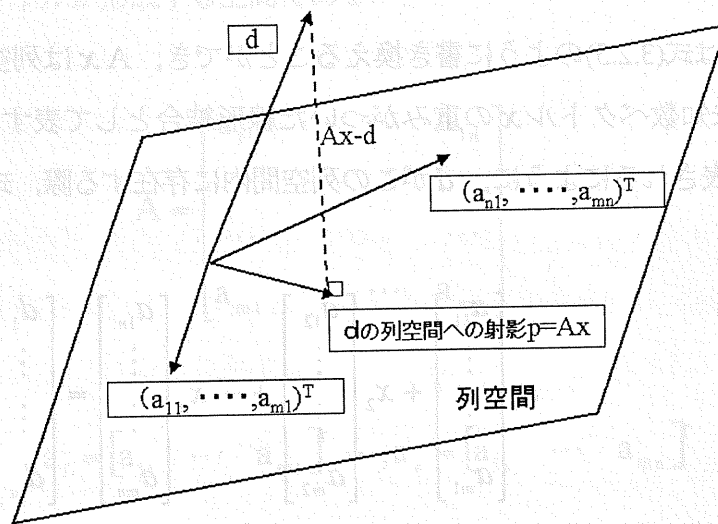


図 3.2.3 最小二乗解の概念

図 3.2.3 において、 d に最も近い点 p が最適解 $\hat{x}$ を与えるとすれば、 $A\hat{x}$ は d の A の列空間 $R^m(A)$ 上への射影でなければならない。このとき、 $\|A\hat{x} - d\|$ が最小になるのは、誤差ベクトル v が列空間に直角であるという条件を満たすときである。 A の列空間ベクトル $R^m(A)$ 内の任意のベクトルを選択した際、この誤差ベクトルに直交する条件は内積が 0 であるという式(3.2.6)で表される。

$$(Ay)^T (A\hat{x} - d) = 0 \quad (3.2.6)$$

$$y^T (A^T A \hat{x} - A^T d) = 0$$

この第 2 式がいかなる y においても成立するためには、式(3.2.7)の条件が満たされることである。

$$A^T A \hat{x} - A^T d = 0 \quad (3.2.7)$$

これは正規方程式(3.1.8)を意味する。このとき A の列ベクトルが線形独立であれば、 A の rank は n であり、 $A^T A$ の rank もまた n となるため行列 $A^T A$ に rank 欠損が無く、式(3.1.9)のように左から逆行列をかけることにより解が求められる。

3.2.3 ベクトル空間による一般解の概念

次に A の列ベクトルが線形独立でない場合を考える.

$A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n)$ のように A が n 本の列ベクトル $\mathbf{a}_i$ で構成されている場合, 列ベクトルが線形独立でないということは, 定数 c_i を用いて式(3.2.8)のような多項式を考えたとき, 0 でない定数 c_r が存在することを意味する.

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_n \mathbf{a}_n = 0 \quad (3.2.8)$$

一方, 式(3.2.9)のような条件を満たす定数 c_i は n 次元である A の零空間 $N^n(A)$ と称される空間を形成する. A の列ベクトルが線形独立の場合は, 式(3.2.8)を満たす定数 c_i が形成する零空間 $N^n(A)$ には 0 しか存在しないが, 0 でない定数 c_r が存在するとき, 列ベクトルは線形独立とはならない.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \dots & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \dots & & & \dots \\ \dots & & & \dots \\ \mathbf{a}_{m1} & \dots & \dots & \mathbf{a}_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_n \mathbf{a}_n = 0 \quad (3.2.9)$$

また, $\mathbf{w}$ を零空間 $N^n(A)$ の任意のベクトルとすると $A\mathbf{w} = 0$ であり, これは式(3.2.10)のように表せる.

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{a}_1 & - \\ -\mathbf{a}_2 & - \\ \dots & \\ \dots & \\ -\mathbf{a}_n & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2.10)$$

式(3.2.10)において、 A の第1行目を見れば、この第1行目は $\mathbf{w}$ と内積 $=0$ の関係があること、すなわち両者が直交していることを示す。順に n 行まで見ていくと、行ベクトルからなる行空間 $R^n(A^T)$ と零空間 $N^n(A)$ が直交していることを示す。また、零空間 $N^n(A)$ は単に行空間に直交するのではなく、そのようなすべてのベクトルを含んでいる。一般にベクトル空間 V 上のすべてのベクトルとベクトル空間 W 上のすべてのベクトルが直交するとき、互いに直交補空間の関係にあるという。式(3.2.10)より、行空間 $R^n(A^T)$ と零空間 $N^n(A)$ は直交補空間の関係にあることが分かる。

直交補空間の関係にある V と W が R^n の部分空間であるとき、その次元 $\dim$ について式(3.2.11)が成り立つ。

$$\dim(V) + \dim(W) = n \quad (3.2.11)$$

これは、 n 次元空間を考えたとき、その空間上のベクトルを N とすれば、 V と W の空間上のベクトルの和に分割されることを意味する。すなわち、部分空間 V と W の両方の空間に射影されたベクトルで N は構成される。図 3.2.4 に空間の直交分解の概念を示す。

この概念から、任意のベクトルは2つの直交する部分空間である行空間 $R^n(A^T)$ と零空間 $N^n(A)$ に分解することが可能であることが分かり、このことが後述する式(3.2.12)の解の概念につながっていく。

そこで、 $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$ の解について考える。解である任意のベクトルは R^n の直交補空間である行空間への射影と零空間への射影に分解できるので、これを $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_r + \mathbf{w}$ と表す。ここで $\mathbf{x}_r$ は行空間上への射影であり、 $\mathbf{w}$ は零空間上への射影である。 $A\mathbf{x}_0$ という写像を考えると、 $A\mathbf{w} = 0$ より式(3.2.12)が導かれる。

$$A\mathbf{x}_p = A(\mathbf{x}_r + \mathbf{w}) = A\mathbf{x}_r + A\mathbf{w} = A\mathbf{x}_r = \mathbf{d} \quad (3.2.12)$$

すなわち、 $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$ 一般解 $\mathbf{x}_0$ は、(特殊解 $\mathbf{x}_r$) + (同時方程式($A\mathbf{x} = 0$)の解)の和として表され、これは行空間 $R^n(A^T)$ の成分 $\mathbf{x}_r$ と任意の零空間 $N^n(A)$ の成分 $\mathbf{w}$ の和が解になることを示す。またその一方で、零空間の成分 $\mathbf{w}$ が0でない場合には無限に存在することを意味する。

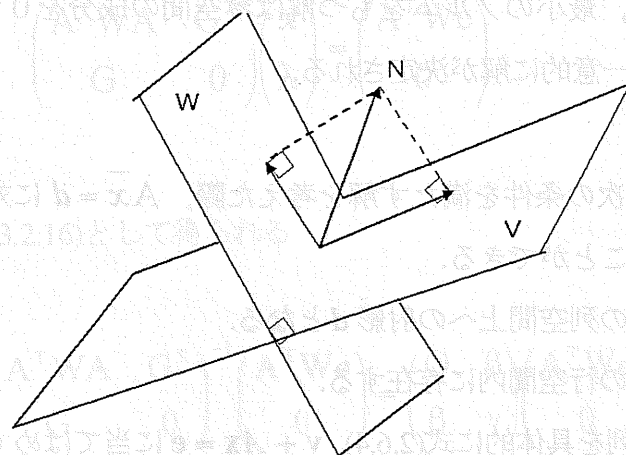


図 3.2.4 直交補空間の概念図

3.2.4 擬似逆行列による解法

次に、擬似逆行列を定義する。

$Ax = d$ にて最適解 $\bar{x}$ が、 $\bar{x} = A^+d$ にて得られるとき A^+ を擬似逆行列と称す。

$Ax = d$ において解が一意に存在しない場合でも擬似逆行列 A^+ は存在する。その場合、 $\bar{x} = A^+d$ を満たす $\bar{x}$ が解となる。これまで述べてきた空間の概念を用いて、 $A\bar{x} = d$ の解 x_0 について次のことが導ける。ただし、方程式は一意に定まる解を持たない場合を考え、 x_0 は多数存在する解の一つとする。

- 1) 解 x_0 は行空間 $R^n(A^T)$ の成分 x_r と任意の零空間 $N^n(A)$ の成分 w の和で表されるが、解 x_r は $Ax = d$ の解でもある。従って、 $Aw = 0$ より次式が成立する。

$$Ax_r = A(x_r + w) = Ax_0 = d$$

- 2) 解 $x_0 = x_r + w$ の長さ (ノルム) は、行空間 $R^n(A^T)$ のベクトル x_r と零空間 $N^n(A)$ のベクトル w が直交することから、次のように表せる。

$$\|x_r + w\|^2 = \|x_r\|^2 + \|w\|^2$$

従って、最小のノルムをもつ解は零空間の成分を0とした場合であり、これは同時に一意に解が決定される。

これより、次の条件を満たす解を考えた際、 $A\bar{x} = d$ に対して、 $\bar{x} = A^+d$ なる擬似逆行列を見出すことができる。

1) $A\bar{x}$ は A の列空間上への射影 d となる。

2) 解 $\bar{x}$ は A の行空間内に存在する。

この擬似逆行列を具体的に式(2.6.4) $v + Ax = e$ に当てはめて考える。

まず、 $Ax = e$ において、係数行列 A の $AG^T = 0$ を満たす零空間 $N^n(A)$ のベクトル $G = [g_1 \ \cdots \ g_n]$ を考える。

求める解である行空間 $R^n(A^T)$ におけるベクトル x_r は、 $AG^T = 0$ を満たす零空間ベクトルに直交することから、 $Gx = 0$ となるベクトル x を求めると、それは行空間 $R^n(A^T)$ 内に存在する解 $\bar{x}$ となる。また、 $Gx = 0$ が成立することから、 $\|x\|$ はノルム最小解である。

最小二乗解とノルム最小解の両者を満たす解は式(3.2.13)の方程式の解となる。

$$\begin{aligned}\Phi(x, \lambda) &= \frac{1}{2} v^T W v - \lambda^T G x \\ &= \frac{1}{2} (e - Ax)^T W (e - Ax) + x^T G^T \lambda\end{aligned}\quad (3.2.13)$$

但し、 λ はラグランジュ乗数である。

この式(3.2.13)の停留値を求め、式(3.2.14)を得る。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \Phi &= (A^T W A) x - A^T W e + \lambda G^T = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi &= G x = 0\end{aligned}\quad (3.2.14)$$

正規方程式は式(3.2.15)となる。

$$\begin{pmatrix} A^T W A & G^T \\ G & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T W \mathbf{e} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.15)$$

これより，解は式(3.2.16)として得られる。

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T W A & G^T \\ G & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A^T W \mathbf{e} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & \beta \\ \beta^T & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T W \mathbf{e} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.16)$$

3.2.5 ノルム最小の最小二乗解の導出

次に具体的に式(3.2.15)を計算し，最適解 $\hat{\mathbf{x}}$ を導く。

I_i を i 次の単位行列として，逆行列の定義から式(3.2.17)を導く。

$$\begin{pmatrix} A^T W A & G^T \\ G & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & \beta \\ \beta^T & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix} \quad (3.2.17)$$

展開して式(3.2.18)を得る。

$$\begin{aligned} A^T W A Q + G^T \beta^T &= I_m \\ A^T W A \beta + G^T \gamma &= 0 \\ G Q &= 0 \\ G \beta &= I_r \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

第1式の左から G をかけ，式(3.2.19)を得る。

$$G A^T W A Q + G G^T \beta^T = G \quad (3.2.19)$$

$G A^T = 0$ であることより式(3.2.20)となる。

$$\beta^T = (GG^T)^{-1}G \quad (3.2.20)$$

この結果を式(3.2.18)の第1式に代入し、さらに式(3.2.18)の第3式に G^T をかけたものを加えて式(3.2.21)を得る.

$$A^TWAQ = I_m - G^T(GG^T)^{-1}G \quad (3.2.21)$$

また式(3.2.18)の第2式に左から G かけ、 $GA^T=0$ より式(3.2.22)を得る.

$$\begin{aligned} G^TG\gamma &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

次に式(3.2.18)の第2式と第4式の左から G^T をかけたものを加えると式(3.2.23)となる.

$$(A^TWA + G^TG)G^T(GG^T)^{-1} = G^T \quad (3.2.23)$$

また、式(3.2.21)に式(3.2.23)の右から $(GG^T)^{-1}G$ をかけたものを加えて式(3.2.24)を得る.

$$(A^TWA + G^TG)(Q + G^T(GG^T)^{-1}(GG^T)^{-1}G) = I_m \quad (3.2.24)$$

$(A^TWA + G^TG)$ は正則であるので、式(3.2.25)となる.

$$Q = (A^TWA + G^TG)^{-1} - G^T(GG^TGG^T)^{-1}G \quad (3.2.25)$$

式(3.2.20), (3.2.22) および(3.2.25)をまとめて、式(3.2.26)が示される.

$$\begin{pmatrix} A^TWA & G^T \\ G & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Q & G^T(GG^T)^{-1} \\ (GG^T)^{-1}G & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.26)$$

(AED) この擬似逆行列による解法により、基準点の無い場合においても未知数を求めることができる。本研究は、この擬似逆行列を用いて正規方程式を解いていく。

3.3 擬似逆行列の成立条件

正則な正方行列Aの場合、逆行列Bがただ 1 つ存在し、I を単位行列とすると式(3.3.1)が成り立つ。

$$AB = I \quad \text{および} \quad BA = I \quad (3.3.1)$$

しかし、長方形行列Aを考えると、式(3.3.1)を満たすような行列Bを見出すことはできない。このような行列に対しては、より一般化された逆行列 B^{-} の条件として式(3.3.2)を考える。

$$AB^{-}A = A \quad (3.3.2)$$

式(3.3.2)で定義される行列は、一般逆行列と称される。

この一般逆行列の意味を考察するために、 $(m \times n)$ の行列Aに関する方程式 $Ax = y$ を考える。この方程式の解を $x = By$ とし、ベクトル y の特別なものとしてAの列ベクトルのうちi番目のベクトル a_i について考える。

$Ax = y$ が解をもつ必要十分条件は、 y がAの列ベクトル空間 $R^m(A)$ 内に存在することであった。 a_i はAの列ベクトルであるので、 $Ax = a_i$ は解をもち、列ベクトルの線形結合である $x = Ba_i$ が解となる。これより式(3.3.3)が成立する。

$$ABa_i = a_i \quad (3.3.3)$$

(AED) 式(3.3.3)は、すべての a_i について成立するため、式(3.3.4)もまた成立する。

3.4 拘束条件の成立

$$ABA=A \quad (3.3.4)$$

これは一般逆行列の定義に等しく $B=B^-$ である. すなわち解の存在が式(3.3.2)における一般逆行列 B^- の存在を意味していることが示される.

しかしながら, 一般逆行列は一意に決定することができない. 本研究で言えば, 座標軸を決定するに足りる基準点が存在しないことを意味する. そこで, 最小二乗条件およびノルム最小条件などを考慮して行列 B^- を一意に定める. この B^- が擬似逆行列と呼ばれるもので, これはムーアペンローズ一般逆行列 (Moore and Penrose generalized inverse) とも称される. そして, この擬似逆行列が式(3.3.5)に示す4つの条件を満足した場合に, 擬似逆行列 B^+ を一意に定めることができる. なお, 4つの条件は一般逆行列, 反射型一般逆行列, ノルム最小型一般逆行列および最小二乗型一般逆行列と称される [武者・岡本 (1996), 半谷・川口 (1991)].

- 1) $AB^-A=A$: 一般逆行列の条件
 - 2) $B^-AB^-=B^-$: 反射型一般逆行列の条件
 - 3) $(B^-A)^T=B^-A$: ノルム最小型一般逆行列
 - 4) $(AB^-)^T=AB^-$: 最小二乗型一般逆行列
- $$(3.3.5)$$

ここでは, 式(3.2.25)である $Q=(A^TA+G^TG)^{-1}-G^T(GG^TGG^T)^{-1}G$ が擬似逆行列の条件を満たすことを証明する.

重み行列を省略し, 式(3.2.21)に右から A^TA をかけると式(3.3.6)を得る.

$$(A^TA)Q(A^TA)=(A^TA)-G^T(GG^T)^{-1}G(A^TA) \quad (3.3.6)$$

$AG^T=0$ であり, $GA^T=0$ であることから, 式(3.3.7)が導かれる.

$$(A^TA)Q(A^TA)=(A^TA) \quad (3.3.7)$$

これより式(3.3.7)は, 一般逆行列の条件を満たしていることが分かる.

次に式(3.2.21)の左から Q をかけると式(3.3.8)を得る.

$$Q(A^T A)Q = Q - QG^T(GG^T)^{-1}G \quad (3.3.8)$$

式(3.2.18)より $GQ = 0$ であり, $QG^T(GG^T)^{-1}G = 0$ である. したがって式(3.3.9)が成り立つ.

$$Q(A^T A)Q = Q \quad (3.3.9)$$

この式(3.3.9)は反射型一般逆行列の条件を示している.

また式(3.2.25)に左から $A^T A$ をかけると式(3.3.10)を得る.

$$(A^T A)Q = (A^T A)(A^T A + G^T G)^{-1} \quad (3.3.10)$$

また式(3.2.25)の右から $A^T A$ をかけ, $AG^T = 0$ を用いれば, 式(3.3.11)を得る.

$$Q(A^T A) = (A^T A + G^T G)^{-1}(A^T A) = \{(A^T A)(A^T A + G^T G)^{-1}\}^T \quad (3.3.11)$$

$(A^T A + G^T G)^{-1}$ が対称行列であることを利用すると, 式(3.3.10)および式(3.3.11)より

最小二乗型一般逆行列とノルム最小型一般逆行列の条件(3.3.5)を満足する. 同様にして, 最小二乗の条件(3.3.5)も満たしていることも確認される.

このように, $AG^T = 0$ という直交条件を成立させる零空間ベクトルを選択すると, 最小二乗およびノルム最小を満足する擬似逆行列による最適解を得ることができることが証明された [柳井・竹内 (1993)].

3.4 拘束条件の確立

前節における式(3.1.8)において $A^T W A = N$ としたとき、係数行列 N の rank は未知数より成る図形の座標軸の決定問題と関係しており、地盤挙動を計測対象とする場合には、座標軸の並進、回転および長さを拘束しなければ座標軸が固定されず、それは係数行列 N に rank 欠損が生じ一意に解を決定することができないことを述べた。そのために、本研究では擬似逆行列を用いた解法を考察したのであるが、本節では式(3.1.8)における $(A^T W A)x = A^T W e$ を解くための $AG^T = 0$ という直交条件を成立させる拘束条件を幾何学的に求め、擬似逆行列による数値解法を完成させていく [原田 (2001)]。

拘束条件は座標軸を固定するためのものであり、図 3.2.1 に示す 7 つの自由度を解消するものである。まずこの 7 つの自由度のうち、長さを拘束するための条件の考察を行う。これは、本研究による手法で求められるモデルパラメータによって構成される計測対象物は、実物のものと相似の関係にあり、合同すなわちその寸法に関しては同じ物とはならないためである。本研究では、あらかじめ精密に長さを測定した基準尺を作り、計測時に当基準尺を対象物と同時に画像に写しこむことで寸法に関する情報を得る。そして、この基準尺による寸法の情報の付与が長さの拘束となる。

この長さの拘束においては、2 点間の距離を固定する条件式を作り、これを線形化して共線条件式に取りこむことを試みる。

基準尺の両端の座標を $(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)$ 、その長さを L とすると条件式は式(3.4.1)のようになる。

$$f = (X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2 - L^2 = 0 \quad (3.4.1)$$

線形化のために座標成分を $X_i = X_{i0}$ (初期値) + ΔX_i (補正量) と表し、テーラー展開を行う。ここで各微分係数は式(3.4.2)に示される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial X_1} &= 2(X_1 - X_2) & \frac{\partial f}{\partial X_2} &= -2(X_1 - X_2) \\ \frac{\partial f}{\partial Y_1} &= 2(Y_1 - Y_2) & \frac{\partial f}{\partial Y_2} &= -2(Y_1 - Y_2) \\ \frac{\partial f}{\partial Z_1} &= 2(Z_1 - Z_2) & \frac{\partial f}{\partial Z_2} &= -2(Z_1 - Z_2) \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

そこで、式 (3.4.1) は、式(3.4.3)のように線形化される。

$$\begin{aligned} & 2(X_1 - X_2)\Delta X_1 + 2(Y_1 - Y_2)\Delta Y_1 + 2(Z_1 - Z_2)\Delta Z_1 \\ & - 2(X_1 - X_2)\Delta X_2 - 2(Y_1 - Y_2)\Delta Y_2 - 2(Z_1 - Z_2)\Delta Z_2 = -f_0 \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

ここで、 f_0 は、 f に初期値を代入したときの値である。

基準尺を複数設置した際には、式(3.4.3)は計測点座標に関する条件式になるから、行列で式(3.4.4)のように表現できる。

$$A_s \mathbf{x}_3 = \mathbf{e}_s \quad (3.4.4)$$

A_s は係数行列、 $\mathbf{e}_s$ は計測値と理論的な値との差を意味する残差ベクトルである。

これにより、長さの拘束条件を入れた全体の方程式は式(3.4.5)のようになる。

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & 0 & A_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ e_s \end{bmatrix} \quad (3.4.5)$$

これにより、対象空間座標系において長さの拘束を行うことが可能となる。

次に並進と回転に関する拘束条件を確立する。

まず並進に対する拘束条件を考える。この場合、座標軸を決定するために固定するのは未知数から成る図形の重心とする。従って、重心からの各未知数の座標の重量平均すなわち和が0になる条件を導入すれば、重心の並進が拘束される。

式(2.6.1)の補正量ベクトルに対して、式(3.4.6)による拘束条件を設定する。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \Delta X_{0j} + \sum_{i=1}^n \Delta X_i &= 0 \\ \sum_{j=1}^m \Delta Y_{0j} + \sum_{i=1}^n \Delta Y_i &= 0 \\ \sum_{j=1}^m \Delta Z_{0j} + \sum_{i=1}^n \Delta Z_i &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

式(3.4.6)は、n点の計測点をm枚の画像に撮影した場合を示しており、jは画像の番号をiは計測点の番号を示す。また並進の拘束はrank欠損が生じている係数行列に対して行うものであるため、外部標定要素および計測点の補正量ベクトルに対して考える。内部標定要素に関してはrank欠損が無いので、その拘束条件は考えない。

次に回転の拘束を考える。並進に対するものと同様に、外部標定要素および計測点の補正量ベクトルに対して式(3.4.7)を設定する。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m (Z_{0j} \Delta X_{0j} - X_{0j} \Delta Z_{0j} + \Delta \omega_j) + \sum_{i=1}^n (Z_i \Delta X_i - X_i \Delta Z_i) &= 0 \\ \sum_{j=1}^m (-Z_{0j} \Delta Y_{0j} + Y_{0j} \Delta Z_{0j} + \Delta \varphi_j) + \sum_{i=1}^n (-Z_i \Delta Y_i + Y_i \Delta Z_i) &= 0 \\ \sum_{j=1}^m (-Y_{0j} \Delta X_{0j} + X_{0j} \Delta Y_{0j} + \Delta \kappa_j) + \sum_{i=1}^n (-Y_i \Delta X_i + X_i \Delta Y_i) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

式(3.4.7)においても、n点の計測点をm枚の画像に撮影した場合を示しており、jは画像の番号をiは計測点の番号を示す。式(3.4.6)および式(3.4.7)より、拘束条件となるベクトルGを式(3.4.8)のように作ることができる [Teunissen(1985)].

$$G_1 = \begin{bmatrix} \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -Z_{0i} & Y_{0i} & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & Z_{0i} & 0 & -X_{0i} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & -Y_{0i} & X_{0i} & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{bmatrix} \quad (3.4.8)$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & -Z_j & Y_j & \dots \\ \dots & Z_j & 0 & -X_j & \dots \\ \dots & -Y_j & X_j & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

ここで、G1 は外部標定要素の6つの未知数に対する拘束条件であり、G3 は計測点の3つの未知数に対する拘束条件である。式(3.4.8)の条件を満たすベクトルを $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_6$ とし、これらを並べてできる行列によって拘束条件を満たす行列 (3.4.9) を得る [Akimoto and Fraser(1998)]。

$$\mathbf{G}^T = (\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2 \quad \dots \quad \mathbf{g}_6) \quad (3.4.9)$$

3.5 擬似逆行列成立条件の検証

次に、このように幾何学的に作成した式(3.4.9)の拘束条件が、係数行列Aの零空間ベクトル $N^n(A)$ 内に存在するかどうかを考察する。この条件により、 $\mathbf{A}\mathbf{G}^T = \mathbf{0}$ となり、擬似逆行列の条件を満たすことが言え、前節で検討した解法によって基準点無しの計測を行うことができることが導かれる。

