

P. Roberts による Noether 性の反例とその解析

東京都立大学 理学部 蔵野 和彦 (KAZUHIKO KURANO)

1 序

P. Roberts は [6] の中で、次のことを示した。

F を標数 0 の体、 $R = F[x, y, z, S, T, U, V]$ を F 上の 7 変数の多項式環、 t を 2 以上の自然数とし、 $R_0 = F[x, y, z]$ 上 $y^{t+1}S - x^{t+1}T$, $z^{t+1}T - y^{t+1}U$, $x^{t+1}U - z^{t+1}S$, $xV - y^t z^t S$, $yV - x^t z^t T$, $zV - x^t y^t U$ で生成された R の部分環を $S(M)$ とおいたとき、 $\overline{S(M)} = R \cap Q(S(M))$ は Noether 環ではない。

つまりこれは、Hilbert の第 14 問題の反例である。Hilbert の第 14 問題の反例は、永田先生 ([5]) によって最初に与えられたが、Roberts の例はものすごく具体的なものである。また、 $S \mapsto x^{t+1}W$, $T \mapsto y^{t+1}W$, $U \mapsto z^{t+1}W$, $V \mapsto (xyz)^t W$ で定まる環の準同型 $R \rightarrow F[x, y, z, W]$ の核を P としたとき、その symbolic Rees algebra $R_s(P) = \sum_{n \geq 0} P^{(n)} \xi^n \subseteq R[\xi]$ は、Noether 環でないことも同時に示している。つまりこれは、Cowsik の問題 ([2]) の反例となっている。

一般に symbolic Rees algebra が Noether 環になるかどうかを判定することは、与えられた素イデアルの生成元が非常に簡単なものであっても、大変困難である。

ここではもっと一般に、環 A のイデアルの filtration $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ で定まる Rees 環 $R(\mathcal{F}) = \sum_{n \geq 0} F_n \xi^n \subseteq A[\xi]$ の Noether 性について議論する。そしてその応用として、Roberts の例で $\text{ch}(F) > 0$ のときの状況を調べる。

section 2 では、 $R(\mathcal{F})$ が Noether 環となるための一つの充分条件を与える (定理 2.3)。section 3 では、それを使って、ある種のイデアルの Rees 環の定義イデアルの symbolic Rees algebra について議論する (定理 3.3)。ここではまた、 $R(\mathcal{F})$ の Noether 性は、局所的な性質であることを示す (定理 3.1、系 3.2)。section 4 では、この判定法を使い、Roberts の例で、 $\text{ch}(F) > 0$ のときの状況を調べる (定理 4.5)。section 5 で、Roberts の例で、 $t = 1$ の状況を調べる (命題 5.1)。

数理解析研究所での短期共同研究では、多くの人から、貴重な御意見をいただきました。深く感謝しております。

2 Rees 環の Noether 性に関するある判定法

この section では、イデアルの filtration によって定まる Rees 環の Noether 性に関するある判定法について述べることにする。

定義 2.1 A を可換環とする。整数を添字として持つ A のイデアルの集合 $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ が次の三条件を充すとき、 $\mathcal{F}$ を A のイデアルの filtration という。

1. 任意の i に対して、 $F_i \supseteq F_{i+1}$.
2. $i \leq 0$ のとき、 $F_i = A$.
3. 任意の i, j に対して、 $F_i \cdot F_j \subseteq F_{i+j}$.

A のイデアルの filtration $\mathcal{F}$ に対して、 $R(\mathcal{F}) = \sum_{i \geq 0} F_i \xi^i \subseteq A[\xi]$ を $\mathcal{F}$ に関する Rees 環、 $R'(\mathcal{F}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} F_i \xi^i \subseteq A[\xi, \xi^{-1}]$ を $\mathcal{F}$ に関する extended Rees 環という。

注意 2.2 $\mathcal{F}$ を A のイデアルの filtration とする。このとき、 A が Noether 環であっても $R(\mathcal{F})$ や $R'(\mathcal{F})$ は必ずしも Noether 環になるとは限らない。