$\mathbf{G}^T$ と式(2.6.4) $\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}$ における係数行列の関係を検討するために、式(3.5.1)に示すような未知数と係数行列と6本のベクトルの対応関係を考える。

	外部標定要素						対象点座標				
	ΔX_0	ΔY_0	ΔZ_0	$\Delta\theta$	$\Delta\phi$	$\Delta\kappa$	$\dots$	ΔX	ΔY	ΔZ	$\dots$
$\mathbf{a}_1^T =$	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	$\dots$	$-a_{11}$	$-a_{12}$	$-a_{13}$	$\dots$
$\mathbf{a}_2^T =$	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	$\dots$	$-a_{21}$	$-a_{22}$	$-a_{23}$	$\dots$
$\mathbf{g}_1^T =$	1	0	0	0	0	0	$\dots$	1	0	0	$\dots$
$\mathbf{g}_2^T =$	0	1	0	0	0	0	$\dots$	0	1	0	$\dots$
$\mathbf{g}_3^T =$	0	0	1	0	0	0	$\dots$	0	0	1	$\dots$
$\mathbf{g}_4^T =$	0	$-Z_0$	Y_0	0	1	0	$\dots$	0	$-Z$	Y	$\dots$
$\mathbf{g}_5^T =$	Z_0	0	$-X_0$	1	0	0	$\dots$	Z	0	$-X$	$\dots$
$\mathbf{g}_6^T =$	$-Y_0$	X_0	0	0	0	1	$\dots$	$-Y$	X	0	$\dots$

(3.5.1)

$\mathbf{A}^T \mathbf{G}$ の計算を行うと式(3.5.2)の結果が得られる.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_1^T \mathbf{g}_1 &= a_{11} - a_{11} = 0 \\
 \mathbf{a}_1^T \mathbf{g}_2 &= a_{12} - a_{12} = 0 \\
 \mathbf{a}_1^T \mathbf{g}_3 &= a_{13} - a_{13} = 0 \\
 \mathbf{a}_1^T \mathbf{g}_4 &= -Z_0 a_{12} + Y_0 a_{13} + a_{15} + Z a_{12} - Y a_{13} \\
 &= (Z - Z_0) a_{12} - (Y - Y_0) a_{13} + a_{15} \\
 &= (Z - Z_0) \frac{c}{D^2} (-m_{12} D + m_{32} N_x) - (Y - Y_0) \frac{c}{D^2} (-m_{13} D + m_{33} N_x) \\
 &\quad + \frac{c}{D} \{ (Z - Z_0) m_{12} - (Y - Y_0) m_{13} \} - \frac{c N_x}{D^2} \{ (Z - Z_0) m_{32} - (Y - Y_0) m_{33} \} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_1^T \mathbf{g}_5 &= Z_0 a_{11} - X_0 a_{13} + a_{14} - Z a_{11} + X a_{13} \\
 &= -(Z - Z_0) a_{11} - (X - X_0) a_{13} + a_{14} \\
 &= -(Z - Z_0) \frac{c}{D^2} (-m_{11} D + m_{31} N_x) + (X - X_0) \frac{c}{D^2} (-m_{13} D + m_{33} N_x) \\
 &\quad + \frac{c}{D} \{ (X - X_0) m_{13} - (Z - Z_0) m_{11} \} - \frac{c N_x}{D^2} \{ (X - X_0) m_{33} - (Z - Z_0) m_{31} \} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_1^T \mathbf{g}_6 &= -Y_0 a_{11} + X_0 a_{12} + a_{16} + Y a_{11} - X a_{12} \\
 &= (Y - Y_0) a_{11} - (X - X_0) a_{12} + a_{16} \\
 &= (Y - Y_0) \frac{c}{D^2} (-m_{12} D + m_{32} N_x) - (X - X_0) \frac{c}{D^2} (-m_{12} D + m_{32} N_x) \\
 &\quad + \frac{c}{D} \{ (Y - Y_0) m_{11} - (X - X_0) m_{12} \} - \frac{c N_x}{D^2} \{ (Y - Y_0) m_{31} - (X - X_0) m_{32} \} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

この結果より $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_6$ が $\mathbf{a}_1$ に直交することが示される. 以下, $\mathbf{a}_2$ も同様の関係があることが言え. これにより, 式(3.5.3)の関係が導かれ, 拘束条件と係数行列の直交関係により擬似逆行列による解法を用いることができる.

$$AG^T = 0 \quad (3.5.3)$$

また長さの拘束条件についても式(3.5.3)の関係が成立するかどうかを検討する。これまでの議論と同様の過程を経ることにより、式(3.5.4)の関係が成立する。

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^T \mathbf{g}_7 &= X_0 \mathbf{a}_{11} + Y_0 \mathbf{a}_{12} + Z_0 \mathbf{a}_{13} + X \mathbf{a}_{11} - Y \mathbf{a}_{12} - Z \mathbf{a}_{13} \\ &= -(X - X_0) \mathbf{a}_{11} - (Y - Y_0) \mathbf{a}_{12} - (Z - Z_0) \mathbf{a}_{13} \\ &= -(X - X_0) \frac{c}{D^2} (-m_{11} D + m_{31} N_x) - (Y - Y_0) \frac{c}{D^2} (-m_{12} D + m_{32} N_x) \\ &\quad - (Z - Z_0) \frac{c}{D^2} (-m_{13} D + m_{33} N_x) \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{c}{D} \{ (X - X_0) m_{11} + (Y - Y_0) m_{12} + (Z - Z_0) m_{13} \} \\ &\quad - \frac{c N_x}{D^2} \{ (X - X_0) m_{31} + (Y - Y_0) m_{32} + (Z - Z_0) m_{33} \} \\ &= \frac{c N_x}{D} - \frac{c N_x}{D^2} \cdot D = 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{a}_2$ に対しても同様の関係が示され、長さの拘束条件に関しても式(3.5.3)の関係が成立していることが示される。

これより具体的な拘束条件が決定されたので、式(3.4.4)および式(3.4.9)より未知数は擬似行列 $(A^T W A)^+$ によって式(3.5.5)のように求めることができる。

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T W A)^+ A^T W \mathbf{e} \quad (3.5.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= [(A^T W A + G^T G)^{-1} - G^T (G G^T G G^T)^{-1} G] A^T W \mathbf{e} \\ &= (A^T W A + G^T G)^{-1} A^T W \mathbf{e} \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

3.6 解析結果の管理のための精度の定義

本研究における標定要素および計測点の解析においては、それら未知数を確率変数として扱う。従って、解析された未知数の精度は分散で表わすことができるが、式(3.5.5)より右辺の観測値の精度すなわち分散が解析過程によって左辺の未知数の精度に伝播する結果を求めることでその精度は把握できる。まず、観測値の分散と未知数の推定値の分散の一般的な関係を求める。これは次に述べる誤差伝播の法則から導かれる。

未知数 x と観測値が $x = F(d)$ の関係で結ばれている場合、線形の場合は A, B を用いて、 $x = Ad + B$ と表せる。この場合、 A は計画行列とも称される。

観測値の分散は、その平均値を i_d として式(3.6.1)となる。

$$\Sigma_d = E[(d - i_d)(d - i_d)^T] \quad (3.6.1)$$

同様に未知数 x の分散は平均値 i_x を用いて式(3.6.2)で与えられる。

$$\begin{aligned} \Sigma_x &= E[(x - i_x)(x - i_x)^T] \\ &= E[(Ad + B - i_x)(Ad + B - i_x)^T] \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

また、 $i_x = Ai_d + B$ であるので、式(3.6.2)に代入して式(3.6.3)となる。

$$\begin{aligned} \Sigma_x &= E[(Ad - Ai_d)(Ad - Ai_d)^T] \\ &= A \cdot E[(d - i_d)(d - i_d)^T] \cdot A^T \\ &= A \Sigma_d A^T \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

即ち、未知数 x は式(3.6.3)のように、観測値の分散と計画行列によって表される分散共分散行列によって、その精度は表現できる。未知数と観測値が非線形関数の場合におい

ても、線形化された式に式(3.6.3)が適用でき、まず基準点が存在する場合の式(3.1.9)にこの関係を用いる。

式(3.1.9)において $A^T W A = N$ とおき、 $\hat{x} = N^{-1} A^T W e$ とする。推定値 $\hat{x}$ の分散は式(3.6.4)となる。

$$\begin{aligned}\Sigma_{\hat{x}} &= (N^{-1} A^T W) \Sigma_e (N^{-1} A^T W)^T \\ &= (N^{-1} A^T W) \Sigma_e (W^T A N) \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

ここで Σ_e は式(3.1.6)から、観測値の重み W と式(3.6.5)の関係にある。

$$W = \frac{\sigma_0^2}{\Sigma_e} \quad (3.6.5)$$

式(3.6.4)に代入すると、基準点が存在する場合の $\hat{x}$ の分散共分散行列は式(3.6.6)のように得られる。

$$\Sigma_{\hat{x}} = \sigma_0^2 N^{-1} = \sigma_0^2 (A^T W A)^{-1} \quad (3.6.6)$$

モデルパラメータの推定値 $\hat{x}$ の分散は、この分散共分散行列の対角要素である。この値は内的精度と称され、計測を繰り返し行ったときに得られる対象点座標推定値のばらつきの範囲すなわち、母標準偏差の推定量を表す。分散共分散行列 $\Sigma_{\hat{x}}$ の対角項に並ぶ各計測点座標の分散を $V_{X_i}, V_{Y_i}, V_{Z_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) とすると、計測点の X 成分の内的誤差は式(3.6.7)で表せる。

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_{X_i}} \quad (3.6.7)$$

Y 成分および Z 成分についての内的誤差 σ_Y, σ_Z も同様に表すことができ、またその平均である内的誤差は式(3.6.8)となる。

$$\sigma_{XYZ} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}{3}} \quad (3.6.8)$$

また、モデルパラメータの推定値 $\hat{\mathbf{x}}$ の平均値と真値との偏りを表す値は、外的誤差と称され、ある量を n 回計測したとき、式(3.6.7)で与えられる。

$$\sqrt{\frac{\sum (\text{推定値} - \text{真値})^2}{n}} \quad (3.6.7)$$

しかし、実際の計測においては真値の代わりに、他の手法で計測された高精度が保証される測定値との差から計算される。しかしながら、この際外的精度には比較対象とする計測器自体の誤差も含まれる。

内的誤差と外的誤差の概念を図 3.6.1 に示す.

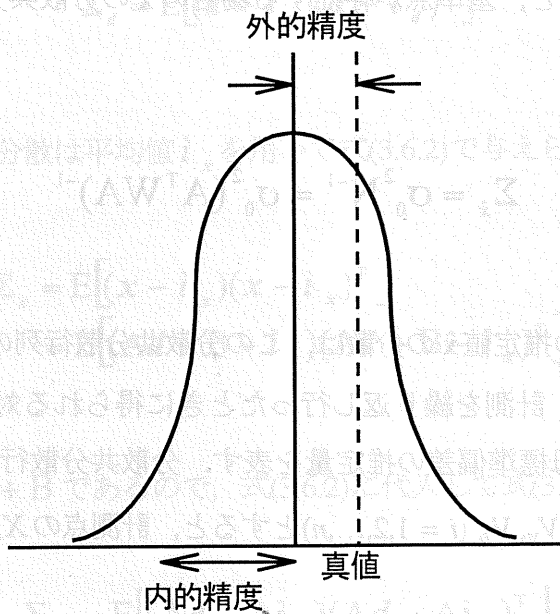


図 3.6.1 内的精度と外的精度の概念

次に観測値の分散を求める。式(2.6.4)に式(3.1.9)を代入して式(3.6.8)を得る。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \mathbf{e} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{e} \\
 &= (\mathbf{v} + \mathbf{A} \mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} (\mathbf{v} + \mathbf{A} \mathbf{x}) \\
 &= (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}) \cdot \mathbf{v}
 \end{aligned} \tag{3.6.8}$$

$\mathbf{I}_n$ は n 行 n 列の単位行列である。最小 2 乗関数 Φ は式(3.6.9)となる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}^T \mathbf{W} \mathbf{v} &= \mathbf{v}^T (\mathbf{I}_n - \mathbf{W} \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T) \mathbf{W} (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}) \mathbf{v} \\
 &= \mathbf{v}^T (\mathbf{W} - \mathbf{W} \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}) \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} \\
 &= \sum_{i=1}^n m_{ii} v_i^2 + \sum_{i \neq j} m_{ij} v_i v_j
 \end{aligned} \tag{3.6.9}$$

但し、

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1j} \\ m_{21} & m_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ m_{i1} & \cdots & m_{ij} \end{pmatrix} = \mathbf{I}_n - \mathbf{W} \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \tag{3.6.10}$$

である。

式(3.6.9)の期待値をとると式(3.6.11)を得る。

$$E(\mathbf{v}^T \mathbf{W} \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n m_{ii} E(v_i^2) + \sum_{i \neq j} m_{ij} E(v_i v_j) = \sum_{i=1}^n m_{ii} \sigma_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_{ii}}{w_i} \right) \cdot \sigma_0^2 \tag{3.6.11}$$

ここで、式(3.6.10)より式(3.6.12)が導かれる。

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \frac{m_{ii}}{w_i} &= \text{tr}(\mathbf{M} \mathbf{W}^{-1}) = \text{tr}(\mathbf{I}_n - \mathbf{W} \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T) \\
 &= \text{tr}(\mathbf{I}_n) - \text{tr}((\mathbf{W} \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T)) \\
 &= \text{tr}(\mathbf{I}_n) - \text{tr}((\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A}) \\
 &= \text{tr}(\mathbf{I}_n) - \text{tr}(\mathbf{I}_m) = n - m
 \end{aligned} \tag{3.6.12}$$

(観測方程式の数 n) - (未知パラメータの数 m) は独立な条件の数を表し、自由度と呼ばれる。式(3.6.11)は、式(3.6.12)を使って式(3.6.13)のように表される。

$$E(\mathbf{v}^T \mathbf{W} \mathbf{v}) = (n - m) \sigma_0^2 \quad (3.6.13)$$

以上より、観測値の分散 σ_0^2 の不偏推定量は式(3.6.14)となる。

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{W} \mathbf{v}}{n - m} \quad (3.6.14)$$

式(3.6.14)の平方根の正值は、計測点の画像座標 (x, y) の計測誤差の指標となる。具体的には、本研究では事前分散として経験値を用いるので、計測点の計測が正しく行われた場合は、 $\sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$ となる。

次に基準点が無い場合の内的誤差を考える。内的誤差を与える数式の導き方は、同じく誤差伝播の法則であり、式(3.6.3)を基本とする。式(3.6.3)における $\mathbf{N}^{-1}$ は式(3.5.6)より、 $(\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1}$ であるので、式(3.6.15)となる。

$$\begin{aligned} \Sigma_{\hat{\mathbf{x}}} &= \sigma_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \\ &= \sigma_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \\ &= \sigma_0^2 \left\{ (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} - (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{G} (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \right\} \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

基準点が無い場合の計測において擬似逆行列によって求められた解の分散共分散行列は式(3.6.16)となる [Ohnishi and Nishiyama(2001)].

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = \sigma_0^2 \left[(\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} - \mathbf{G}^T (\mathbf{G} \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{G}^T)^{-1} \mathbf{G} \right] \quad (3.6.16)$$

また、 $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{W} \mathbf{v}}{n - m}$ はその分母が $(n - m + \text{拘束条件の数})$ となる。

3.7 ノルム最小の最小二乗解の再構築

再度未知数の推定値 $\hat{x}$ のノルムを考える。ノルム $\|\hat{x}\|$ は $\hat{x}^T \hat{x}$ であるから、未知数との分散との関係は式(3.7.1)と表現できる。

$$E\{\|\hat{x}\|^2\} = E\{\hat{x}^T \hat{x}\} = E\left\{\sum_i \hat{x}_i^2\right\} = \sum_i \sigma_i^2 \quad (3.7.1)$$

これより、ノルム最小解は未知数の分散を意味し、ノルム最小条件は分散を最小にする解を計算することになる [Koch(1985) , 秋本・服部他(2001)]。

さらに、前節において幾何学的な関係から拘束条件 $G^T = (g_1 \ g_2 \ \cdots \ g_6)$ を求めたが、分散に関する重み P を考慮して、式(3.7.2)のように G に重みをかけた拘束条件 B を考える。

$$B = PG \quad (3.7.2)$$

計算上は G から重みに対応する行を $rank(B) = rank(G)$ の条件になるように取り出すことになる。このとき、最小ノルム解も重み P が考慮され、 $\|\hat{x}^T P \hat{x}\|$ となり、この期待値は式(3.7.3)のようになる。

$$E\{\hat{x}^T P \hat{x}\} = E\{trace(P \hat{x}^T \hat{x})\} = trace\{P \Sigma_{\hat{x}}\} = \sum_i var(\hat{x}_i) \quad (3.7.3)$$

重みにより選択されたモデルパラメータである未知数の平均の分散 σ_m は式(3.7.4)となる。

$$\sigma_m^2 = \frac{rank(P \Sigma_{\hat{x}})}{rank(P)} \quad (3.7.4)$$

G から k 行取り出したとすると、

$$\sigma_m^2 = \frac{\text{rank}(P\Sigma_{\hat{x}})}{\text{rank}(P)} = \frac{1}{k} \left\{ \sum_k \text{var}(\hat{x}_{ik}) \right\} \quad (3.7.5)$$

となる。

このように、最小ノルム解は分散最小解を物理的には意味することになる。この物理的意味を考えたノルム最小条件を再度構築して、式(3.5.6)で与えられる解 $\hat{x} = (A^T W A + G^T G)^{-1} A^T W e$ を求めることで、地盤挙動を評価する場合の数値解法を確立させることができる。

式(3.6.14)の平方根の正値は、計測点の画像座標(x, y)の計測誤差の指標となる。具体的に求める(1.8) ... 2.8, 2.8) = 0.15 である。これは、本研究では事前分散として経験値を用いるので、計測点の計測が正しく行われた場

合、計測誤差はほぼ等しく0.15の値となる。この値は、式(3.6.14)の平方根の正値である。

次に基準点が無い場合の内的誤差を考える。内的誤差を与える数式の導き方は、同じく誤差伝播の法則であり、式(3.6.4)を基本とする。式(3.6.3)におけるNは式(3.5.6)より、出り取りともなる。この場合、rank(B) = rank(Q)の条件はGが±単位行列(A^T W A + G^T G)であるので、式(3.6.3)となる。

この場合、rank(B) = rank(Q)の条件はGが±単位行列(A^T W A + G^T G)であるので、式(3.6.3)となる。

$$\Sigma_{\hat{x}} = \sigma^2 (A^T W A + G^T G)^{-1} A^T W W^T W A (A^T W A + G^T G)^{-1} = \sigma^2 (A^T W A + G^T G)^{-1} A^T W A (A^T W A + G^T G)^{-1} \quad (3.6.15)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{k} \left\{ \sum_k \text{var}(\hat{x}_{ik}) \right\} = \frac{1}{k} \left\{ \sum_k \text{var}(\hat{x}_{ik}) \right\} = \frac{1}{k} \left\{ \sum_k \text{var}(\hat{x}_{ik}) \right\} \quad (3.7.3)$$

式(3.6.15)は、式(3.6.14)の平方根の正値である。この値は、式(3.6.14)の平方根の正値である。

式(3.6.16)となる (Oishi and Nishizawa(2011))

$$\sigma_m^2 = \frac{\text{rank}(P)}{\text{rank}(P)} = 1 \quad (3.7.4)$$

$$\Sigma_{\hat{x}} = \sigma^2 \left[(A^T W A + G^T G)^{-1} - G^T (G G^T + G^T W A)^{-1} G \right] \quad (3.6.16)$$

また、 $\sigma_0^2 = \frac{W_p}{n-m}$ はその分母が(n-m+拘束条件の数)となる。

3.8 第3章のまとめ

本章は前章にて基礎理論として構築されたモデルから、モデルパラメータを逆解析によって求める数値解法について考察したものである。逆解析では、特異値分解を用いた解法が一般的に用いられるが、本研究ではベクトル空間の概念を利用した擬似逆行列によってモデルパラメータを求めることを導いた。その結果次のことが導かれる。

- (1) 幾何学的に求めたモデルに対応して、座標軸の概念を明らかにすることができ、基準点がある場合および無い場合の両方に対処する解を得るための条件も、空間的な概念から容易に考察することができる。
- (2) 方程式 $Ax = d$ において、 A の列空間上への射影 d および A の行空間内に存在する条件の両方を満たす解 x を見出すことが、擬似逆行列を使って方程式を解くことになることを示し、幾何学的に見出した拘束条件のもとで解いた最小二乗解が、この擬似逆行列の条件を満たすことを導いた。これにより、モデル形成から拘束条件まで、本研究の理論的な側面の物理的な意味が明確にされ、本研究による解法がノルム最小の最小二乗解を求めることと同等であることを証明した。

このように、本研究では地盤挙動をモニタリングする際、線形化したモデルの係数行列に rank 欠損が生じる場合の対処法として、拘束条件付最小二乗法を構築することの物理的意味が座標軸決定問題であることを示し、その拘束条件を座標軸を固定する概念から導いた。これにより、本研究を実現するプログラミングを容易に構築することが可能になる。

参考文献

- 1) 松岡俊文：インバージョンにおける数値解法，物理探鉱，Vol.39,N0.6,pp.14-30.
- 2) S.I.Granshaw:Bundle Adjustment Methods in Engineering Photogrammetry, Photogrammetric Record,Vol.10,N0.56,pp.181-207,1980.
- 3) 田島稔・小牧和雄：最小二乗法の理論とその応用，東洋書店,1996.
- 4) 中根勝見：測量データの3次元処理，東洋書店,1994.
- 5) G.Strang：山口昌哉監訳，井上昭訳：線形代数とその応用，産業図書,1996.
- 6) 武者利光監修，岡本良夫：逆問題とその解き方，オーム社,1996.
- 7) 半谷裕彦，川口健一：形態解析 一般逆行列とその応用，培風館,1991.
- 8) 柳井晴夫，竹内啓：射影行列・一般逆行列・特異値分解，東京大学出版会,1996.
- 9) 原田健久：測量計算法，鹿島出版会,2001.
- 10) P.Teunissen:Zero Order Design, Optimazation and Design of Deodetic Networks, ed., E.W. Grafarend and F.Sanso, Springer,1985.
- 11) K.Akimoto, C.S.Fraser, H.Hasegawa and S.Hattori : Comparison of Free Network Solutions by the Artificail Basis-Based Method with One by the Generalized Inverse in Video Metrology : International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing.XXX II -5,pp.17-22,1998.
- 12) Y.Ohnishi, S.Nishiyama, T.Yano, H.Ohtsu, M.Nakamura, Y.MOMIYAMA, T.Nakai and M.Ryu : Three-dimensional analysis of rock displacement by a digital photogrammetric system, Procceding of the 2001 ISRM International Symposium-2nd Asian Rosck Mechanics Symposium,Beijing,pp.671-673,2001.
- 13) K.R.Koch : First Order Design,E.W.Grafarend and F.Sanso,eds.,Optimazation and Design of Geodetic Networks,Springer,pp.56-73,1985.
- 14) 秋本圭一，服部進，井本治孝：ディジタル画像計測法を用いた精密工業計測，電子情報通信学会誌，D-II，Vol.J84-D-II ,No.7,pp.1299-1309,2001.

第4章 デジタル写真測量技術の岩盤崩落予測・防災・管理システムとしての計測手法の研究

前章までの議論において、解析モデル式の数値解法を議論した。それは、計測対象において基準点が設置されているかどうかに関わらず、計測を行うための数値計算法の確立であった。これまでの理論を具体化することにより、デジタル画像を取得すれば計測点の3次元座標を算出できるシステムが完成され、その結果から地盤の変位や変状の実態を把握することができる。

本章では、この計測システムの構築とそれを使った地盤挙動の評価を実施する際の問題点の解決を考察し、防災や構造物の施工管理あるいは維持管理のためのモニタリング技術の完成を図る。特に本研究を地盤挙動に適用した場合における特有の問題として、前章で議論した最小二乗法の拘束条件を再度検討する必要がある。これは、計測の簡便さを求めるため、撮影の位置やカメラ角度あるいはカメラの内部構造をモデルパラメータに設定したが、モデルの解析結果として欲しいのは、地山挙動に関連した計測点の3次元座標である。このため、これまでの写真測量とは異なる重みと精度の取り扱いが必要となり、モデルパラメータに関する分散共分散行列の取り扱いを再構築する必要が生じる [Fraser (1982)]。

さらに、計測方法においても遠隔から限られた撮影範囲で計測を行う必要が生じ、どの方向から何枚の画像を撮影するのが最適なのかという計測計画に関する問題を抱える [Fraser (1984)]。この計測計画に関しては、これまでの研究において、まだ決定的な解が見出されていないのが実状である。結果として未知数を求めた時の精度を向上させることが問題であり、そのためには観測の重みが設定された後、分散共分散行列に与えられる条件を満たす計画行列を求める問題である。この計画行列を事前に解析的に求める手法は無く、唯一の解決法としてシミュレーションによる事前の決定が試みられている [Ohnishi and Zhang (1999)]。計測点の設定法、撮影位置と角度およびレンズ歪みなどの系統誤差が関係しあって生じるモデルパラメータからなる図形を撮影ネットワークと称し、この撮影ネットワークの形が精度に大きな影響を与えることが分かっている

[Fraser(1996)].

まず計測を行う際に計画することは、計測精度を向上させるためには、強い撮影ネットワークを形成することである。そのためには計測点を多くの画像に写し込み、できるだけ数多くの光線の交点として座標を求めるようにするだけでなく、レンズ歪みの影響を分散させるために計測点を画像の中で均等に写るようにして撮影作業を行う必要がある。このようにして得られた計画行列であっても、正規方程式の対角要素の値が小さくなり、計算精度が極端に劣化する場合がある。これは、計測点と撮影位置が形成する撮影角度が小さい場合である。十分な撮影角度をもたずに計測を行った場合、正規方程式には rank 欠損が生じた場合と同じ不良条件が発生する。これは、例えば図 4.1 に示すような直線の最小二乗法による当てはめ問題におけるデータの誤差とモデルパラメータの分散の関係に相当する。 $y = ax + b$ (a, b は定数, y はデータ, x はモデルパラメータ)の直線の当てはめ問題において、データが x に関して離れていないときには図の(a)のように直線の傾きと切片の分散は大きくなる。一方データが x に関して十分に離れているときには図の(b)のように直線の傾きや切片の分散は小さくなるのと同様に、計測対象物から見て似たような位置から撮影された画像を使っても、精度の悪いものしか復元できない。

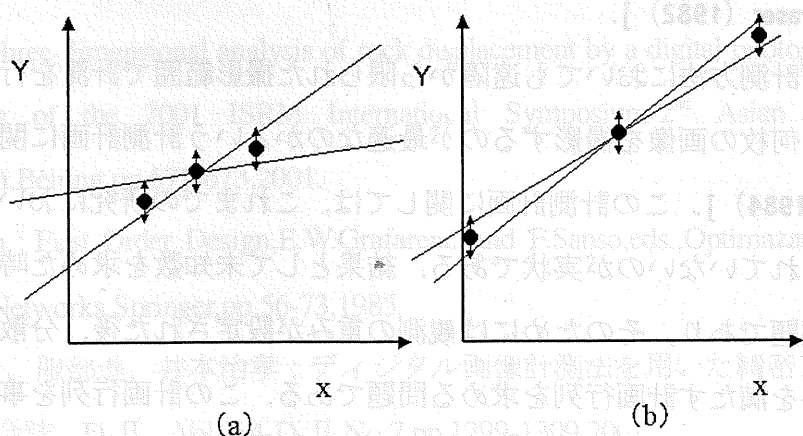


図 4.1 データの誤差とモデルパラメーターの誤差の関係

また、これは同時に観測に含まれる誤差に対する解の不安定性、すなわち逆解析の不適切性の問題につながる [例えば斎藤正徳など (1983)]。連立一次方程式 $y = Ax$ を考え、 A の特異値分解によって得られる絶対値が最大の固有値 $\lambda_{\max}$ と絶対値が最小の固有値 $\lambda_{\min}$ の比 $cond(A) = \left\| \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right\|$ は条件数と呼ばれ、相対的な誤差の増幅率を表す。この

条件数 $cond(A)$ が大きい程解の精度は劣化する。この場合逆解析は不適切と称され、何らかの工夫をしなければ適切な解を求めることはできない。この不安定性を回避するため、これまで数学的に幾つかの手法が提案されている。例えばプレホワイトニング法 [Treitel and Wang (1975)] は $y = Ax$ の誤差の二乗 $v^T v$ と解のノルム $x^T x$ を加えた条件式 (6.1) を考え、これを条件付最小二乗解を求める問題と見なして x に関する停留値を求める。

$$\phi = v^T v + \varepsilon(x^T x) = (Ax - y)^T (Ax - y) + \varepsilon(x^T x) \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2(A^T A)x - 2A^T y + 2\varepsilon x = 0$$

これより、 $x = 2(A^T A + \varepsilon I)^{-1} A^T y$ が求められる。この時 $(A^T A + \varepsilon I)^{-1} x = A^T y$

の A に対して特異値分解を行うと、

$$(A^T A + \varepsilon I) = (V \Lambda^2 V^T + \varepsilon I) = V \begin{bmatrix} \lambda_1^2 + \varepsilon & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & \lambda_M^2 + \varepsilon \end{bmatrix} V^T \quad (6.2)$$

となり、条件数 $cond(A)$ は

$$cond(A) = \left\| \frac{\lambda_1 + \varepsilon}{\lambda_M + \varepsilon} \right\| \quad (6.3)$$

で与えられ、条件数を ε によって自由に設定することが可能になる。その他、ダンプつき最小二乗解 [Aki and Lee (1976)] など、ここで記述した ε に相当する人工ノイズを加える手法が提唱され、不安定性を回避する試みがなされているが、 ε の決定には試行錯誤

誤が要求され、簡単に決めることのできる方法は見出されていない [Menke(1997)].

このような予測誤差の最小化と解の長さの最小化の妥協値を見出す努力よりも、前章でのノルム最小の最小二乗解を求める手法において、あらかじめ不適切な要因を除去する計測法の確立を図るほうが効率的であると考えられる。本研究において、不適切となる原因の物理的な意味を考えると、逆解析は結果から原因を求める手法であると定義できるので、結果から原因を求めた際に、同じ結果が別の原因からも生みだされる、すなわち少しの違いしか生み出さない原因を同じような結果から求めるために生じるためと言える。数学的には前章で議論した列空間の線形独立性が低いことと言えるが、計測手法においてこれを回避することは可能である。本章では、計測手法を確立させる意味で、各計測工程における要素技術に関する考察と同時に、拘束条件の与え方と関連させながら撮影ネットワークを考える [Papo (1982)].

4.1 計測作業に関する考察

4.1.1 計測作業の手順

本節では地盤を対象とした場合に適する計測作業に関して考察を行い、デジタル画像を用いた計測技術を確立させる。図 4.1.1 に計測作業全般のフローチャートを示す。計測は次の内容の作業から成る [Fraser(1996)]. 各工程における主な作業は次のとおり。

- ・ 計測作業準備

基準点の有無および設置作業、カメラ機種およびレンズ焦点距離の選定および撮影場所の選定など、計測対象に応じた撮影計画の立案を中心とした準備作業を行う。

- ・ デジタル画像撮影

本研究では、計測作業はデジタルカメラによる撮影という簡略化された作業から成る

が、シャッター速度や絞り値などの撮影のパラメータは状況によって設定する必要がある、数枚の試行により周囲の明るさや計測点の認識の度合いなど現場状況に応じた撮影条件が設定される。

4.1.2 計測精度向上のための計測点設置問題

- 計測点の2次元画像座標計測

撮影作業によって得られたデジタル画像をパーソナルコンピュータに取り込み、計測点像の画像座標系上での2次元座標を計測する。画像ごとに計測点の認識を行うが、これは各計測点が撮影されたどの画像のどの像に相当するのかという作業も含む。2次元座標は画像座標系での値であり、パーソナルコンピュータの画面上で行われる。

- 解析作業

計測点の像の2次元座標から地上座標系での3次元座標を解析によって算出する。

- 解析結果の考察

解析結果を考察し、計測点の2次元座標に関しての計測の異常値および解析結果の妥当性の検討を図り、異常があった場合にはその原因を把握し、再度解析を行う等の処理をする。前章で導いた解析管理のための各指標を用い、目的に合致した計測が実施できたかどうかを検証する。

- 地盤挙動の評価

最終的に得られた計測点の3次元座標から、さらに変位等を算出することにより計測対象である地盤の挙動を考察する。

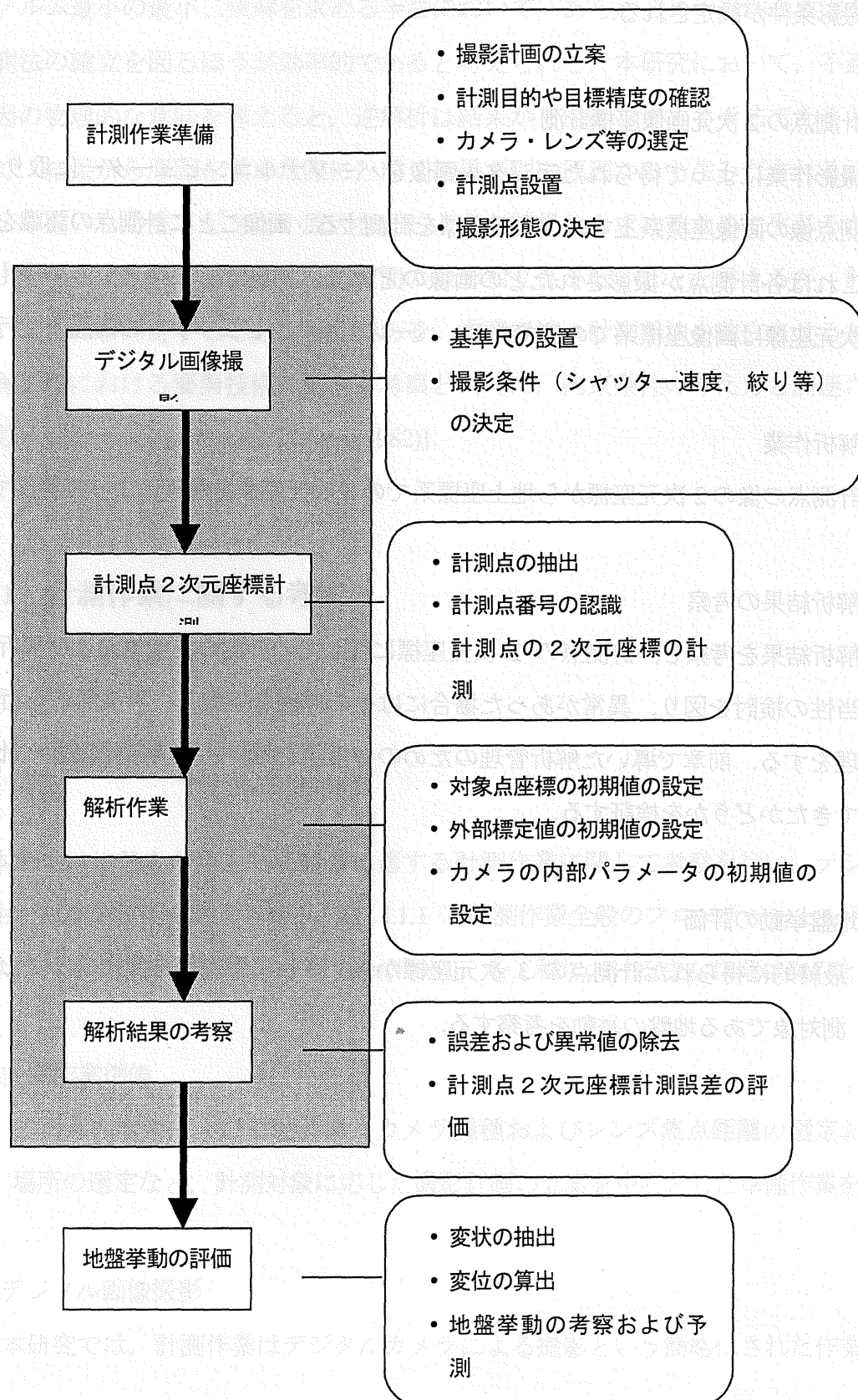


図 4.1.1 計測手順を示すフローチャート

4.1.2 計測精度向上のための計測点設置問題

本研究における計測値は、デジタル画像上での計測点の像の 2 次元座標である。計測点としては対象物上に設定されるが、例えばコンピュータービジョンの分野においては、その多くの手法が対象物における何らかの特徴点を計測点としている。例えば、対象物体の角といった形状的な特徴あるいは表面における何らかの模様といったものである。これは、その多くの対象物が室内で計測される工業製品であることから特徴を比較的見出しやすく、また撮影距離も数mであることに起因している。しかし、本研究が計測する対象物体

であるトンネルおよび斜面などの土木構造物では、覆工壁面などでは特徴点を見出し難しく、また数 10m以上の遠距離からの撮影であるために模様や形状的特徴が目立たなくなるといった現象を伴っていることが多い。

前章で議論したように、解析過程における誤差伝播の法則より、計測点の画像座標の計測値の誤差が、目的とする計測点の 3 次元座標の誤差として現れ、また本研究の計測手法は、レンズ歪みを系統誤差として未知数に置き換えて解析的に求める手法であるために、計測値に誤差を生じやすい状況にある。従って、計測精度を向上させるためには、どのようにして当該画像計測値の精度を向上させるかを考察する必要がある。そこで、本節では計測に当たっては、まず目的とする計測精度を得ることができる画像座標計測法の確立を図ることを試みる。具体的には、目的とする計測精度によって、対象物の形状的な特徴を計測点とする方法と、計測点の画像座標の計測を容易かつ高精度で行えるように人工的な計測点（以下、標点と称す）を設置する方法があるが、前者は例えば不連続面などを抽出し、その不連続面の状態からさらに何か情報を得る場合で、数mmから場合によっては数cmオーダーの精度の計測で十分に目的を達する場合に用い、後者は高精度に対象物の変位を計測する場合に用いることが考えられる [Clarke and Cooper et al. (1993)].

ここで、計測点の画像座標の計測精度が、当計測点の3次元座標算出精度に与える影響を考察するためのシミュレーション実験を行う。トンネルに模した対象物を考え、その壁面に標点を設置し、それをデジタルカメラで撮影して当計測点の3次元座標を算出する場合のコンピューターシミュレーションを行う。当計測点の画像座標の計測精度を数種類変えて、その3次元座標精度の解析結果を検証することで要求精度と画像座標計測精度の関係を考察する。

対象物の寸法は実際のトンネルを想定して横幅8m x 高さ8mの寸法とし、奥行き3mの区間に1断面当たり13個の標点を設置した対象物を撮影した場合を想定した。図4.1.2は、このシミュレーションの対象を表した概念図である。また、表4.1.1に計測の諸条件を示す。撮影距離は20mで焦点距離は50mmのレンズを使用して画像を4枚撮影するという計測条件とした。但し、レンズ歪は無視できるほどに小さく、標点の像の2次元座標の計測における偶然誤差以外の誤差は発生しないと考えた。

標点の像の概念図は、CCD素子を用いたデジタルカメラで撮影した場合は、図4.1.3に示すような状態になると考えられる。すなわち、画素と呼ばれる小さな離散的な四角形の集まりで構成され、各画素の輝度も撮影時の値を離散的に量子化され、それは通常8ビットであり、0から255の整数値で表現される。

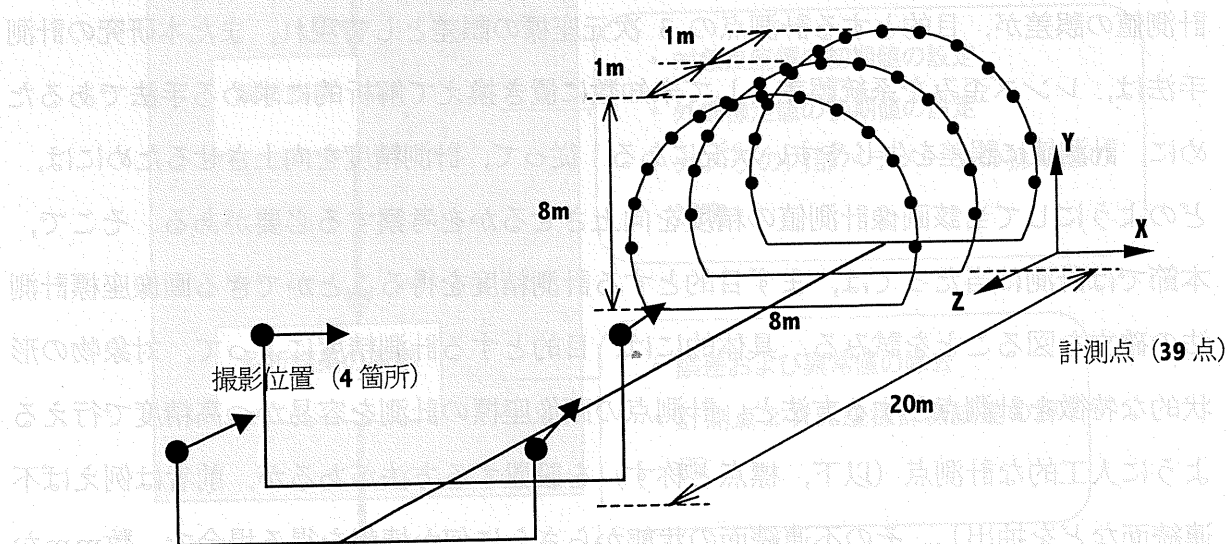


図4.1.2 シミュレーションにおける計測実験の概念図

表 4.1.1 シミュレーションにおける計測条件

対象空間	標点の数	画像枚数	撮影距離	焦点距離
8×8×3m	39 点	4 枚	20m	50mm

図 4.1.3 において、白い部分が標点であり、この場合は円形の形状をした標点を撮影した状態を表す。撮影された標点の像は、まず 2 値化処理により白い標点の部分と黒い標点以外の部分に区別される。デジタル画像では、各画素の座標を配列の要素とした変数に輝度の値が割り当てられる。変数は CCD 面の中央を原点とした 2 次元座標 (X,Y) を要素とする $f(X,Y)$ である。手動で計測する場合は、作業者が標点をパーソナルコンピュータの画面上で認識する作業を行い、2 値化処理によって標点の部分だけが抜き出され、X 座標および Y 座標がそれぞれ $X=1 \sim m$, $Y=1 \sim n$ であった場合には、 $\{f(X,Y) : X=1 \sim m, Y=1 \sim n\}$ の変数に輝度の値が割り当てられる。もちろん、この作業を画像処理の技術を応用して人的作業を緩和する、あるいは自動化処理のプログラムによって人的労力を省くことも可能である。[服部・秋本他(2001)]

そして、標点の像の 2 次元座標は式(4.1.1)にて行う。

$$\begin{aligned} X &= \frac{\sum_m \sum_n m f(m,n)}{\sum_m \sum_n f(m,n)} \\ Y &= \frac{\sum_m \sum_n n f(m,n)}{\sum_m \sum_n f(m,n)} \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

すなわち、計測値は標点の重心を求めた値である。これにより、高精度の計測を行うことが可能となるが、逆に重心を求めることが容易な形状を有した標点を設置する必要がある。また、撮影時にさまざまな角度で撮影しても、形状の認識と重心計算が容易であることも要求されるので、本研究で標点を設置する場合は、円形形状のものを使用することとした。

図 4.1.2 に示すシミュレーションでは、標点を式(4.1.1)によって求めることができる

と仮定し、正規乱数によって計測における偶然誤差を与え、最終的に得られる 3 次元座標の解析の内的精度がどうなるかを検証した。標点の 2 次元座標の計測精度は、約 $0.33\ \mu\text{m}$ 、 $0.5\ \mu\text{m}$ 、 $1.0\ \mu\text{m}$ 、 $2.5\ \mu\text{m}$ および $10\ \mu\text{m}$ とした。市販されている CCD タイプのデジタルカメラの多くが、1 画素の大きさが約 $9\ \mu\text{m}$ のものである。従って、前記計測精度は約 1/30 画素、1/20 画素、1/10 画素、1/4 画素および 1 画素程度で重心の 2 次元座標を計測できた状態を表すことになる。

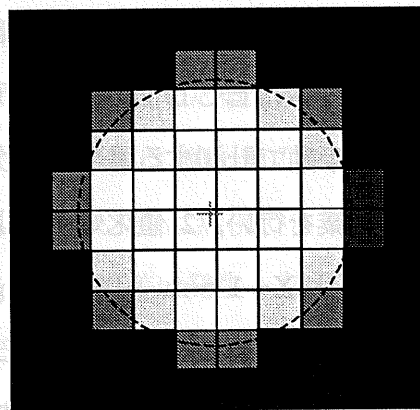


図 4.1.3 標点のデジタル画像概念図

標点の重心の計測精度が解析結果である 3 次元座標の計測精度に与える影響の概念を図 4.1.3 に示す。像の 2 次元座標の誤差が、撮影距離とレンズの焦点距離の比である縮尺比に相当する拡大率で解析結果の 3 次元座標の誤差となることが分かる。レンズの焦点距離を c 、撮影距離を $(c + d)$ とし、標点の 2 次元座標計測精度 $\hat{\sigma}_0$ と当標点の 3 次元座標の解析精度（内的精度） σ の関係は、図 4.1.3 より式(4.1.2)となる。

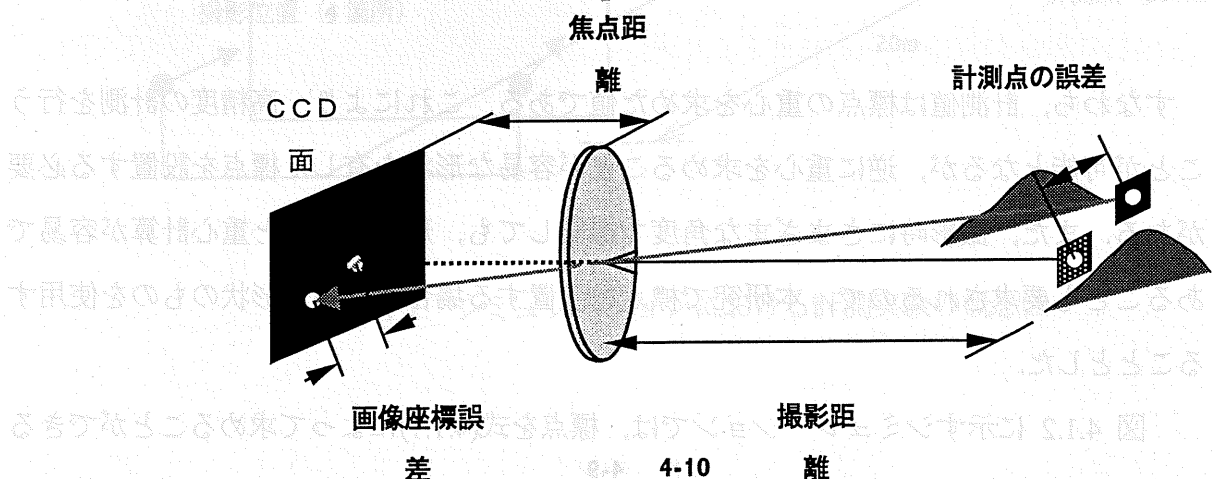


図 4.1.3 標点像の計測精度が解析結果に及ぼす影響の概念図

$$\sigma \propto \frac{(c+d)}{c} \times \hat{\sigma}_0 \quad (4.1.2)$$

図 4.1.2 のシミュレーションによる計測結果を図 4.1.4 に示す。施工中のトンネルでは、切羽付近は危険なために近づけないことを考え、実際の変位計測作業を考えて撮影距離を 20m に設定した。シミュレーション結果は、式(4.1.2)に示されるように、解析結果である標点の 3 次元座標の内的精度と重心の計測精度とは、ほぼ比例した関係にあることを表している。