しかし、 A が Noether 環であるとき、 $R(\mathcal{F})$ と $R'(\mathcal{F})$ の Noether 性は同値であることが知られている。 $(R'(\mathcal{F}) = R(\mathcal{F})[\xi^{-1}])$ により、 $R(\mathcal{F})$ が Noether 環であれば $R'(\mathcal{F})$ もそうであることは明かである。逆に、 $R'(\mathcal{F})$ が Noether 環と仮定しよう。すると、 $R'(\mathcal{F})[\zeta] \subseteq A[\xi, \xi^{-1}, \zeta]$ であり、 $A[\xi, \xi^{-1}, \zeta]$ を、 $\deg \xi = 1, \deg \zeta = -1$ によって $\mathbb{Z}$ -graded ring としたとき、 $R'(\mathcal{F})[\zeta]$ は graded な部分環となる。このとき、 $(R'(\mathcal{F})[\zeta])_0 = \sum_{i \geq 0} F_i (\xi \zeta)^i \simeq R(\mathcal{F})$ が Noether 環となることは直ちにわかる。)

次の定理は、イデアルの filtration で定まる Rees 環や extended Rees 環が Noether 環となるための一つの充分条件を与えている。

定理 2.3 S を Noether 環。 $T = S[V]$ を S 上の一変数の多項式環、 d を自然数とする。 $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ を T のイデアルの filtration。 $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ を S のイデアルの filtration とする。

次の四つを仮定する。

1. 任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して $G_i T \subseteq F_i$.
2. $i \in \mathbb{Z}$ と非負整数 t に対して $F_i \ni g_0 V^t + g_1 V^{t-1} + \cdots + g_t$ ($g_0, \dots, g_t \in S$) であるとき、 $g_0 \in G_{i - [\frac{t}{d}]}$ が成り立つ。(ただし $[\frac{t}{d}]$ は $\frac{t}{d}$ を越えない最大の整数とする。)

3. $R(\mathcal{G})$ は Noether 環。

4. ある自然数 s が存在して、 F_s は V に関して ds 次の monic 多項式を含む。

このとき、 $R(\mathcal{F})$ は Noether 環である。

証明 まず一般の場合を、 $d = 1$ のときえ帰着させることを考える。 T のイデアルの filtration $\mathcal{F}' = \{F'_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ を次の様に定義する。

$$F'_j = F_{[\frac{j+d-1}{d}]}$$

簡単な計算によって、 $\mathcal{F}'$ は filtration であることが確かめられる。同様にして、 S のイデアルの filtration $\mathcal{G}' = \{G'_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ を、

$$G'_j = F_{[\frac{j+d-1}{d}]}$$

と定める。

この定義より直ちに $R(\mathcal{F}')^{(d)} = R(\mathcal{F})$, $R(\mathcal{G}')^{(d)} = R(\mathcal{G})$ となることがわかる。 $((*)^{(d)}$ は d 次の Veronese subring とする。) $R(\mathcal{F}')$ の Noether 性と $R(\mathcal{F}')^{(d)}$ の Noether 性 ($R(\mathcal{G}')$ の Noether 性と $R(\mathcal{G}')^{(d)}$ の Noether 性) は同値であることが知られている。

すると、 $\mathcal{F}'$ と $\mathcal{G}'$ は $d = 1$ で定理の仮定を充す。実際、任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して $G_i T \subseteq F_i$ であるから、任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対して $G'_j T \subseteq F'_j$ となり仮定 1 を充す。また、 $R(\mathcal{G})$ が Noether 環であるから $R(\mathcal{G}')$ は Noether 環であり、仮定 3 を充す。さらに、 $F'_{ds} = F_s$ は V に関して ds 次の monic 多項式を含むことから仮定 4 を充す。最後に仮定 2 を充していることを確かめる。整数 j と 非負整数 t に対して、 $F'_j \ni g_0 V^t + g_1 V^{t-1} + \cdots + g_t$ と仮定する。但し、 $g_0, \dots, g_t$ は S の元とする。 $F'_j = F_{[\frac{j+d-1}{d}]}$ であるから $g_0 \in G_{[\frac{j+d-1}{d}] - [\frac{t}{d}]}$ 。さらに、

$$[\frac{j-t+d-1}{d}] + [\frac{t}{d}] \leq [\frac{j+d-1}{d}]$$

であることから、 $g_0 \in G_{[\frac{j+d-1}{d}] - [\frac{t}{d}]} \subseteq G_{[\frac{j-t+d-1}{d}]} = G'_{j-t}$ となる。