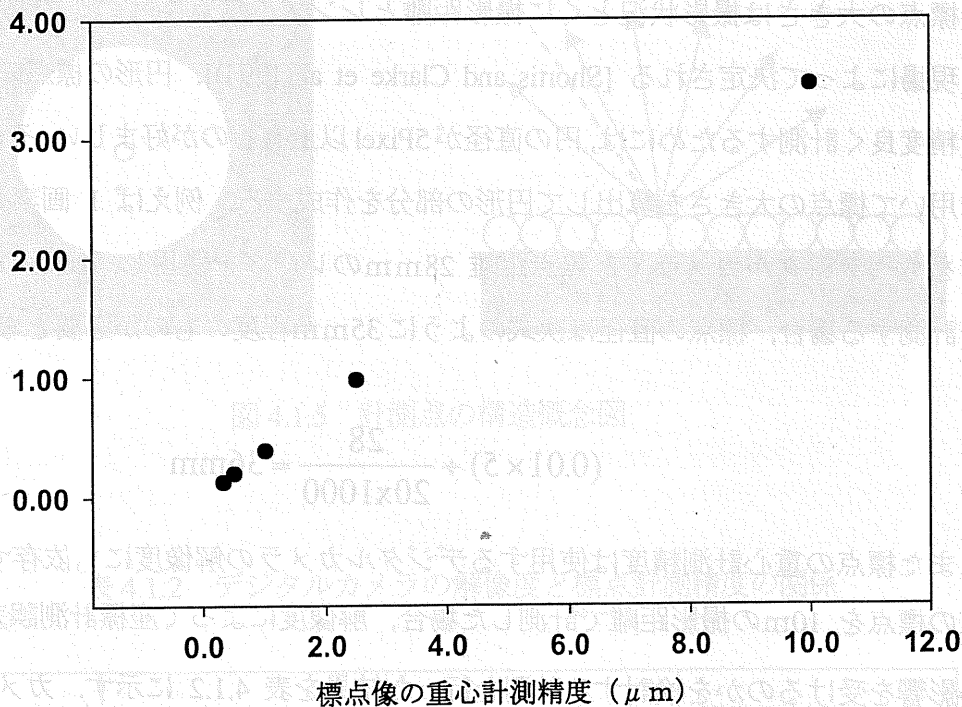


図 4.1.4 標点像の計測結果と解析精度の関係

シミュレーションにおいて考えた標点像の重心計測精度について、1/30 画素、1/20 画素

および 1/10 画素は、前述の標点を設置した場合の計測精度であり、1/4 画素および 1 画素程度のものは、それら人工的な計測点を設置しない場合の計測精度になると考えられる。従って、mm 以下のオーダーの精度にて計測を行うことを考える場合は、標点を設置する必要がある。また、その際には計測点の像の重心計測精度は、1/10 から 1/20 画素になるように、計測点を設計することになるため、前章で考察した事前分散 σ_0 もこの値を経験値として用いることにする。

これまでの考察に基づき、特徴点が得られにくく、また高精度の計測を行う際に用いる標点を作成した。図 4.1.5 は、作成した標点の概観を示したものである。塩化ビニルシートなどの樹脂基材の上に微小なガラスよりなるビーズを均一に並べたものよりなり、このガラスビーズの表面に光をあてると、当該ガラスビーズがレンズの働きをして、入射光を光源方向に反射することで明るく輝き、光りを反射し標点の像の認識を容易にする。明かりの現場では太陽光を反射することで、またトンネルなどの光に乏しい現場では、撮影時にフラッシュ光りを用いることで、標点が周囲の物質と区別される。

標点の大きさは撮影状況とくに撮影距離とレンズの焦点距離の比である縮尺比に基づき現場によって決定される [Shortis and Clarke et al.(1994)]。円形の標点の像を CCD 面上で精度良く計測するためには、円の直径が 5Pixel 以上有るのが好ましい。そのため、式(4.1.2)を用いて標点の大きさを算出して円形の部分を作成する。例えば 1 画素が約 $10\mu\text{m}$ の画素をもつデジタルカメラで、焦点距離 28mm のレンズを使用し、20m の撮影距離の標点を計測する場合、標点の直径は次式のように 35mm 程度のものが必要となる。

$$(0.01 \times 5) \div \frac{28}{20 \times 1000} = 36\text{mm}$$

また標点の重心計測精度は使用するデジタルカメラの解像度にも依存する。直径 30mm の標点を 10m の撮影距離で計測した場合、解像度によって座標計測誤差 $\hat{\sigma}_0$ がどの程度得影響を受けるのかを検討する計測を行った結果を表 4.1.2 に示す。カメラの解像度は、白黒 150 万画素、カラー 175 万画素およびカラー 274 万画素である。 $\hat{\sigma}_0$ はカラー 175 万画素、カラー 274 万画素、白黒 150 万画素の順に向上する。市販のデジタルカメラの解像度はメーカーの仕様によって知ることができるが、CCD 仕様のものは暗電流による信号をモニターするために光のあたらない画素を設けたり、撮影時の手ぶれ防止機能をもたせる

ために画像として切り出すフレームを変化させるための余裕分として画素の一部を使用しているため、実際には仕様通りの画素数を全部計測用に用いることはできない。また本計測では、標点をカラーで撮影した場合、像は **Red**, **Green**, および **Blue** (RGB) の単色を使って計測される。市販のカラー仕様のデジタルカメラの各画素には、**Red**, **Green**, および **Blue** の各フィルターを貼りつけるので、カラー仕様のものの単色分の素子は 3 分の 1 程度に劣化する場合がある。従って、白黒仕様のものが計測における有効な解像度としては最も優れたものであり、表 4.1.2 の結果になったと考えられる。ただしカラー仕様の 274 万画素のものは、事前分散である 1/20 画素を満足しており、計測精度としては充分であることが検証できているため、本研究でも 250 万画素クラス以上の仕様のデジタルカメラを用いることにする [Clarke (1994)]。

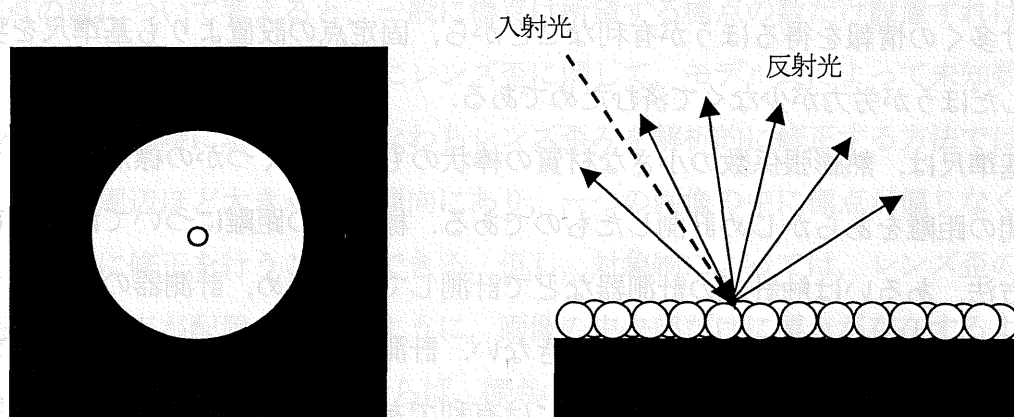


図 4.1.5 計測点の構造概念図

表 4.1.2 デジタルカメラの解像度と標点計測精度の関係

解像度	重心計測精度 (μm)	1 pixel のサイズ (μm)	画素の仕様 (pixel)
カラー175 万画素	0.97	9	1 5 2 8 x 1 1 4 6
カラー274 万画素	0.49	11.8	2 0 0 0 x 1 3 1 2
白黒 150 万画素	0.37	9	1 5 2 4 x 1 0 1 2

4.1.3 長さ情報の付与に関する検討

本節では長さ情報、即ち基準尺に関して検討する。前章において議論したように、座標軸の決定のためには7つの自由度を拘束する必要がある、その一つが長さに関する情報である。本研究では、基準点の有無に関わらず基準尺によって長さ情報を得るものとする。長さ情報は固定点の設置によっても、それらを計測時に画像中に取り込むことにより得ることが可能であるが、長さに関する情報を精度良く把握するためには、できるだけ多くの情報を得るほうが有利なことから、固定点の設置よりも基準尺を現場に持ち込んだほうが労力が少なく済むためである。

基準尺は、熱膨張係数の小さな材質の棒状のものにいくつかの標点を設置し、その標点間の距離をあらかじめ計測したものである。標点間の距離については、現在は光学的な方法、あるいは触針式の計測器などで計測しているため、計測器の限界から1 m程度の長さ情報を有したものしか製作できない。計測対象面積が大きい場合は、できるだけ長い基準尺を用いたほうが精度向上には有利であるが、長さの精密な計測の限界から本数をできるだけ多くして計測する手法を採用する。

また、この基準尺の値は大きい重みが付加されて解析される。ここで、2つの標点の座標を $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ とすると、距離は $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ となるため、標点の分散が σ^2 の場合誤差伝播の法則より基準尺の分散 σ_l^2 は式(4.1.3)となる。

$$\sigma_l^2 = 2\sigma^2 \quad (4.1.3)$$

この標準偏差(4.1.4)が基準尺の重みとなる。

$$\sigma_l = \sqrt{2}\sigma \quad (4.1.4)$$

基準尺製作の工程における σ は0.1mmくらいである、基準尺は画像中にあればよく、標点のように常設される必要はないため、高精度の計測を目的とする場合は、撮影時に多くの基準尺を画像中に入れる工夫を行うことを検討する。

4.1.4 撮影枚数および計測点数の検討

次に撮影作業における諸因子の最適条件を計測精度との関係から考察する。撮影作業に関する諸因子とは、画像枚数、標点の数および撮影位置に関するものであるが、撮影位置に関しては後節にて計測対象との関係から考察する。

標点の数について考えると、一般に標点は所望する標点の数だけ設置すれば良いのであるが、内部標定要素の中の特にレンズ歪に関して、モデル式によって未知数とにおいて他の未知数と同時に求める、すなわちレンズ歪みを解析的に修正する方法では、レンズ歪は画像の周辺ほど大きくなる傾向にあり、一つの画像の中に標点が偏りなく写っている方が有効に修正を行うことができる。但し、対象物によっては、レンズ歪の大きな画像周辺部に標点が配置されないように、画像の中央部だけに標点が存在するように撮影計画をたてることも可能であるならば、標点の数を限定することも考えられる。

その一方で、標点の数は第2章で論じたように観測方程式の数を画像枚数と共に決定する。すなわち、標点の数を n 個、画像枚数を m 枚とすると観測方程式は $2mn$ 個成立する。標点を1つ増やすごとに未知数は $3n$ 個増えるので、標点の数を増すことは未知数に比べて観測方程式の数を大きく増やすことを意味し、前章で議論した精度に関する自由度を大きくすることで観測値の分散を小さくすることに寄与する。そのため、標点の数は設置の労力を考えて、できるだけ多く配置するほうが有利であると考えられる。

また、画像枚数も観測方程式の数を増やすという意味で多いほうが誤差を減少させる意味で望ましい。本研究での計測は写真撮影であり、画像枚数は計測における測定回数に相当すると考えられるので、その効果を定性的に考察する。

解析によって得られる標点の座標は確率変数として求められる。これを一般化して、

正規分布をしている確率変数 x について、 N 個の測定値 $x_1 \cdots x_n$ を得た場合を考える。

各測定値の重みが同じならば、各測定値から得られる真の値 X の最良推定値は式(4.1.5)に示す値 $x_1 \cdots x_n$ の平均値 u_x である。

$$u_x = \frac{\sum x_i}{N} \quad (4.1.5)$$

測定値 $x_1 \cdots x_n$ のそれぞれが正規分布をしている場合は、その平均値も正規分布となる。前章での 3.6 節で議論したように、誤差伝播の法則より平均値の分散 σ_u^2 は式(4.1.6)のように表され、その標準偏差は式(4.1.7)となる。

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{1}{N} \cdots \frac{1}{N} \right) \sigma_x^2 \left(\frac{1}{N} \cdots \frac{1}{N} \right)^T = \frac{\sigma_x^2}{N} \quad (4.1.6)$$

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \quad (4.1.7)$$

式 (3.5.5) $\hat{x} = (A^T W A)^{-1} A^T W e$ に当てはめて考えると、 σ_u が左辺の未知数の標準偏差に相当し、 σ_x が右辺の観測値、 N は観測回数に相当する。即ち、求める未知数の標準偏差である内的誤差の値は、観測値の観測回数の平方根に反比例する。さらに、本研究においては、計測は写真撮影であり、1つの対象点は何本の光線によって解析されたかによって計測精度は決定されると考えられる。この場合、撮影枚数は式(4.1.5)式の右辺の測定回数 N に相当する。

これより、(4.1.7)式から

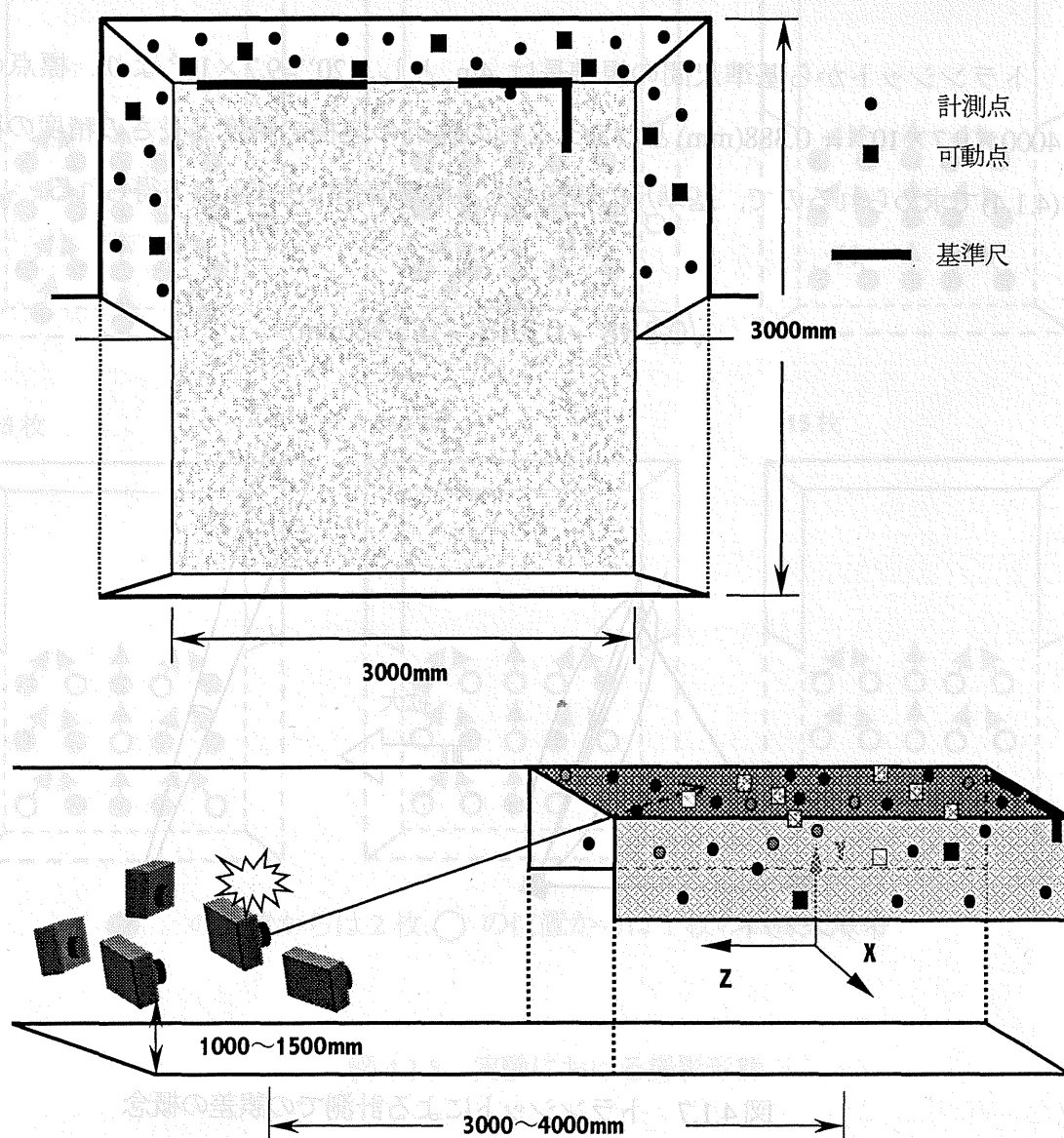
$$\text{内的精度} \propto \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (\text{写真枚数}) \quad (4.1.8)$$

が成立する。従って、画像枚数を多くすることは精度向上には効果があるが、精度とは指数関数の関係があるため、画像枚数による精度向上には限界があることが分かる。

そこで室内実験により、画像枚数と標点の数が精度に及ぼす効果を定量的に検証する

ことを試みた。室内実験での計測対象は高さ 3m, 幅 3m, および奥行き 3m からなる室内の空間の天井および左右の壁面に標点を設置したものであり, 図 4.1.6 にその概略図を示す。

標点は 80 個設置し, その中の 10 個には仮想的な変位が与えられるよう, マイクロメーターに取り付けたものを用意し, 0.001mm 単位の変位を生じさせることができるようにした。また, あらかじめ 20 秒読みのトランシットで測定した 2 点の座標値から長さを計算した座標を用いて, 長さ情報を付与する基準尺として用いた。この際, トランシットを 2 台利用し, お互いを視準するコリメーションによる計測で基準方向を決め, 正位・反位を 2 対回ずつ計 4 回の計測によりその長さを求めた。



内室の光の明るさの測定は、光の明るさを測定する機器を用いて行う。このとき、光の明るさを測定する機器の精度は、光の明るさを測定する機器の精度に依存する。また、光の明るさを測定する機器の精度は、光の明るさを測定する機器の精度に依存する。

また、光の明るさを測定する機器の精度は、光の明るさを測定する機器の精度に依存する。また、光の明るさを測定する機器の精度は、光の明るさを測定する機器の精度に依存する。

基準尺に関する計測精度は前節での議論を基にして、次のようにその重みを決定した。

(rad)読みのトランシットで L m 先の標点を計測したとき、その観測の幅 d は図 4.1.7 より式(4.1.9)で与えられる。

$$d = L \sin \theta \cong L \theta \quad (4.1.9)$$

トランシットから基準尺間の視準長は 4m とし、 $20'' = 9.7 \times 10^{-5}$ より、標点の精度は $4000 \times 9.7 \times 10^{-5} = 0.388(\text{mm})$ となる。2つの標点の座標の精度と長さの精度の関係は式(4.1.4)で求められるので、基準尺の精度である標準偏差は次式として得られる。

$$\sqrt{0.388^2 + 0.388^2} = 0.549(\text{mm}) \quad (4.1.10)$$

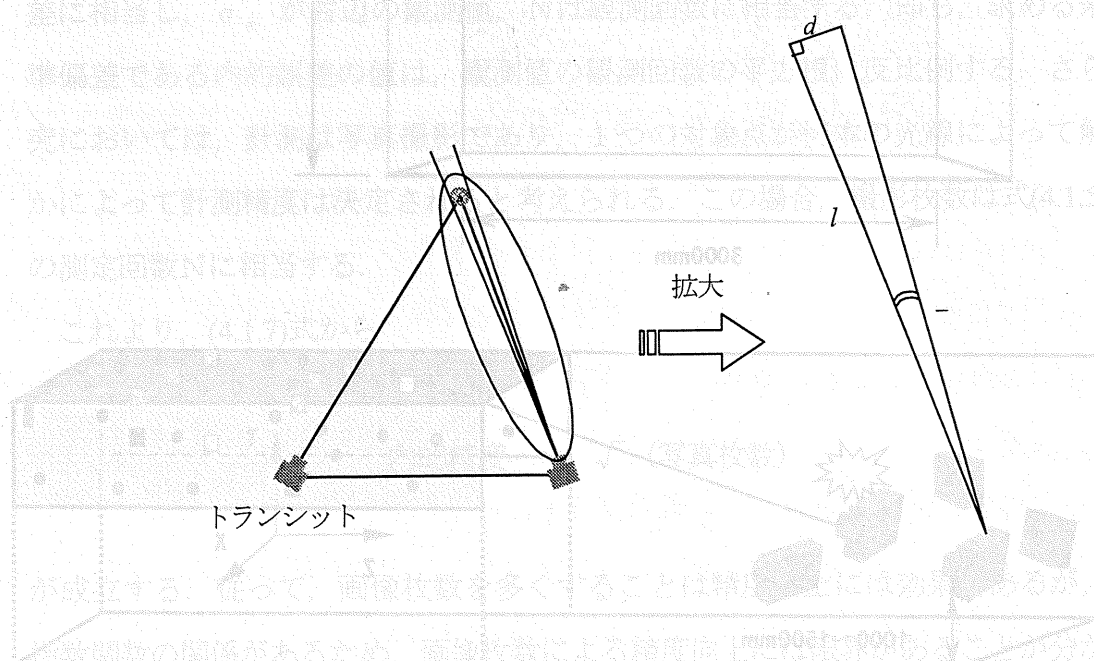


図 4.1.7 トランシットによる計測での誤差の概念

これを基準尺の事前誤差 σ_s として、重み行列の中に組み入れる。

画像枚数と標点数については、画像枚数は 15 から 5 枚おきに 40 までの範囲で、標点の数については 30 個から 10 個ずつ 90 個までの範囲で変化させ、それぞれの組み合わせにおける内的精度 σ_{xyz} を求めた。実験における撮影の位置と角度を図 4.1.8 に示す。なお、図において黒で示す位置では撮影の高さ、すなわち俯角を変えて 2 枚撮影したことを示す。また、撮影は 28mm レンズ搭載の 274 万画素カラー仕様のデジタルカメラで行った。

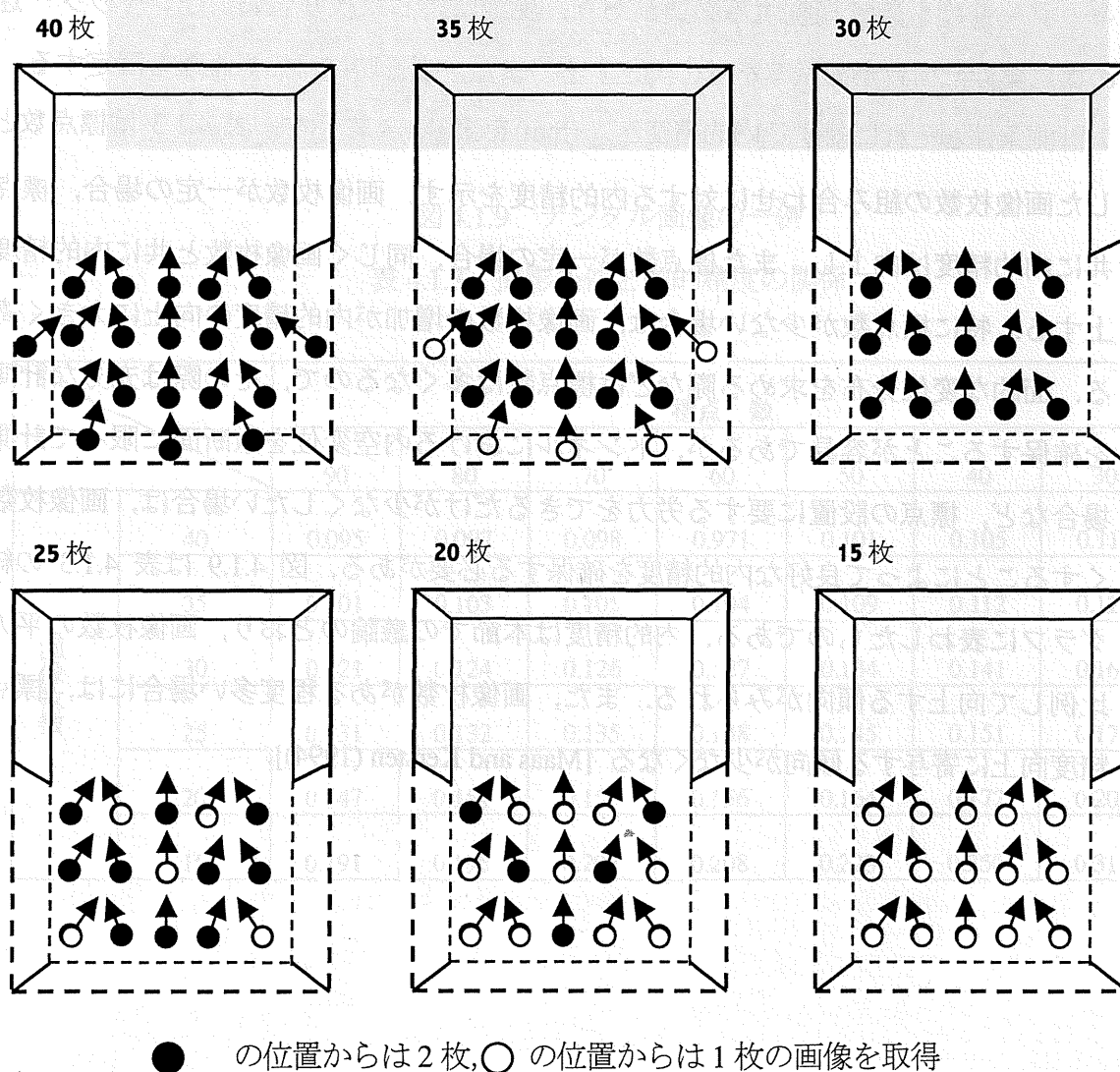


図 4.1.8 実験における撮影形態

図 4.1.9 に撮影によって得られたデジタル画像の一例を示す。撮影時はフラッシュ光の下で行ったため、標点が白く光った状態で撮影される。また、標点以外の背景が標点認識の支障にならないように、絞りの値はできるだけ大きな値を用いる。特に、背景に光りを反射する物体が存在した場合には標点と誤認しやすい。標点は光の反射効率を高めているので、一般にはその他の物体とは区別がつくが、室内などの金属物体に強いフラッシュ光が照射された場合には誤認の危険性が大きくなる。そのため、絞りの値は大きくして標点以外の反射物体をできるだけ写さないように工夫した。また、それに伴いシャッター速度を適宜調整する必要がある。現場に応じた絞り値およびシャッター速度等の撮影条件は何枚かの試写を行い決定する。また、撮影時には焦点距離を固定する。

計測条件とそれに対する内的精度 σ_{xyz} (mm)を表 4.1.3 に示す。表 4.1.3 は標点数と撮影した画像枚数の組み合わせに対する内的精度を示す。画像枚数が一定の場合、標点数と共に内的精度は向上し、また標点数が一定の場合、同じく画像枚数と共に内的精度は向上する。特に標点数が少ない場合は、画像枚数の増加が内的精度の向上に大きく寄与する。面的な変位分布を求める際などは標点数は多くなるので、その際は十分な計測精度を確保することが容易であるが、トンネルにおける内空変位を数断面に限って計測する場合など、標点の設置に要する労力をできるだけ少なくしたい場合は、画像枚数を多くすることによって良好な内的精度を確保する必要がある。図 4.1.9 は表 4.1.3 の結果をグラフに表わしたものである。内的精度は本節での議論のとおり、画像枚数の平方根に比例して向上する傾向がみられる。また、画像枚数がある程度多い場合には、標点数が精度向上に寄与する傾向が少なくなる [Maas and Kersten (1994)]。

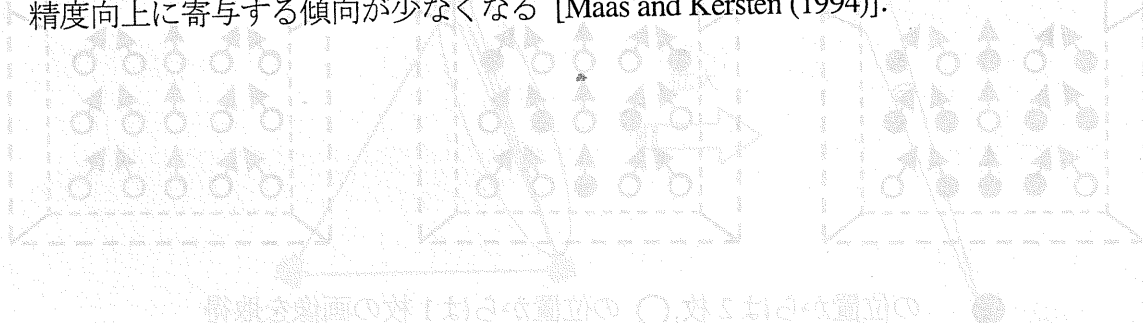


図 4.1.9 トンネル変位計測のための撮影条件の決定

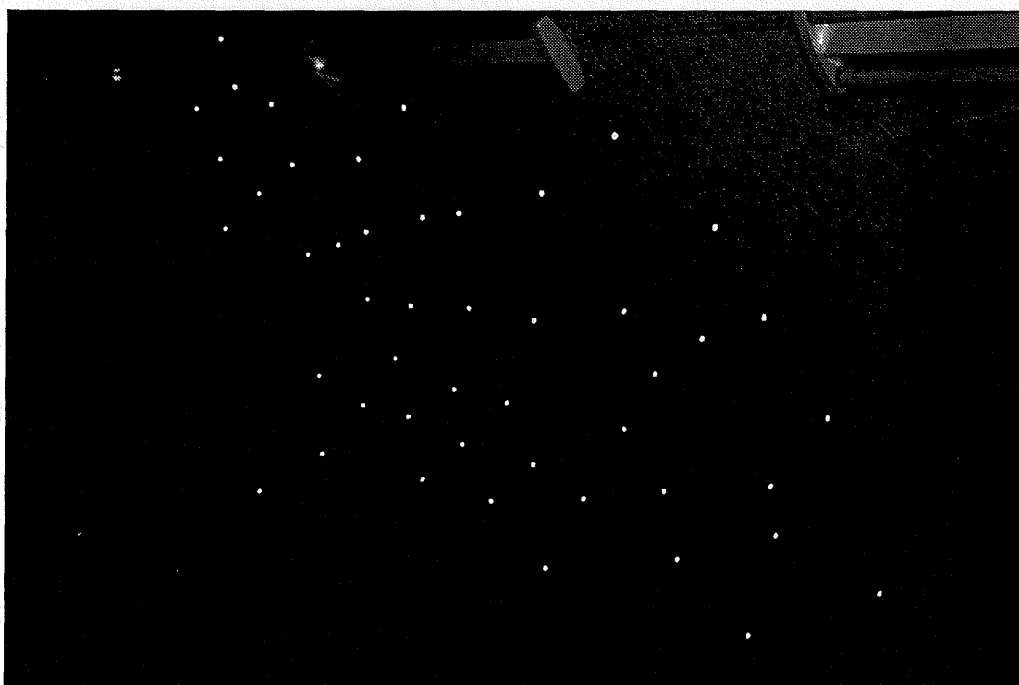


図 4.1.9 デジタル画像の一例

表 4.1.3 撮影条件と内的精度の関係

		標 点 数						
		90	80	70	60	50	40	30
画像枚数	40	0.095	0.097	0.098	0.971	0.101	0.105	0.116
	35	0.101	0.103	0.105	0.104	0.109	0.112	0.125
	30	0.121	0.124	0.126	0.127	0.134	0.141	0.165
	25	0.131	0.132	0.135	0.138	0.145	0.151	0.175
	20	0.147	0.151	0.153	0.156	0.164	0.172	0.203
	15	0.191	0.195	0.207	0.208	0.223	0.250	0.311

表 4.2.2 外的精度の検証結果

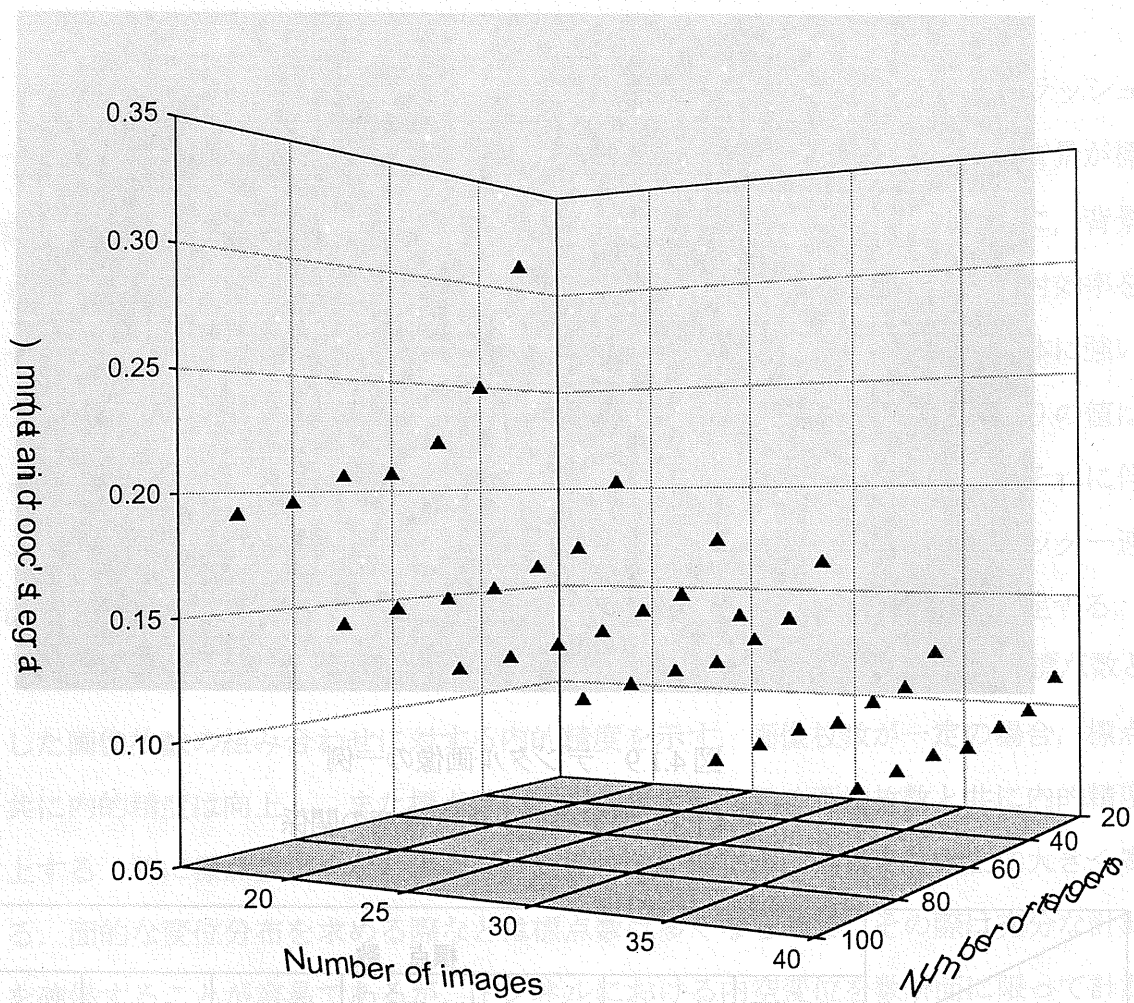


図 4.1.9 画像枚数および標点数と内的精度の関係

4.2 再現性の検証

前節と同じ室内実験施設を用いて、本計測手法の再現性を検証した。標点数として 90, 基準尺を 2 本配置された対象を, 28mm レンズ搭載 274 万画素カラー仕様のデジタルカメラを用いて 40 枚の画像を撮影する計測を 3 回行った。結果を表 4.2.1 に示す。

表 4.2.1 再現性実験の結果

		1st	2nd	3rd
標点計測誤差 σ_0 (μm)		0.480	0.437	0.442
内的精度 (mm)	σ_X	0.095	0.086	0.088
	σ_Y	0.042	0.039	0.040
	σ_Z	0.128	0.116	0.123
	平均 (σ_{YZ})	0.095	0.086	0.090

画像計測誤差は3回とも $0.5\mu\text{m}$ であった。使用したカメラの1画素の大きさは $11.8\mu\text{m}$ であったので、約 1/20pixel にて計測が行われたことを示す。また座標成分であるX、YおよびZ成分は、それぞれ図 4.1.6 における水平方向、高さ方向そして光軸方向を表す。表 4.2.1 における各座標成分の内的精度はほぼ同じであり、標点の計測誤差が保持でき、撮影形態も変えなければ本計測は良好な再現性を有していると考えられる。

また、本計測手法の特徴として光軸方向であるZ軸方向の内的精度が、他の座標成分X、Y成分に比べて劣化していることが分かる。これは、図 4.1.8 で示した撮影状態に依存して発生したもので、後節にて詳細に議論するが撮影角度に関して、光軸方向が最も限定されているためである。X成分がY成分に比較すれば内的精度が悪いのも、同じく左右方向への移動が限定された状態での撮影場所が選択されたため、X成分に関する撮影角度が限定されたのに対し、Y成分すなわち高さ方向は前後に撮影場所を移動することによって、さまざまな俯角をもった画像が得られたために良好な内的精度が得られたと考えられる。

これを現場条件に当てはめれば、トンネルなどでは左右の方向の移動が限られるため、X成分あるいはZ成分の内的誤差が大きく、斜面の計測などでは俯角が限られるためY成分あるいはZ成分の内的誤差が大きくなる可能性がある。この問題点は後章で再度検討する。

次に図 4.1.6 に示したマイクロメーターに設置した標点に変位を与え、本手法による変位量と比較することで外的誤差を検証した。3回の計測のうち2回に変位を生じさせ、2回の変位に関する外的精度を式 (3.6.7) によって求めた。3回の計測における内的精度とともに結果を表 4.2.2 に示す。

表 4.2.2 外的精度の検証結果

	2nd-1st		3rd-1st		外的精度	内的精度
	解析変位	実変位	解析変位	実変位		
1	1.146	1.000	2.610	2.500	0.129	0.079
2	1.180	1.150	3.157	3.150	0.022	0.058
3	1.536	1.500	2.121	2.000	0.089	0.052
4	0.935	1.000	2.858	3.000	0.110	0.063
5	1.193	1.000	1.791	1.500	0.247	0.078
6	1.037	1.000	3.589	3.500	0.068	0.090
7	0.743	1.000	0.809	1.000	0.227	0.079
8	1.349	1.200	1.988	1.700	0.229	0.071
9	1.260	1.300	1.280	1.500	0.158	0.077
10	1.044	0.850	1.602	1.350	0.225	0.094

(単位 : mm)

外的精度は平均で約 0.2mm である。英語では外的精度は Accuracy, 内的精度は Precision と表現され, それぞれ偏差とバラツキの物理的概念に相当する。内的精度が良好であれば, 外的精度も良好であるとは限らない。本計測で外的精度が 0.2mm 以上のものは, Z 方向と Y 方向の変位を生じさせたものであった。トンネルなどの内空変位の計測を考えた場合, 外的精度 0.2mm で内的精度が 0.1mm 以下という精度をもつ計測は有用な手法である。現場での撮影条件が本検証実験通りにできるかどうかは別途検討する必要があるが, 本検証実験により, 標点の計測が良好に行えれば, 良好な外的誤差と内的誤差を得ることができることが実証できた。

4.3 地盤挙動計測のための拘束条件

これまでの画像を使った計測法と異なり, 地盤の挙動を解析する数学的な特徴として, 基準点の有無に関わらず標点の座標を求めることが要求されることを述べ, そのために

最小ノルムの最小二乗解を求める手法を構築することを前章にて議論した。さらに地盤挙動を対象とした解析において、計測法に関わる問題点が存在する。それは、これまでの画像計測と異なる点として、遠い距離にある対象物を解析する場合が存在することである。

この問題をさらに詳細に考察するため、あらためて最小ノルムの最小二乗解について考察する。前章で論じたように、解を導出するに当たって、最小二乗条件に拘束条件を加え一意の解を求めた。拘束条件はノルム最小であるが物理的には座標軸を固定することであり、その固定方法は並進、回転および長さを拘束する情報を加えることであった。これは、未知数からなる図形の重心を固定する条件により形成された拘束条件である [Okamoto (1988)]。

しかしながら、計測対象とする地盤、特に斜面の挙動を計測する場合、対象物からカメラまでの距離は一般に数 10m 以上になるのが通例で、また前節にて述べたように、精度を向上させるためにさまざまな撮影位置から多くの画像を撮影する計測を行った場合、未知数からなる図形の重心を考えると、その重心から均等に遠い距離にあるカメラの位置や角度といった外部標定要素と標点座標の両者が均等な誤差をもつことになる。

数 m 以内の近距離から工業製品を計測する場合と異なり、地盤挙動を対象とした計測においては、全未知数の重心を固定して得られた解よりも、地盤挙動を表す標点の未知数の図形が形成する重心を固定するのが得策である。すなわち、カメラの位置と角度を含めた未知数の精度を向上させることは不要であり、標点の計測精度のみ向上させれば良い。

この標点の精度向上を考えた最小ノルムの最小二乗解を求める条件式は(4.3.2)となる。

$$\phi = v^T v + \frac{1}{2} \lambda (x_3^T x_3) \quad (4.3.2)$$

すなわち、前章で議論したように未知数を外部標定要素に関する x_1 、内部標定要素に関する x_2 、そして計測点 x_3 に分けて考えたので、計測点のノルム最小を満たす条件を拘束条件とする最小二乗条件により、計測点の推定値の分散を最小にする最小二乗解を得ることができる。具体的にこの条件の下での解を求める手法であるが、本研究では、幾

何学的な関係から最小二乗解の拘束条件を考え、結果として容易にその条件を作り出してきた。ここでも、幾何学的な考察により、地盤挙動の評価を行うための条件を見出していく [Schmitt(1985)]。前章にて幾何学的な関係から拘束条件 $G^T = (g_1 \ g_2 \ \cdots \ g_6)$ を求め、さらに G に対して分散に関する重み P をかけた拘束条件 B を考えた。

$$B = PG \quad (4.3.3)$$

これまでの議論により、この重みを式(4.3.2)に関する計測点に関するノルム $\|\hat{x}_3\|$ を拘束するように選択することが必要になる。

前章では並進と回転によりモデルパラメーターである未知数に対する拘束条件を導出した。その結果、拘束条件となるベクトル G を式(3.4.8)のように作成した。

$$G_1 = \begin{bmatrix} \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & -Z_{0i} & Y_{0i} & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & Z_{0i} & 0 & -X_{0i} & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & -Y_{0i} & X_{0i} & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \end{bmatrix} \quad (4.3.4)$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & 0 & -Z_j & Y_j & \cdots \\ \cdots & Z_j & 0 & -X_j & \cdots \\ \cdots & -Y_j & X_j & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

ここで、 G_1 は外部標定要素に対する拘束条件であり、 G_3 は計測点に対する拘束条件である。式(4.3.3)より、計測点に関する拘束条件を取り出すように重み P を考え、拘束条件 B を作成する。

$$B = PG = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G'_3 \end{bmatrix} \quad (4.3.3)$$

計測点の数が n 個の場合、式(4.3.3)によって作成される $3n$ 行 6 列の行列 B によって与えられる拘束条件を考慮して解を求める。ただし、重み P は計測対象ごとに考慮すれば良く、計測対象区域と撮影位置の距離が数 m 以内の近接で収束撮影が可能な場合、例えばトンネルなどで危険箇所を重点的に計測する場合には式(4.3.4)の拘束条件を用いて全体の図形の拘束を考慮しても、解にはさほど影響を与えないことが考えられる。

$$B = PG = \begin{bmatrix} G'_1 & 0 & G'_3 \end{bmatrix} \quad (4.3.4)$$

本研究で考察した拘束条件の取り扱いで重要なのは、撮影ネットワークとの関係であり、斜面といった撮影距離が大きい場合や、トンネルの中などの線形構造物の中での撮影により限られた撮影条件での計測を行う場合、まずはネットワークの弱さを回避することが肝要になる。それが困難な際には、式(4.3.3)の拘束により、誤差をどのモデルパラメータにどのように分担させるかを考慮する計測計画を事前に構築することが重要である [Fraser (1994)].

本節で考察した手法の有用性を実証するために、4.1.4 節で記述した室内実験によって拘束条件を変えた場合の計測精度の差を検証した。撮影は、28mm レンズ搭載の 274 万画素カラー使用のデジタルカメラを用いて、図 4.1.8 に示した 40 枚の画像を撮影する条件にて行った。また、解析に使用したターゲットは 85 個である。

解析においては、同じ画像に対して式(4.3.3)および式(4.3.4)の拘束条件を使用した。その結果を表 4.3.1 に示す。いずれの場合も 2 本の基準尺によって長さ情報を付与したので係数行列の rank 落ちは 6 であり、6 つの拘束条件を導入した。

画像計測精度は、いずれも同一で、約 $1/25\text{Pixel}$ の精度 $\hat{\sigma}_0 = 0.468\text{ cm}$ であった。当然のことながら、画像計測誤差に対しては拘束条件の違いが影響しない。一方、各座標の内的精度は大きく異なっており、本節での考察のとおり式(4.3.3)の G_3 拘束の方が式(4.3.4)の $G_1 G_3$ 拘束よりも良好な値を出している。本実験では撮影距離が比較的近い室内実験であったため重心の位置は不利な状態にはならないが、撮影形態が限定されていることによる撮影ネットワークの弱さが発生する。実験結果は、誤差が均等に分散させるよりも、計測点の重みを大きくして最小二乗解を求めた方が有用であることを証明した。

また、本節で検討した手法は、解析するモデルパラメータが少なくなることで、解析

に要する時間の短縮の効果も発現していることが判明した。この結果を利用することで、地盤挙動を評価するための高精度な計測システムの構築が可能になる。

表 4.3.1 拘束条件の違いによる解析結果の相違

	G_1G_3 拘束	G_3 拘束
繰返し計算回数	4	4
画像計測精度(_m)	0.4689	0.4689
内的精度 (mm)	σ_x	0.3171
	σ_y	0.0922
	σ_z	0.1497
	σ_{xyz}	0.4599
繰返し計算 1 回の所要時間 (sec)	38.36	5.03

4.4 第 4 章のまとめ

本章では本研究の計測対象とする地盤挙動に関して、計測点としての特徴ある認識点を対象物に見出しにくい、あるいは撮影距離が遠くまた撮影位置が限定されるといった特有の問題が発生し、それらは逆解析の過程で不適切性を発生させる危険があることを

述べた上で、それを回避する手段を含めた計測における各段階での諸因子について考察を行った。その結果は次のようにまとめられる。

- (1) 計測対象に人工的な標点を設けることにより、計測対象物の画像上での標点の 2 次元座標計測精度を向上させる必要がある。この場合、その標点の配置も計測精度に影響を与え、レンズ歪みなどの系統誤差を解消するために画面中に均等に写るようにその個数を調整する必要がある。
- (2) 画像枚数は計測精度に影響を与えるが、逆に要求される計測精度に応じて画像枚数を調整することができ、あらかじめその枚数は定量的に判断することができるため、計測精度に応じた計測システムの構築を行うことが可能である。
- (3) ノルム最小の最小二乗解によって基準点の有無に関わらず計測点の 3 次元座標を求めることが可能であるが、地盤挙動を対象にした場合、さらに求めるモデルパラメーターの重みを考慮する必要がある。これには最小ノルム解の考え方に工夫が必要となり、ノルム最小解は未知数であるモデルパラメーターの分散を最小にする意味があることから、計測点の分散最小解を求めるノルムに関する拘束条件を考慮することが重要となる。具体的には、計測点とカメラ位置からなる図形の構成を考慮して、当図形の重心位置が計測点の精度から見て不利になる場合、計測点からなる図形の重心のみを固定するという方法を選択することで、このノルム最小解に対応できることを考察した。

(1) および (2) の問題は、逆に計測における効率性を低下させる原因ともなるため、斜面およびトンネルを対称にした計測において、どのように対処するかは後章にて具体的事例に基づいて考察していく。

参考文献

- 1) C.S.Fraser : Optimization of precision in close-range photogrammetry, Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, Vol.48, No.4, pp.561-570, 1982.

- 2) C.S.Fraser : Network design consideration for non-topographic photogrammetry, Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, Vol.50,No.8,pp.1115-1126,1984.
- 3) Y.Ohnishi, C.Zhang, S.Nishiyama, K.Hayashi, and A.Okamoto : Precise Close Range Photogrammetry System in Rock Displacement Measurement,'99 Japan-Korea Joint Symposium on Rock Engineering, Fukuoka,Japan,pp.239-246,1999.
- 4) C.S.Fraser : Network Design,K.B.Atkinson ed., Close range photogrammetry and machine vision,pp.256-281.
- 5) 斎藤正徳 : 最小二乗法の計算法, 物理探鉱, Vol.36,pp.72-86,1983.
- 6) 斎藤正徳 : 特異値分解と最小二乗法, 物理探鉱, Vol.36,pp.146-158,1983.
- 7) S.Treitel and R.Wang : The determination of digital Wiener filters from an ill-conditioned system of normal equations, Geophysical Prospecting, Vol.24,pp.317-327,1975.
- 8) K.Aki and W.H.K.Lee : Determination of three-dimensional velocity anomalies under a seismic array using first P arrival times from local earthquakes, 1. A Homogeneous initial model, Journal of Geophysical Research, Vol.81,pp.4381-4399,1976.
- 9) W.Menke : 柳谷俊, 塚田和彦訳:離散インバース理論, 古今書院, 1997.
- 10) H.B.Papo : Free Net Analysis in Close-Range Photogrammetry, Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, Vol.48,No.4,pp.571-576,1982.
- 11) C.S.Fraser : Microwave Antenna Measurement, Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, Vol.52,No.10,pp.1627-1635,1996.
- 12) T.A.Clarke, M.A.R.Cooper and J.G.Fryer : An estimator for the random error in subpixel target location and its use in bundle adjustment,Optical 3-D measurements techniques II, Pub.Wichmann,Karlsruhe,pp.161-168.
- 13) 服部進, 秋本圭一, 井本治孝 (2001) : コード付きターゲットを使った工業画像計測の自動化,電子情報通信学会論文誌, Vol.J84-D- II, No.9,pp.2011-2019.
- 14) M.R.Shorits ,T.A.Clarke and T.Short : A comparison of some techniques for the subpixel location of discrete target images,Videometrics III.SPIE Vol.2350,pp.239-250.
- 15) T.A.Clarke : An Analysis of properties of targets used in digital close range photogrammetric measurement,Videometrics III,SPIE Vol.2350,pp.251-262,1994.
- 16) H.G.Maas and T.Kersten : Digital close-range photogrammetry for dimensional checking and control in a shipyard, Videometrics III,SPIE,Vol.2350, pp.108-114,1994.

17) A.Okamoto : General Free Net Theory in Photogrammetry, The 16th International Congress of International Society for Photogrammetry and Remote Sensing,1988.

18) G.Schmitt : Review of Network Design, E.W.Grafarend and F.Sanso,eds., Optimization and Design of Geodetic Networks, Springer, 1985.

19) C.S.Fraser : Vision-Based Optical Triangulation Systems for Large Scale Dimensional Metrology, ISPRS, Vol.30, No.1, pp.1-6, 1994.

第5章 斜面防災モニタリングシステムとしての具体的応用

わが国は世界でも有数の地殻変動帯に位置しており、地震や火山活動が活発であり、地殻変動によって形成された急峻な地形と脆弱な地質からなっている。このため震災や土砂災害などが発生しやすい環境にある。特に平成7年の北海道豊浜トンネル坑口岩盤斜面崩壊事故の発生以来、岩盤斜面の安定問題に社会の関心も集まるようになった。その一方で、数年前に全国で実施された道路防災点検の結果によれば、我が国において斜面の安定性が不安視され、早期に対策を図る必要の有る箇所が約6万箇所に及んでおり、また日常点検や定期点検により管理する必要があるとされている監視強化箇所においては約14万6千箇所も指摘されており、道路に関する安全にして関するだけでも膨大な数の危険な斜面をかかえている。しかしながら、前述の北海道豊浜トンネルでの事故後ただちに設けられた土木学会などの調査によれば [土木学会(1997)]、岩盤崩壊に対する調査・計測事例は少なく、その崩壊メカニズムに関する調査研究は遅れていると指摘されているのが実情である。危険な斜面の安定性を評価し、崩壊の予知・予測を行うことで、崩壊を未然に防ぐ措置を実施し被害を最小限にいとどめるためには、崩壊に至る前兆現象が現れた場合、その変状をすばやく捉え、的確な対策を検討するために有用な基礎的資料を与える計測技術の完備が欠かせないものとなる [大西・西山(2002)]。

これまで岩盤斜面において適用が検討されてきた計測手法の内容の一覧を図5.1に掲げる。これらの計測は、次のような物理量の計測を対象としている [土木学会(1997)]。

- ・ 変位：地表および地中変位
- ・ 圧力：土圧、水圧および軸力
- ・ 破壊音、小規模崩落の感知
- ・ その他：地温または降雨などの気象変化等

しかしながら、自然斜面に対する崩壊のモニタリング実績は、すべり破壊の場合を除いて極めて少ない。この理由としては、崩壊の前兆現象が捉えにくく崩壊が突発的に生じること、計測器の設置が困難な場所が多く計器の維持管理も困難なことが多いため、さらには場所ごとに崩壊形態が異なることから、適切な計測機器の選択が難しいことな

どが要因として挙げられる。特に岩盤崩壊のモニタリングは地すべりとは異なり、前兆となる現象が現れてから崩壊に至る時間が短いため、リアルタイムの計測技術が要求され、またその計測精度も高いものが必要となっている。その他、計測技術としての要件として、作業が危険であることが多いため遠隔からの計測が可能であること、広範囲に計測できながらも計測コストを抑えることが可能であることなどの厳しい項目も要求される [土木学会(1999)]。

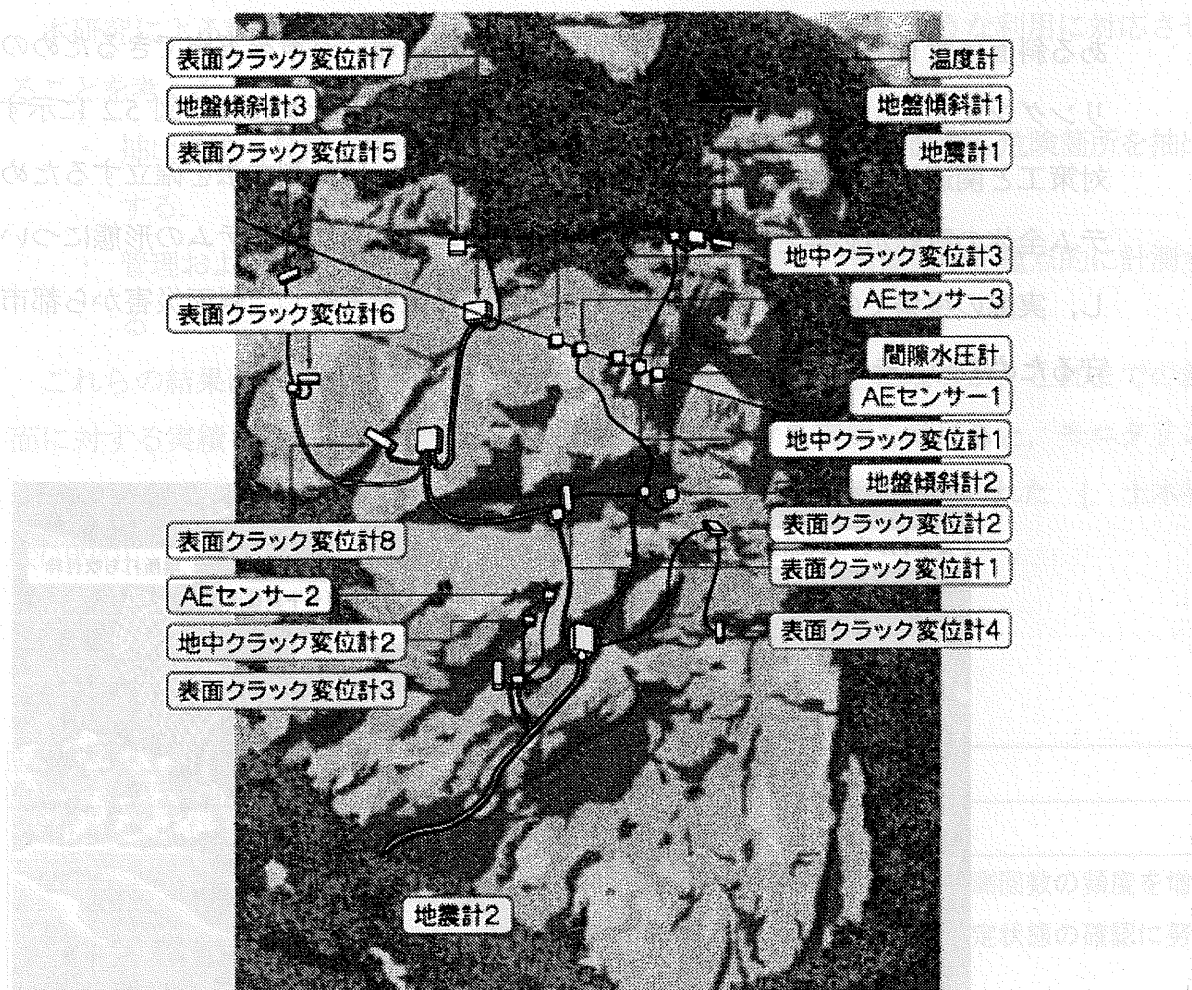


図 5.1 既存技術による岩盤斜面の計測例

建設省土木研究所では、「岩盤崩壊モニタリングの調査・検討ワーキング」を組織し、

全国8ヶ所において岩盤崩壊モニタリング箇所の選定を行い、各箇所への計測機器の設置を行うことで、機器開発や現場での計測技術の向上を続けている [門間・小島(1997)].

しかし従来から使用されている計測機器の多くは局所的な観測であり、広範囲にわたる面的な観測を連続的に評価する計測手法の開発が急務となっている. その後平成9年には、第2白糸トンネル崩壊事故が発生し、道路の監視・管理強化の方策としての岩盤斜面の計測がより一層重要視されるようになってきている [地盤工学会北海道支部(2002)].

本章では、このような斜面防災に対する実状を鑑み、斜面モニタリングシステムの実用化に向けての研究を行うものである. すなわち、地すべりあるいは岩盤崩壊の危険性のある斜面に対して、その前兆現象を的確に捉え、迅速に対策を実施できるためのモニタリングシステムとしての本研究の適用性を考察する. そのためには、図5.2に示すような対策工と関連した管理基準値に適した計測精度あるいは計測方法確立のためのシステム全体の設計が必要となり、本章でもまずモニタリングシステムの形態について議論し、実際の現場での計測結果を通して本研究の効果を考察し、斜面災害から都市生活を守るための防災モニタリングシステムとしての有用性を検証する.

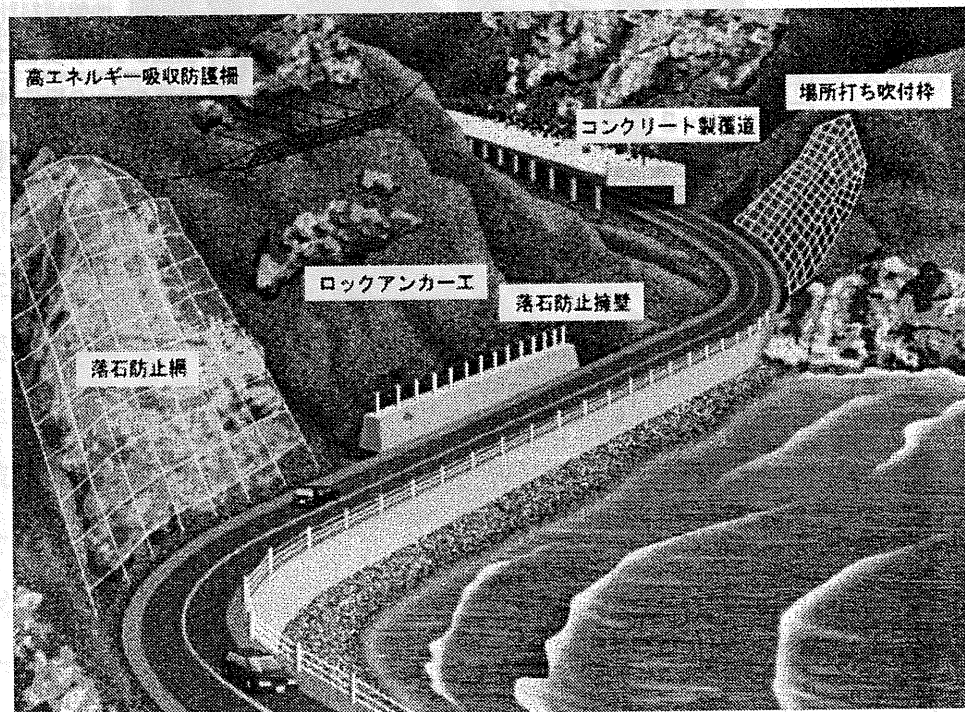


図5.2 岩盤崩壊対策工の例

5.1 斜面モニタリングシステムの概要

現場への適用例を議論していく前に、本研究による斜面モニタリングシステムをどのように利用し実施していくかについて、その概要について述べる。序論でも議論したように、防災システムとしては次の項目に対して具体的に機能することが求められる。

- ・ ハザードを評価するための抽出技術
- ・ 影響を軽減する管理技術
- ・ 災害を予知する監視技術

本研究による計測を利用した斜面モニタリングシステムも次のような利用に対応させることを考える。

- ・ 抽出技術：日常点検の段階として、斜面の挙動を広範囲に計測し危険箇所を抽出する。
- ・ 管理および監視技術：危険な兆候を把握した段階で、当該箇所を重点的に計測する。

これらの結果により斜面に対して対応工を実施していくことになるが、これまでの斜面に対する実績を整理し、本章での現場計測実験における事例を挙げると、モニタリングと関連つけた具体的な方策として表 5.1.1 に示すような対応策が考えられた [土木学会(1994)]。

表 5.1.1 モニタリング結果と対応策の考え方の一例

斜面危険度レベル	状態判定	対応策
レベルⅠ	安定	通常の計測および観察を続行する
レベルⅡ	注意	変状・崩壊等の異常原因の調査を実施。計測回数の頻度を増し、また精度の向上を図ることで地山の安定状態の確認に努める。
レベルⅢ	異常	異常の原因追求により主因に対する対策工を実施する。 対策工は簡単な変更で済むものを実施し、レベルⅡの計測を続行する。
レベルⅣ	限界	工法全体の見直し、切り直し、抑制工および抑止工等の併用を含めて、大規模な対応策の変更を考える。レベルⅡの計測を実施する。

さらに表 5.1.1 に示す各危険度レベルに関して、図 5.1.1 のような管理手法に関するフローチャートが構築し実施された。管理基準値は、各現場において設定されるものであるが、次節で述べる現場での値を表 5.1.2 に示す。この表において必要とされる計測精度を満たすように本研究の計測方法が検討された。

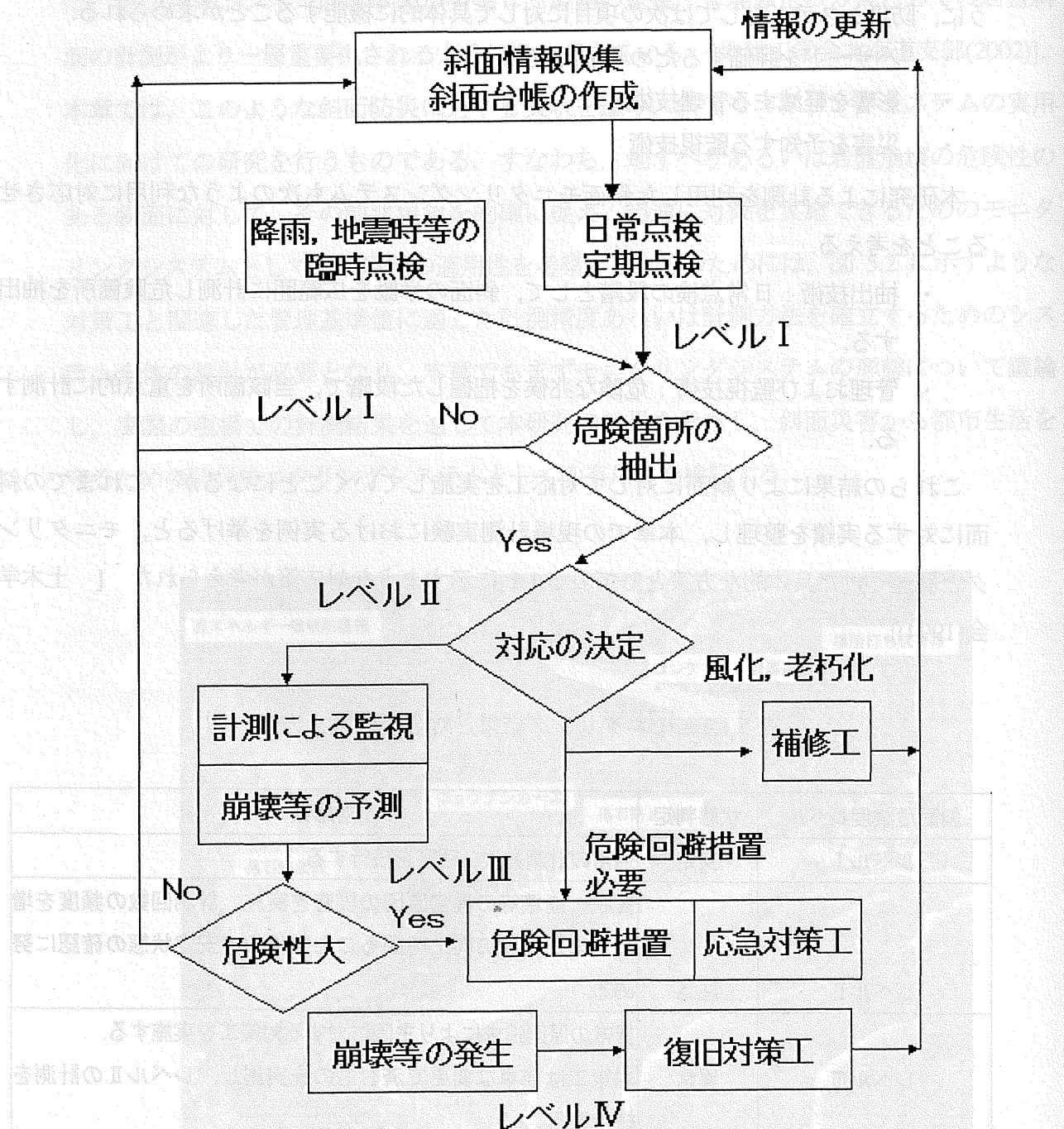


図 5.1.1 斜面モニタリング管理フローチャート

例えばレベルⅠは、広範囲の計測対象斜面から危険箇所を抽出することを目的とするもので、約1ヶ月で10mm以上の変位を出現させる区域を検出することが可能な画像枚数や撮影方法が検討される。次にレベルⅡ以上に対しては、10日間で1mm以上の変位が出現するかどうかを検出する計測仕様が検討される。なおこれは、「地すべり危険地における動態観測施工に関する研究報告書」に準拠して考察されたものであり、前者は伸縮計、地中伸縮計および光波測距儀を用いての計測による管理値として設定されてきた値であり、後者は地中傾斜計での計測において管理されてきた値を参考にしたものである [高速道路調査会 (1988)]。

表 5.1.2 管理基準値設定例

用いる計測機器	管理基準値と対応方針			
	点検・要注意または観測強化	対応の検討	警戒・応急対策、通行止め等の検討	厳重警戒・通行止め
伸縮計、地中変位計 光波測距儀	10mm 以上/30 日	5～50mm 以上/50 日	10mm 以上/30 日	10mm 以上/30 日
挿入型地中傾斜計	1mm 以上/10 日	5～50mm 以上/50 日	—	—
発生する現象例		斜面内・頭部の亀裂、陥没 電柱・フェンスの変状 等	岩石片や砂の連続的な落下 振動、地鳴りの発生 等	

これらの管理基準値を考慮し、本研究による斜面モニタリング管理手法の実用化に向けた研究を次節以降に述べていく。

5.2 斜面モニタリングへの適用例

5.2.1 適用現場の特徴と計測計画

前節で述べた斜面管理手法を実際に試行した計測対象と、計測方法の具体的な事項を記述する [Chikahisa and Matsumoto et al.(2002)]

計測対象区域は図 5.2.1 に示す幅 300m、高さ 50m よりなる切土面に法枠工を施した部分で、設置された孔内傾斜計のデータより深度約 17m 付近にすべり面が確認されており、また設置した地表面伸縮計が降雨時に大きな変位を示すことから、地盤の変状の進行の可能性があると予想された。ただし、斜面全体の挙動を把握するために、広範囲に孔内地中傾斜計やアンカー荷重計を設置することは人的労力あるいは設備投資費から考えて困難であり、従来の計測機器に替わるモニタリング技術が求められていた。そこで、この計測対象区域に対し、まず前節でのレベルⅠに対する計測を実施することにより、300m 区域内における変位分布を求め、重点的に監視する箇所が存在するかどうかの検討を行う。さらに、その結果から重点監視区域を計測するためのレベルⅡに相当する計測手法を実施することが計画された。

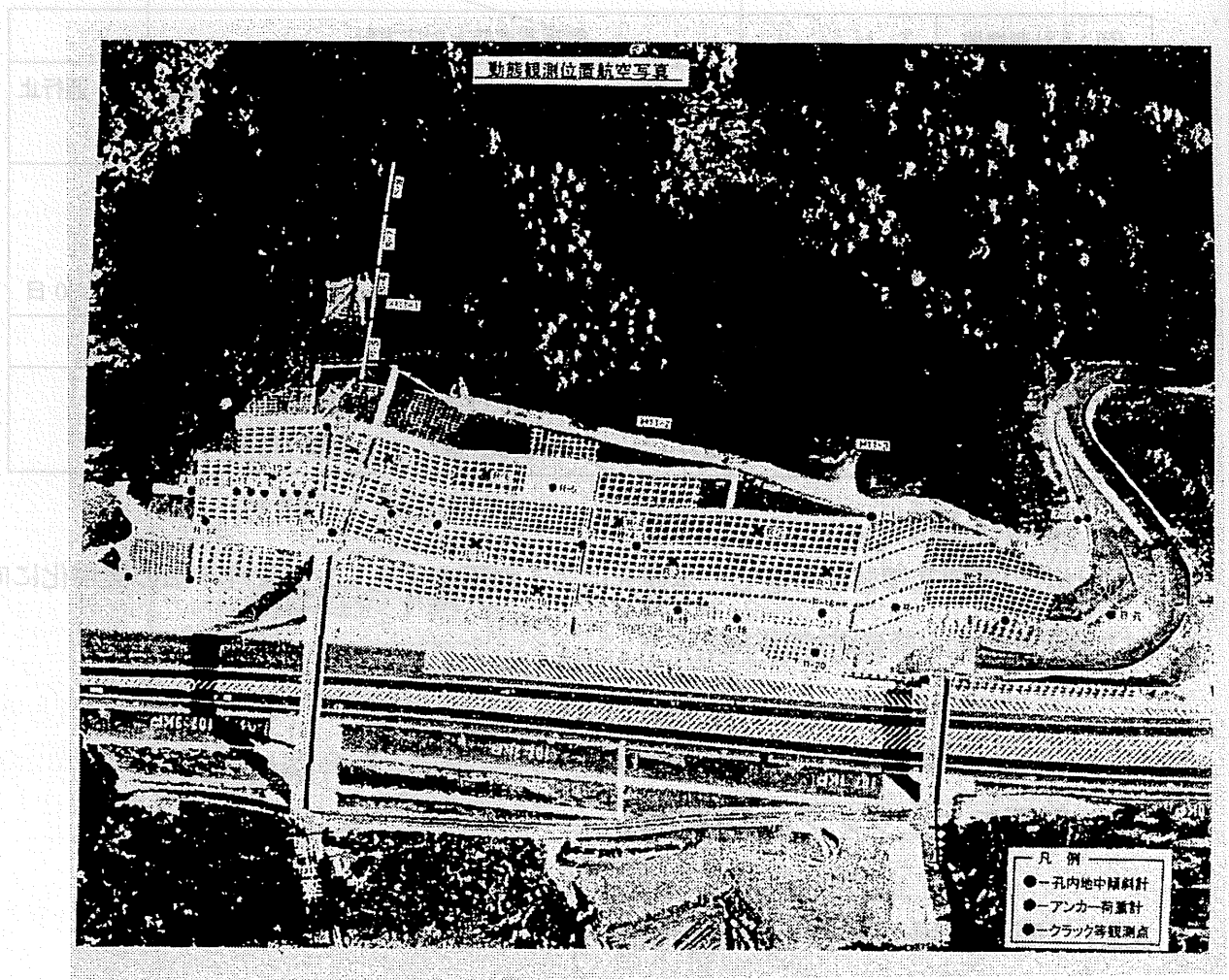
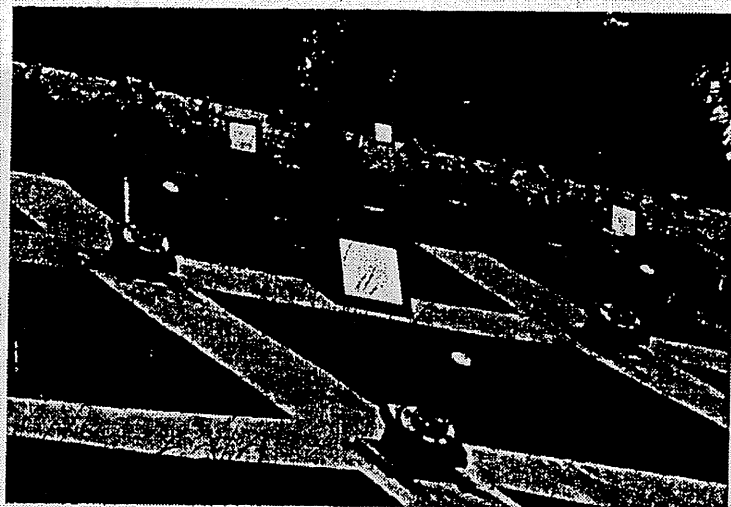


図 5.1.1 斜面の動態観測位置航空写真 (Chikuma and Maruyama et al. (2003))

図 5.2.1 計測対象斜面

図 5.1.1 に示したように、日常点検的に実施する計測によって危険箇所を抽出するためには、画像を取得するための撮影方法はできるだけ簡素化され、また撮影枚数も極端に多くならないものが好ましい。しかしながら、前節でも議論したように計測精度は画像枚数に依存する。画像枚数を増やす一つの理由は、レンズ歪みによる影響を除去するために、計測点が画像のあらゆる部分に写っている状態を作り出すためである。このため 1 箇所においてカメラを回転させながら撮影する。事前にレンズ歪みを計測することで画像枚数を減少させる手法を選択することも可能であるが、これまで第 2 章にて議論したように、使用するデジタルカメラの取り扱いに制限が加えられ計測手法の簡便性が失われてしまう。そこで、再度レンズ歪みについての考察を行い、レンズ歪みと計測精度の関係の検討を行うことで、各レベルに応じた撮影方法を検討することを試みた。一般にレンズの焦点距離が大きくなれば画角が小さくなり、レンズ歪みの影響が少なくなることが考えられる。従って、レンズ歪みとレンズの焦点距離の関係を調べ、前者のレンズ歪みの影響が小さくなる焦点距離のレンズを使用することで 1 箇所当たりの撮影枚数を減少させ、レベル I に応じた撮影方法を構築する。

レンズ歪みの影響は、計測対象現場の中の幅約 40m、高さ約 25m の部分を使用して検証した。そこでは、白色に塗装した 22 個の鋼材鉄板を標点として設置し、また長さ情報を得るための基準尺として、同じ鋼材鉄板を約 1m の間隔を置いて水平方向と鉛直方向の 2 方向 1 組として 5 箇所に設置した。なお、基準尺は再度 3 秒読みのトータルステーションにて鉄板間の距離を計測した値を長さ情報とした。図 5.2.2 に標点を、図 5.2.3 に基準尺の設置状況を示す。



5.2.2 標点の設置状況



図 5.2.3 基準尺の設置状況

この計測対象区間に対してレンズの焦点距離を 3 種類変えた撮影を実施し、レンズ歪みのモデル式の解析結果を検討した。撮影条件は次の通りである。

- ・ 画素数：274 万画素
- ・ レンズ焦点距離：18mm, 28mm, 35mm
- ・ 撮影箇所：6 箇所
- ・ 撮影枚数：1 箇所当たりカメラを 90° ずつ回転させ 4 枚撮影。合計 24 枚

図 5.2.4 に計測した画像例を示す。

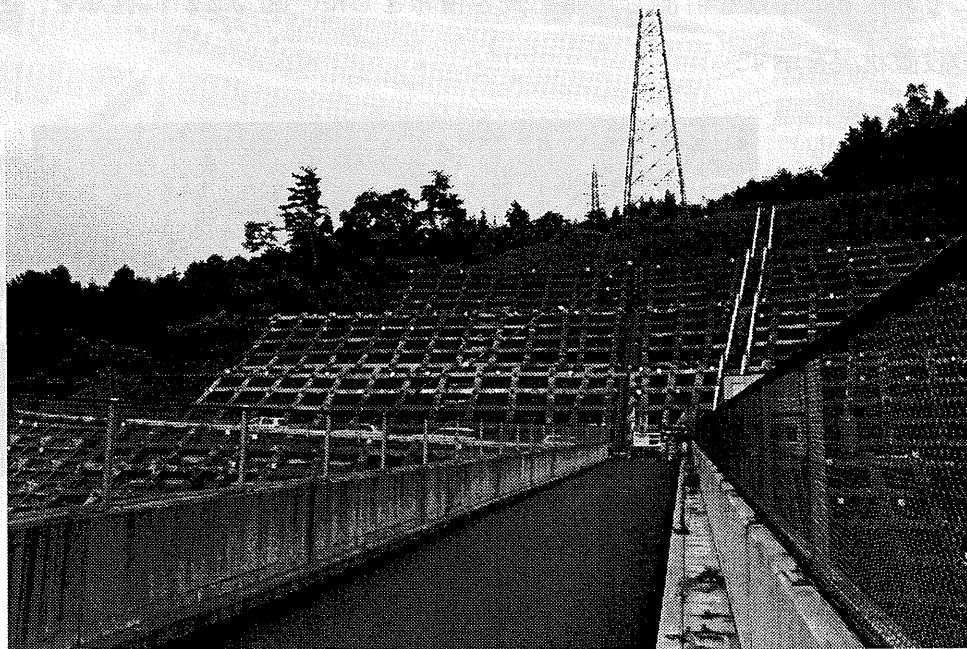


図 5.2.4 計測画像例

撮影はストロボ光が標点に届かないことから、標点による太陽光の反射を利用して、当標点の認識を行った。

計測結果について、図 5.2.5 にレンズ歪みの係数とレンズ焦点距離の関係を示す。但し、レンズ歪み係数は、第 2 章で述べたように 5 つの係数で表現されるが、ここでは放射方向歪曲収差の歪み係数 k_1 と k_2 をその代表として示す。

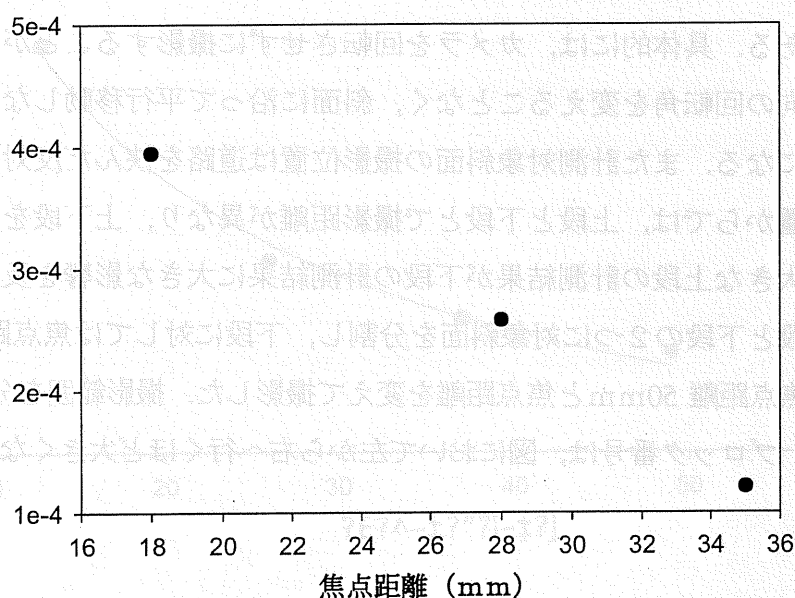


図 5.2.7 撮影枚数と内点精度の関係

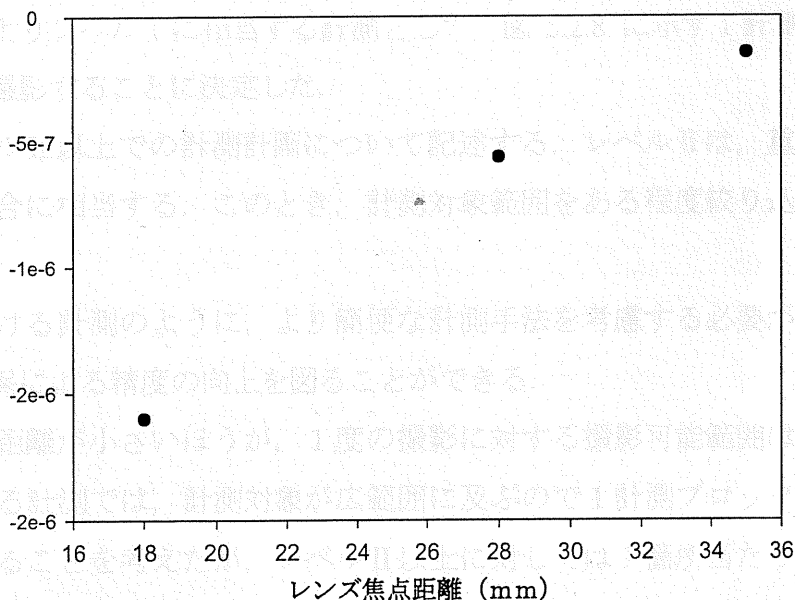


図 5.2.5 レンズ焦点距離と歪み係数の関係

結果が示すように、レンズ焦点距離の増大に伴いレンズ歪み係数は減少することが分かる。これは、同じCCDのサイズのカメラを用いて異なる焦点距離のレンズによって対象物を撮影した場合、焦点距離が大きなほうが光線の歪みは小さくなることによると考えられる。また、焦点距離の大きなレンズを使用したほうが縮尺の値が小さくなり、それによっても計測精度を向上させることが可能である。

この結果より、レベル I に相当するモニタリング過程では、焦点距離の大きなレンズを用いてレンズ歪みの影響を少なくすることで、1箇所当たりの画像枚数を減らすことが可能である。具体的には、カメラを回転させずに撮影することが可能になり、カメラの光軸方向の回転角を変えることなく、斜面に沿って平行移動しながら撮影するという計測作業になる。また計測対象斜面の撮影位置は道路を挟んだ反対側の道路になり、この撮影位置からでは、上段と下段とで撮影距離が異なり、上下段を同時に撮影すると撮影距離の大きな上段の計測結果が下段の計測結果に大きな影響を及ぼすことになる。従って、上段と下段の2つに対象斜面を分割し、下段に対しては焦点距離 35mm、上段に対しては焦点距離 50mmと焦点距離を変えて撮影した。撮影範囲を分割例を図 5.2.6 に示す。なお、ブロック番号は、図において左から右へ行くほど大きくなる。



図 5.2.6 分割した撮影ブロック例

また、1 計測点当たりの撮影枚数を決定するために、前述の計測点を設置した対象区間に対して、撮家枚数を変えて内的精度を求めた結果を図 5.2.7 に示す。

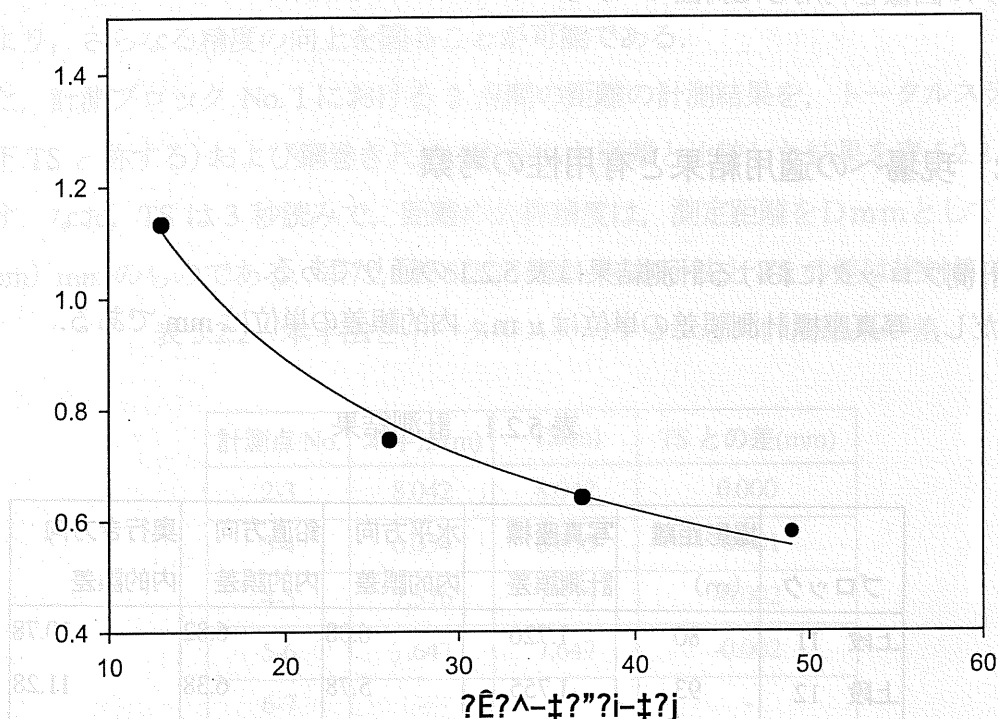


図 5.2.7 写真枚数と内的精度の関係

この結果によりレベル I に相当する計測として、図 5.2.8 に示す 1 計測ブロック当たり 5 枚の画像を撮影することに決定した。

次に、レベル II 以上での計測計画について記述する。レベル II は、重点的に危険箇所を計測する場合に相当する。このとき、計測対象範囲をある程度絞り込むことが可能であり、レベル I における計測のように、より簡便な計測手法を考慮する必要が無い。そのため画像枚数の確保による精度の向上を図ることができる。

また、焦点距離が小さいほうが、1 度の撮影に対する撮影可能範囲は大きくなる。レベル I に対する計測では、計測対象が広範囲に及ぶので 1 計測ブロックにおける撮影枚数を減少させることを考えたが、レベル II 以上に対しては 1 箇所当たりの撮影枚数を増やしても全体としての画像枚数は増加しない。すなわち、焦点距離の小さなレンズを用

いて重点計測対象区域全体を撮影し、光軸方向に回転させながら撮影する手法によってレンズ歪みを解消する。さらに、できるだけ撮影ネットワークを強くする計測、すなわち重点計測区間を取り囲むような撮影を行うことで精度劣化を防ぐ。このように、レンズの焦点距離を変え、管理基準に応じた画像枚数を設定する計画を考慮することにより、デジタル画像を利用した斜面モニタリングシステムを構築することが可能になる。

5.2.2 現場への適用結果と有用性の考察

各計測ブロックにおける計測結果は表 5.2.1 の通りである。

ただし、写真座標計測誤差の単位は μm 、内的誤差の単位は mm である。

表 5.2.1 計測結果

ブロック	撮影距離 (m)	写真座標 計測誤差	水平方向 内的誤差	鉛直方向 内的誤差	奥行き方向 内的誤差
上段 11	80	1.726	6.08	6.82	10.78
上段 12	93	1.755	5.78	6.38	11.28
上段 13	90	1.815	6.34	6.43	14.52
上段 14	90	2.255	7.58	8.61	14.35
上段 15	90	3.305	11.40	12.28	22.54
上段 16	80	2.399	7.92	8.90	14.87
上段 17	80	3.714	13.10	14.34	22.56
上段 18	83	3.373	9.79	10.94	16.77
下段 1	60	1.800	6.33	6.89	12.45
下段 2	70	1.997	5.90	6.17	13.38
下段 3	73	2.244	7.69	8.45	15.81
下段 4	83	2.470	8.43	9.06	18.33
下段 5	83	1.734	5.88	6.66	11.44
下段 6	83	1.811	6.53	6.98	12.50
下段 7	80	1.899	7.26	8.26	13.56
下段 8	80	2.759	11.92	13.53	20.59
下段 9	83	2.214	10.00	11.02	16.32

下段	10	70	2.157	6.67	7.50	11.44
----	----	----	-------	------	------	-------

使用したデジタルカメラのCCD 1 Pixel の大きさは $11.8 \mu\text{m}$ であり、計測は約 $1/7 \sim 1/3$ Pixel の精度で計測が行われたことになる。予定通り 10mm レベルの精度での計測が実施されたが、標点を白色鋼製鉄板ではなく、前章で述べた反射ターゲットに代替することにより、さらなる精度の向上を図ることが可能である。

また、計測ブロック No. 1 における 2 点間の距離の計測結果を、トータルステーション（以下 TS と称する）および鋼巻き尺にて計測した距離と比較した結果を表 5.2.2 と表 5.2.3 に示す。なお、TS は 3 秒読みで、距離の公称精度は、測定距離を $D\text{mm}$ として $\pm (3 + D \times 3\text{ppm}) \text{mm}$ のものである。また、表 5.2.2 において本手法と TS の差は絶対値で表した。

表 5.2.2 本手法とトータルステーションとの計測結果の差

計測点 No.	本手法(m)	TS(m)	TS との差(mm)
2-3	8.042	8.042	0.000
3-4	6.054	6.053	-0.001
4-5	7.576	7.575	-0.002
5-6	7.647	7.647	-0.002
6-7	-	-	-
7-8	6.040	6.040	0.000
8-9	6.619	6.614	-0.005
9-10	3.190	3.191	0.001
10-11	4.905	4.907	0.002
11-12	5.843	5.839	-0.004
12-13	7.484	7.481	-0.003
13-14	5.809	5.808	-0.001
14-15	-	-	-
15-16	5.818	5.819	0.001
16-17	5.841	5.840	-0.001
17-18	3.026	3.022	-0.004
18-19	5.999	6.001	0.001
19-20	5.877	5.875	-0.002
20-21	7.108	7.100	-0.008
21-22	3.999	3.998	-0.001

表 5.2.2 本手法と鋼巻き尺との計測結果の差

計測点 No.	本手法(m)	鋼巻き尺 (m)	鋼巻き尺との差(mm)
2-3	8.042	8.038	0.004
3-4	6.054	6.053	0.001
4-5	7.576	7.571	0.005
5-6	7.647	7.652	-0.003
6-7	-	-	-
7-8	6.040	6.033	0.007
8-9	6.619	6.613	0.006
9-10	3.190	3.195	-0.005
10-11	4.905	4.902	0.003
11-12	5.843	5.843	0.000
12-13	7.484	7.473	0.011
13-14	5.809	5.797	0.012
14-15	-	-	-
15-16	5.818	5.814	0.004
16-17	5.841	5.833	0.008
17-18	3.026	3.022	0.004
18-19	5.999	6.004	-0.005
19-20	5.877	5.883	-0.006
20-21	7.108	7.092	0.016
21-22	3.999	4.001	-0.002

この結果をまとめたものが図 5.2.8 である。図より本研究による計測は、TS の計測精度とほぼ同じであり、レベル I に相当するものとして比較的精度を落とした計測手法を選出したが、従来から行われてきた各種測量手法レベルでの計測精度に等しいモニタリングが実施できたと考えられる。面的な変位分布を捉えるための計測法として考えれば、画像を使うことによる簡便さは TS や鋼巻き尺での計測には無く、それらと同等の精度が確認されたことより、本手法は斜面モニタリングのための計測法としては有用であると考えられる。

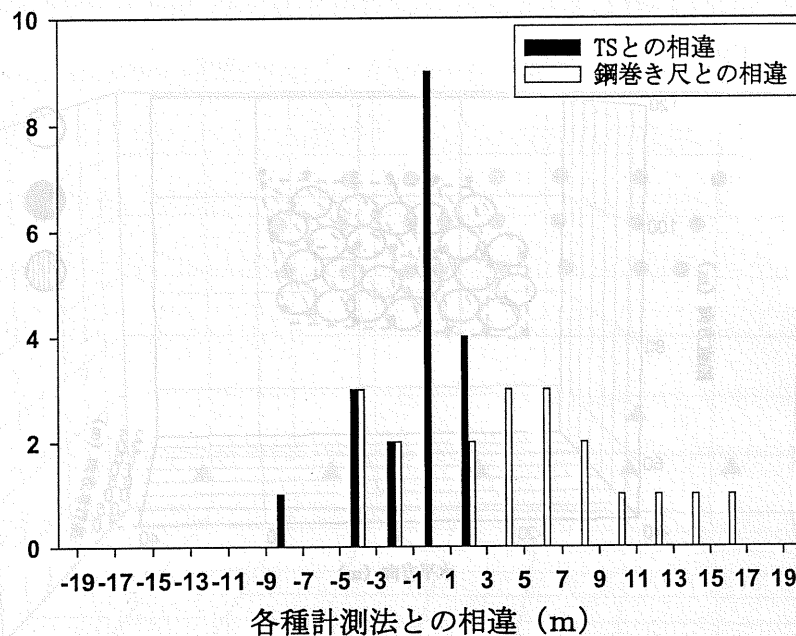


図 5.2.8 各種計測法との比較

本手法は変位の面的な分布を容易に把握できることが特徴の一つである。従って、各標点間の距離の値を利用して、計測対象斜面の歪みの面的な分布を求めることができる。

ここでは、任意の 3 点からなる三角形の面積の変化を歪みに換算して、その分布を求めた。標点 No. 1～21 での面積歪みの結果を図 5.2.9 に示す。歪みは初回の計測と、それから 3 ヶ月後に計測した結果から求めたものである [中村・大西他(2002)]。

図 5.2.13 より局所的に大きな歪みを示す箇所は認められなかった。これは、他の計測ブロックについても同様で、本実験の計測期間内では大きな変状が生じていないことがわかった。また面積歪みではなく、標点間の距離を歪みに換算した値はいずれも 1.5×10^{-3} 以内であった。内的誤差は、表 5.2.2 に示すように測定距離 5～7m に対して約 10mm であり、線歪みに換算すれば約 $1.5 \sim 2.0 \times 10^{-3}$ となる。従って、本計測対象斜面は、線歪みから考えても、ほとんど変状していないと見なして良いと考えられる。前述の管理基準値と照合するため、標点間の距離の変化の値を求めることも可能であり、このように、従来の計測機器に替わり、計測に要する設備や計測作業に要する労力を軽減することができる斜面モニタリングの構築が可能である。

次にレベルⅡ以上での重点監視時のモニタリングについて考える。本計測対象区間では、変状を示す挙動が観測されなかったが、図 5.2.4 にて示した区域が大きな変位を生じたと仮定して、高精度の変位計測を実施した。

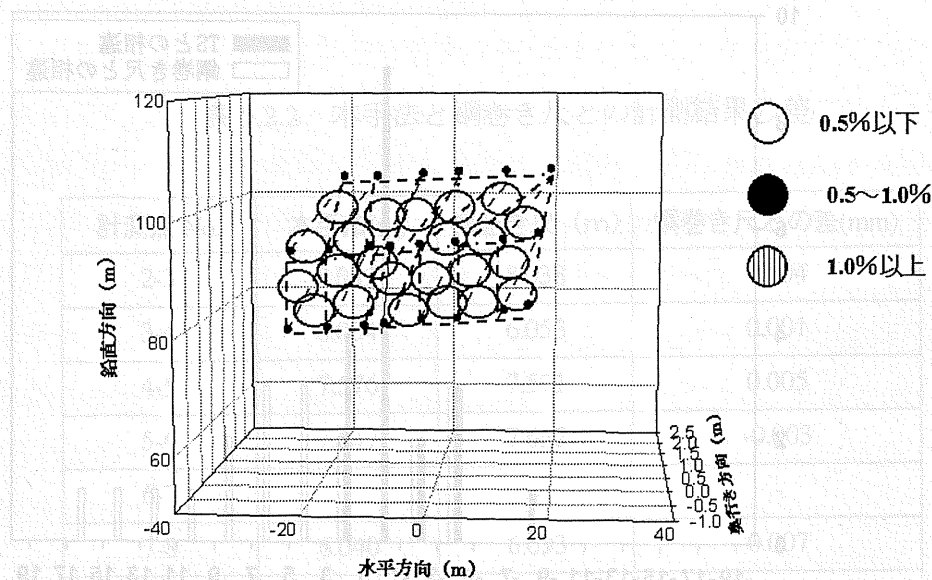


図 5.2.9 面積歪み分布図

計測においては、前述の通り対象区間全体を捉えることができるように焦点距離 18mm のレンズを用い、撮影位置 1 箇所において光軸方向にカメラを 90° ずつ回転させながら 4 枚の画像を撮影し、全体で 6 箇所の位置から合計 24 枚の画像を撮影した。図 5.2.14 に計測結果から標点を復元したものを示す。なお図において、丸印が標点であり、三角の印は画像撮影位置である。

図 5.2.10 に示した 22 点の標点の計測結果は次の通りである。

- ・ 水平方向内の誤差 : 1.0 mm
- ・ 鉛直方向内の誤差 : 1.3 mm
- ・ 奥行き方向内の誤差 : 3.6 mm

また、標点の画像計測誤差はレベル I にて実施した場合と同等であった。レベル I 相当の計測と比較して計測精度は約 5 倍以上向上しており、重点監視の手法が精度向上に効果的であることが示された。本計測においても、同じく反射ターゲットを用いた標点を使用することにより、さらなる精度向上を図ることが可能である。

以上本実験を通して、日常定期点検から監視を強化する必要性のある場合まで、斜面モニタリング手法として広く応用できることが実証された。本研究の応用により、新しい斜面防災システムの構築が可能になったと言える。

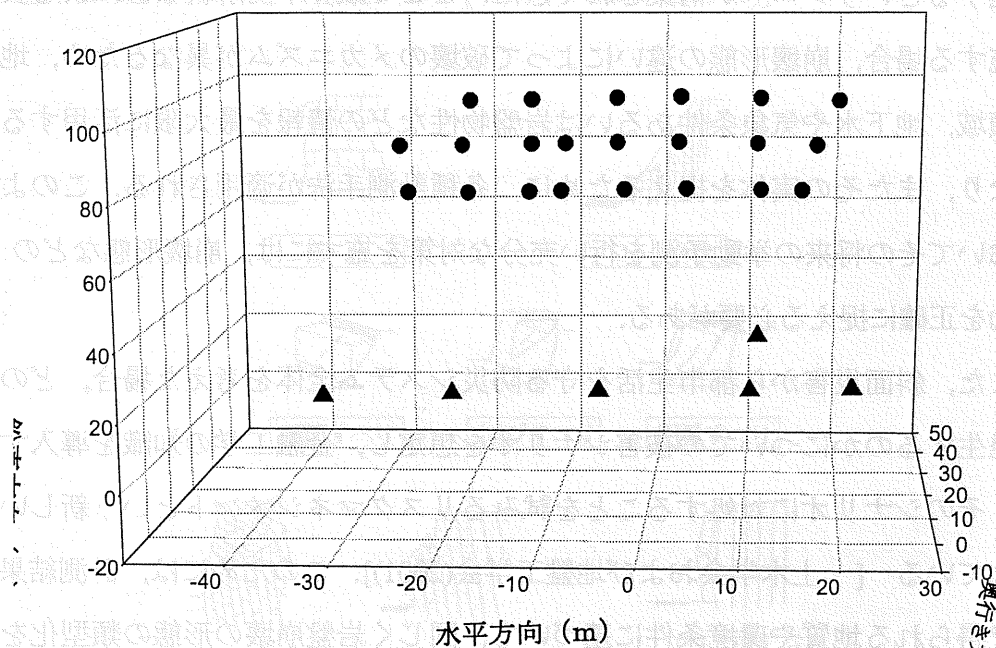


図 5.2.10 計測結果から標点を復元した図

5.3 3次元変位分布による斜面挙動評価法

前節においては、斜面挙動を面的な歪み分布で管理する手法を議論した。本章のはじめにおいて述べたように、斜面挙動の調査あるいは解析において、さまざまな研究が行われてはいるが、例えば岩盤崩壊のメカニズムに関して言えば、崩壊前後にて連続して収集されたデータがないことなどにより、充分解明されたとは言えない状態である [大西・西山(2002)]。解析を主体にした岩盤斜面の挙動評価では、素因や誘因がある程度見定めた上での解析モデルが必要となり、この解析モデルがシミュレーション精度を左右する。例えば、連続体を仮定したモデルでは、岩盤ブロックの分離などの不連続な挙動を表現することが不可能であり、崩落といった離散した形の岩盤ブロックを表現しようとした場合でも、モデルに設定する不連続面の位置によって、崩壊メカニズムが変わってしまう。これまで斜面の安定性を検討する場合、斜面の危険度を評価し、より詳細な検討が必要になった際に、これまでの調査結果を総括した地質モデル図を作成し、斜面

崩壊のメカニズムの推定を行い、さらに解析のためのモデルを組み立てることで解析を実施するというフローが構築されてきた。ここで限界平衡解析などによる安定解析法を実施する場合、崩壊形態の違いによって破壊のメカニズムが異なるため、地質構造、崩壊領域、地下水や気象条件あるいは岩盤物性などの情報を最大限に活用することが必要となり、またその実体を捉えるために、各種計測手法が適用される。このように、斜面においてその将来の挙動予測を行い十分な対策を施すには、崩壊形態などの 3 次元的な挙動を正確に捉える必要がある。

また、斜面災害から都市生活を守る防災システム全体を考えた場合、どのような被害が発生するのかについての被害シナリオを想定し、金融工学の知識を導入することにより、そのシナリオに対処することを試みるリスクマネジメントという新しい学問が提唱されている [土木学会および地盤工学会(2001)]。このためには、計測結果に加え、現地で得られる地質や環境条件に基づいて、同じく岩盤崩壊の形態の類型化を行い、災害の形態および規模を定量的に考察する必要がある [大津宏康・大西有三他(2002)]。

本節では、このような崩壊形態の把握や被害の定量的判断に対するデータを提供するために、変位ベクトルの分布によって斜面変状を把握する手法を考察する。すなわち、前節までの、危険区域の抽出から危険箇所の重点監視に続いて、さらに危険な箇所の運動の将来予測や定量評価を行うための手法として、変位ベクトルによる 3 次元挙動のモニタリング法を構築するものである [Zhang and Ohnishi et al.(1999), 中井・若林他(2000)]。

これまでは、基準点無しという条件下で標点の座標を画像から逆解析してきた。この結果を活かした形で、標点の座標を 3 次元の変位分布に変換することを考える。すなわち、各計測にて得られるノルム最小の最小二乗解を共通の座標軸上で考察できるようにする手法を考案する。これにより、斜面の運動を座標軸の XYZ 成分に分解して解析することができ、本研究による計測によって得られた計測点座標の 3 次元成分のベクトル分布を把握することができ、それより図 5.3.1 に示すような崩壊の類型化および崩壊規模を予測することが可能になる [Hoek and Bray (1979)]。これにより、これまでの画像計測と同じ手法で、危険な斜面に対して安定性を評価するための正確な解析モデルの提供ができると共に、斜面変状のメカニズムあるいは変状の定量的評価を行うことができる。

この 3 次元の計測により、より高度な防災モニタリングシステムを完成させることがで

きる。本節では、まず各計測の座標軸を一致させるための手法を考察し、具体的にその手法を適用した事例について議論する [岡本・大西他(1998)]。

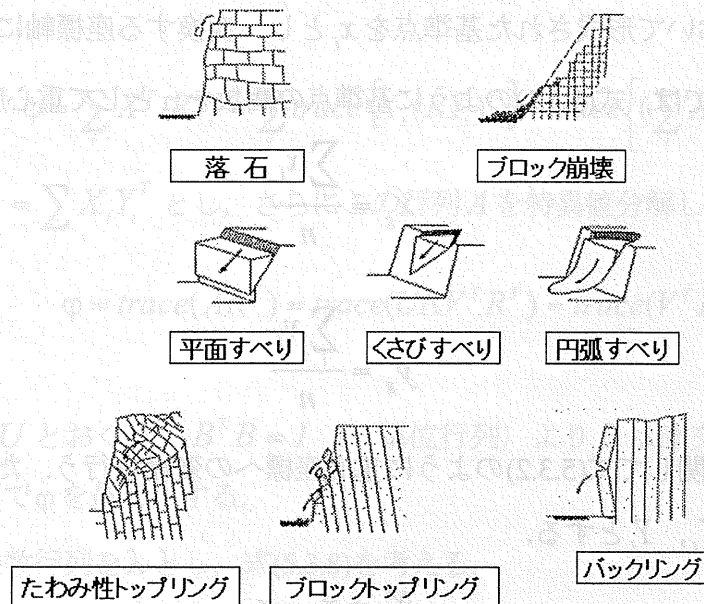


図 5.3.1 崩壊形態の類型化

5.3.1 変位ベクトル換算法

本研究における対象空間座標系での座標軸は、未知数より成る図形の並進、回転および長さを固定することにより決定される。この手法では、特に基準点を指定しない限り、各計測の座標軸は最初に与えた近似値に基づいて任意に決定される。ここで、ある座標軸を基準にした座標変換を施すことで、各座標軸を一致させることができる。具体的には、ある座標軸に関する並進、回転および長さの拘束を、他の座標軸に対する拘束条件とすれば、二つの計測における座標軸は同一となる。本節では、この手法の理論的な構築を行う。

座標軸の変換のための操作手順は次のようになる。

- 1) 基準となる座標軸の計測点の座標入力：基準点形成
- 2) 各座標軸の重心座標の算出と各座標軸における重心座標への変換

3) 基準となる座標軸の長さに対する各座標軸の長さの変換

4) 基準点に対する相当する計測点の重ね合わせ

これらの手順の中、2) は並進、5) は回転の拘束を与える座標変換である。

まず手順 1)において形成された基準点を x_i とし、変換する座標軸における計測点を y_i とする。手順 2) では、式(5.3.1)のように基準点の個数を n として重心座標が求められる。

$$x_g = \frac{\sum_i x_i}{n} \quad (5.3.1)$$

$$y_g = \frac{\sum_i y_i}{n}$$

次に各座標軸に関して式(5.3.2)のように重心座標への変換を行う。ただし、変換後の x_i および y_i の値を X_i , Y_i とする。

$$\begin{aligned} X_i &= x_i - x_g \\ Y_i &= y_i - y_g \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

手順 3)においては、式(5.3.2)より式(5.3.3)のような長さの比 s を求める。

$$s = \sqrt{\frac{\left\| \sum_i X_i^2 \right\|}{\left\| \sum_i Y_i^2 \right\|}} \quad (5.3.3)$$

これを式(5.3.4)のように Y_i に掛け、再度 Y_i を得ることで各座標軸の長さの統一を図る。

$$Y_i = s Y_i \quad (5.3.4)$$

最後に手順 4) を行う。回転行列 R を施した後の Y_i の値と X_i との差、すなわち残差を v_i とし、式(5.3.5)で表される残差の 2 乗和 ϕ を最小にする回転行列 R を求める。

$$\phi = \sum_i v_i^T v_i = \sum_i (X_i - R Y_i)^T (X_i - R Y_i) = \sum_i X_i^T X_i - 2 \sum_i X_i^T R Y_i + \sum_i Y_i^T Y_i \quad (5.3.5)$$

ただし、回転行列 R は直交行列であることから $R^T R = I$ を用いた。

残差の2乗和 ϕ に関して、第1項と第3項は一定であり、第2項を最大化することを考える。そのために、式(5.3.6)のように展開する。

$$\phi = \sum_i X_i^T R Y_i = \sum_i \text{trace}\{X_i (R Y_i)^T\} = \text{trace}\left\{\left(\sum_i X_i Y_i^T\right) R^T\right\} \quad (5.3.6)$$

ここで、 $A = \sum_i X_i Y_i^T$ とし、さらにこの行列 A を特異値分解し、 $A = U \Lambda V^T$ とおく。

$$\phi = \text{trace}(A R^T) = \text{trace}(U \Lambda V^T R^T) = \text{trace}(V^T R^T U \Lambda) \quad (5.3.7)$$

$B = V^T R^T U$ とおくと、 $B^T B = I$ (：単位行列) より B は直交行列であるので、この拘束条件の下で ϕ を最大にする。

Lagrange 乗数行列を λ とし、式(5.3.8)を考える。

$$\xi = \text{trace}(B \Lambda) - \frac{1}{2} \lambda \text{trace}(B^T B - I) \quad (5.3.8)$$

停留値の計算より式(5.3.9)を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial B} &= \Lambda - \lambda B^T = 0 \\ \lambda &= B \Lambda \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

λ は対称行列であり、 Λ も特異値よりなる対称行列であることから B も対称行列となる。直交行列と対称行列の両方を満足する行列は単位行列 I である。

これより $V^T R^T U = I$ となり、式(5.3.10)のとおり R を求めることができる。

$$R = U V^T \quad (5.3.10)$$

最終的にはこれまでの議論によって式(5.3.11)によって、基準となる座標軸への変換を行うことができる。

$$x_i = s R (y_i - t) + v_i \quad i = 1 \quad \dots \quad n \quad (5.3.11)$$

ただし、 t は並進ベクトルであるが、本手法では各座標軸を重心座標に変換することによって並進の工程を行うことになる。

5.3.2 変位ベクトルによる斜面挙動評価

前節で考察した変位ベクトル形成による斜面挙動評価を、実際の現場に適用し、その有用性を検証した [西山・大西他(2002)].

現場は輝緑岩、結晶片岩および蛇紋岩を基盤とし、沖積層や崖錐堆積物が不整合に覆う緩勾配斜面であり、事前の地質調査より地すべり挙動の危険性が高いと判断された区域である。付近一帯すべてが地すべりの危険性があり、計測によって監視する範囲が広い場合、その計測設備に要する費用の負担が大きく、また1ヵ所当たりの計測に要する人的労力あるいは時間的効率性の向上が求められ、本研究を適用するに至った。

図 5.3.2 に計測した画像の例を示す。

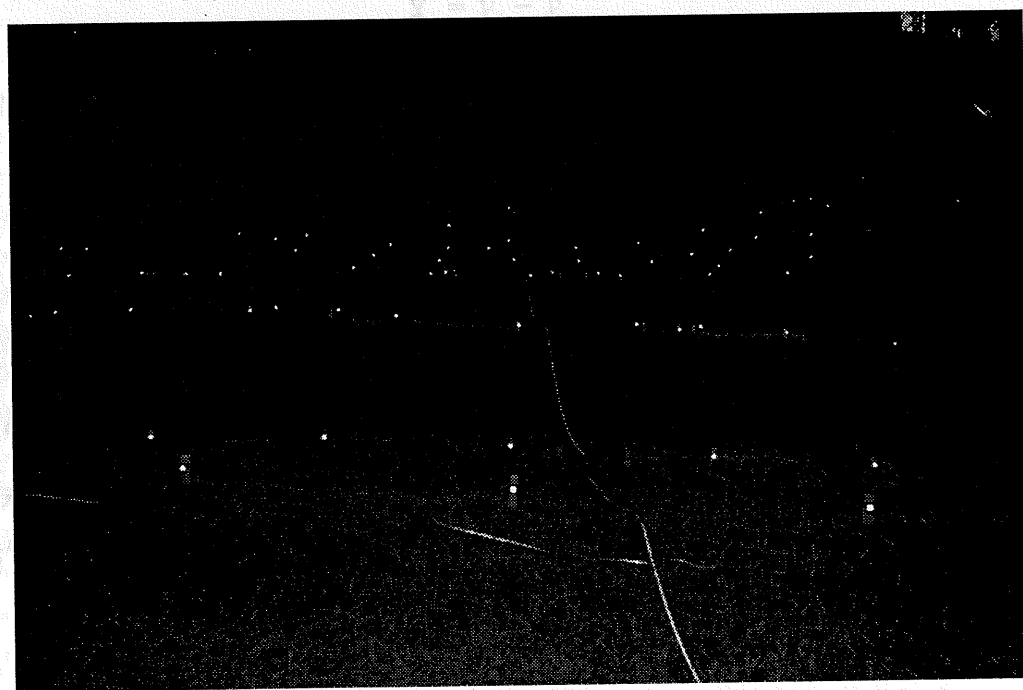


図 5.3.2 計測画像例

計測対象は幅約 30m、高さ 60mそして奥行き約 30mの区域である。計測においては、反

射ターゲットを木杭に貼付し、その木杭を計測対象斜面に打ち込んで固定することで標点を形成した。標点は68点設置し、6本の1m基準尺を計測ごとにランダムに配置した。

撮影は、18mmレンズを搭載した274万画素カラー仕様のカメラを使用し、12ヶ所から合計48枚撮影した。この際、レンズ歪みを解消するために、1ヶ所にてカメラを 90° ずつ4回光軸方向に回転させて撮影した。また、撮影は昼間実施し、ストロボ光りを利用して標点の認識を容易にした。

図5.3.3は、計測によって復元された標点座標を表したものである。図中、黒丸は標点、三角印は撮影位置を示す。

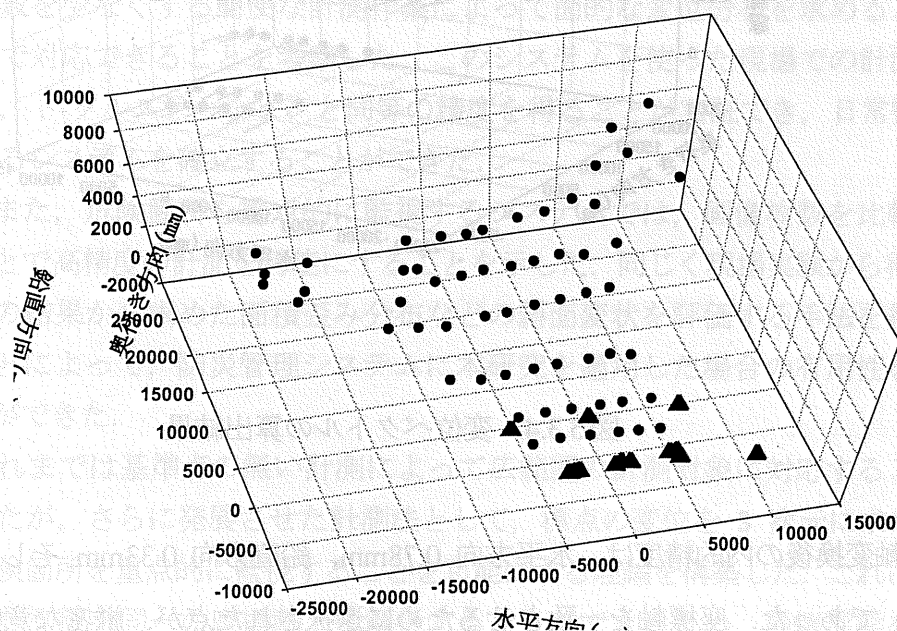


図 5.3.3 復元された計測対象区域

計測精度は内的精度で水平方向 0.55mm、鉛直方向 0.23mm および奥行き方向 0.81mm であった。図 5.3.3 に示すように、水平方向または奥行き方向の撮影角度が限定されたため、それらの計測精度は劣化したが、全体的に 1mm 以下の精度であり、重点監視としては充分の精度を確保できた。この計測を4カ月後に再度行い、前節で検討した座標変換によって、各計測における座標軸を一致させ、各標点の変位ベクトルを算出した。図 5.3.4 に結果を示す。図中の丸で囲んだ部分にある標点の座標が一致するように、各計測における座標軸は変換された。

また、各標点の変位ベクトルを図中の線分の方角と大きさで表した。一部の標点は排水工の施工のために取り除かれたため、すべての標点の動きを捉えることはできなかったが、計測対象の運動の様子は明確に可視化することができた。

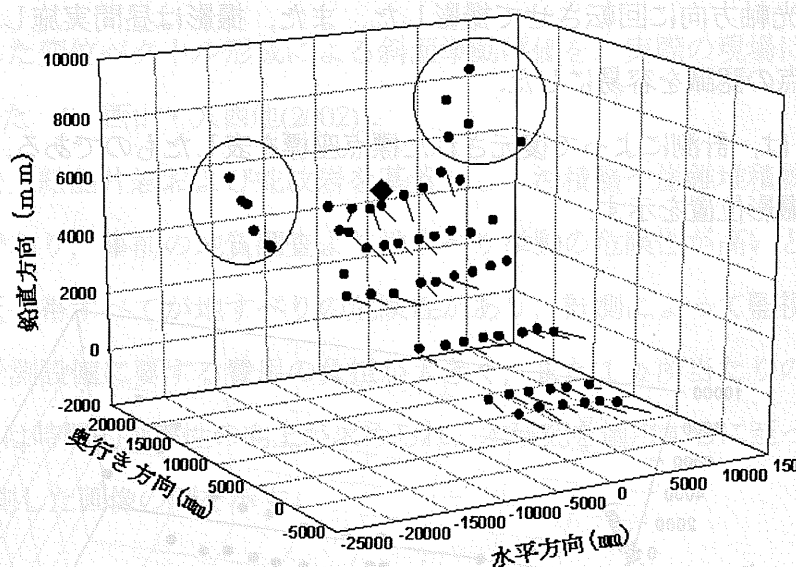


図 5.3.4 変位ベクトルの算出結果

座標軸変換後の内的精度は、水平方向 0.78mm、鉛直方向 0.33mm そして奥行き方向は 1.30mm であった。座標軸を一致させるために選択された点が、厳密な意味での固定点では無かったため、変換後の精度劣化が若干生じたと考えられる。図において菱形で示した点を光波測距儀で計測した結果では、 $(-0.59, -2.67, 2.66)$ の座標成分を持つベクトルが得られ、そのすぐ近傍の標点の変位を本計測手法で計測した結果は $(-0.68, -0.83, 5.68)$ であり、両測量結果は同様な変位ベクトルを捉えた。これにより、本手法の効果は実証され、今後固定点の設定を考慮することにより、さらに高精度の 3 次元解析も可能になると考えられる。以上、本章で議論した日常監視的なモニタリングから重点監視および 3 次元の挙動把握まで、作業形態をそれに応じて変えるだけで対応できる防災モニタリングシステムの構築の可能性を示すことができた [Fraser(1993)].

5.4 第5章のまとめ

本章では、斜面の変位計測に本研究の手法を適用した新しい斜面防災モニタリングシステムを提案し、その有用性を現場実験にて検証した。その結果より次の結論を得ることができた。

- (1) 斜面災害に対して、ハザードを評価するための危険箇所抽出技術、災害の影響を軽減するための管理技術および災害を予知する監視技術の個々の事例に対応したモニタリングシステムの構築を試みた。危険箇所抽出技術に関しては、比較的大きな焦点距離のレンズを用いることでレンズ歪みを解消し、1ヵ所当たりの撮影枚数を少なくする簡便な計測作業によって面的な変位分布を求めるというシステムで対応できることを考察した。このシステムを使った現場での計測実験において、トータルステーションと同等の精度を得ることが実証でき、日常監視的に使用するシステムを確立することができた。

また、危険箇所を重点的に監視するシステムでは、画像枚数を比較的多くすることで高精度の計測を可能にすることを示した。同じく現場実験から得た結果と、その結果から求めた面積歪み分布などの斜面変状を評価する手法を組み合わせることによって、防災管理システムに本研究を適用した場合の有用性を実証することができた。

- (2) これまでは基準点の無い計測によって広範囲の計測対象に対応することを試みてきたが、さらに発展させた計測法として、標点の変位を3次元に求めることで、危険箇所を重点的に監視することを可能にする理論を構築した。これにより、個々の計測値を同一の座標軸上で解析することができるため、崩壊形態を把握することができ、地すべりといった被害も定量的に考察することが可能になる。

また現場実験の結果からその効果が証明され、これまで人的、時間的および設備コスト的に労力あるいは負担を要してきた斜面モニタリングとは異なり、対象物を画像に撮影するという一連の作業だけで、リアルタイムで変位を面的に捉えるという新しい防災システムの構築が可能であることを示した。

参考文献

- 1) (社)土木学会：大規模岩盤崩壊に関する技術検討委員会報告書，1997.
- 2) 大西有三，西山哲：岩盤崩壊と落石問題に関する現状と課題，地すべり，Vol.39，No.1，pp1-13，2002.
- 3) (社)土木学会：岩盤斜面の調査と対策，1999.
- 4) 門間敬一，小嶋伸一：岩盤斜面挙動システム，土木技術資料 39-12，pp.4-5，1997.
- 5) 地盤工学会北海道支部岩盤崩落の機構解明と計測技術に関する研究委員会：岩盤崩壊の発生機構と計測技術，2000.
- 6) (社)土木学会：岩盤斜面の安定解析と計測，1994.
- 7) 地すべり危険地における動態観測施工に関する研究（その 3）報告書：（財）高速道路調査会，1988.
- 8) 大西有三・西山哲：岩盤崩壊メカニズムについて，地質と調査，Vol.3，pp.9-15，2002.
- 9) 建設マネジメント勉強会主催サマースクールテキスト，建設マネジメントを考える：（社）土木学会関西支部および（社）地盤工学会関西支部，2001.
- 10) C.Zhang,Y.Ohnishi,K.Hayashi and S.Nishiyama:Rock displacement measurement by precise close range photogrammetry system, The 5th International Symposium on Field Measurement in Geomechanics, Singapore,pp.71-76,(1999).
- 11) 中井卓巳，若林良二，渡辺紀彦，大西有三：デジタル精密写真測量による岩盤斜面の動態観測，第 30 回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集，pp.213-217,2000.
- 12) E.Hoek and J.Bray：岩盤斜面工学，小野寺透・吉中龍之進訳，朝倉書店，1979.
- 13) 岡本厚，大西有三，張春：精密写真測量による岩盤変位計測について，第 10 回岩の力学国内シンポジウム講演論文集，pp.229-232,1998.
- 14) 大津宏康，大西有三，西山哲，竹山雄一郎：岩盤崩落による社会的損失を考慮したリスク評価に関する研究，土木学会論文集,No.708/III-59，pp.187-198,2002.
- 15) H.Chikahisa,K.Matsumoto,M.Tsutsui and Y.Ohnishi: Field Measurement and Estimation for Displacement Behavior of Slope Using the Photogrammetry System, Proceeding of 2002 ISRM Regional Symposium on Rock Engineering Problems and Approaches in Underground Construction,Korea, Vol.1,pp.345-352,2002.
- 16) 中村幾雄，大西有三，大津宏康，西山哲，矢野隆夫，島原直樹：デジタル画像計測法による斜面動態観測手法の掘削斜面への適用，第 11 回岩の力学国内シンポジウム，

H11,2002.

- 17) 西山哲, 大西有三, 大津宏康, 矢野隆夫, 緒方健治, 松山裕幸: 精密写真測量による
斜面崩壊モニタリングシステムの研究, 第 11 回岩の力学国内シンポジウム, I12,2002.
- 18) C.S.Fraser: High Accuracy Ground Surface Displacement Monitoring, Photogrammetric
Record, Vo.14, No.81, pp.505-521, 1993.