故に、 $d = 1$ の場合に定理が正しいとすれば $R(\mathcal{F}')$ が Noether 環となり、その d 次の Veronese subring である $R(\mathcal{F})$ も Noether 環となる。

次に、 $d = 1$ の場合に定理の証明をする。

整数 l と 非負整数 t に対して S のイデアル $I_{l,t}$ を、

$$I_{l,t} = \{b \in S \mid F_l \text{ の中に } bV^t + (V \text{ に関する degree が } t \text{ 未満) の形の元が存在する} \}$$

とおく。このとき、仮定 2 より $I_{l,t} \subseteq G_{l-t}$ である。 $H_l = \bigoplus_{t \geq 0} I_{l,t} V^t \subseteq T$ とおく。定義より直ちに任意の整数 l に対して H_l は T のイデアルとなることがわかる。 $\mathcal{H} = \{H_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$ はさ

らに T のイデアルの filtration となる。実際、任意の整数 l に対して $F_l \supseteq F_{l+1}$ であるから $H_l \supseteq H_{l+1}$ となる。さらに、 $l \leq 0$ であるときは、 $F_l = T$ であるから $H_l = T$ となる。また、 $b \in I_{l,t}$, $b' \in I_{l',t'}$ であるとき $bb' \in I_{l+l',t+t'}$ に注意すれば、 $H_l \cdot H_{l'} \subseteq H_{l+l'}$ がわかる。まず、次を示す。

補題 2.4 $R(\mathcal{H})$ が Noether 環なら、 $R(\mathcal{F})$ も Noether 環である。

$R(\mathcal{H}) = \sum_{l \geq 0} H_l \xi^l \subseteq T[\xi] = S[V, \xi]$ は V と ξ に関して $\mathbb{Z}^2$ -graded subring であるから、 $R(\mathcal{H})$ の T 上の生成元を斉次元で選ぶことができる。 $R(\mathcal{H}) = T[\{b_\lambda V^{t_\lambda} \xi^{l_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}]$ とすると (Λ は有限集合)、 $b_\lambda \in I_{l_\lambda, t_\lambda}$ であるから、

$$B_\lambda = b_\lambda V^{t_\lambda} + (V \text{ に関して } t_\lambda \text{ 次未満})$$

の形の元が F_{l_λ} に含まれることがわかる。このとき簡単に $R(\mathcal{F}) = T[\{B_\lambda \xi^{l_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}]$ となることがわかる。これで補題 2.4 が示された。

故に、定理を示すためには、 $R(\mathcal{H})$ が Noether 環であることを示せばよい。そのためには注意 2.2 により、 $R'(\mathcal{H}) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} H_l \xi^l \subseteq T[\xi, \xi^{-1}]$ が Noether 環であることを示せば充分である。 $R'(\mathcal{G}) \subseteq S[\xi, \xi^{-1}] \subseteq T[\xi, \xi^{-1}]$ によって $R'(\mathcal{G})$ を $T[\xi, \xi^{-1}]$ の部分環と思い、中間環 $R'(\mathcal{G}) \subseteq R'(\mathcal{G})[V\xi] \subseteq T[\xi, \xi^{-1}]$ に注目する。このとき、

$$\begin{aligned} R'(\mathcal{G})[V\xi] &= \sum_{r \geq 0} R'(\mathcal{G}) V^r \xi^r \\ &= \sum_{r \geq 0} \sum_{i \in \mathbb{Z}} G_i V^r \xi^{r+i} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{t \geq 0} G_{i-t} V^t \xi^i \end{aligned}$$

となる。 $G_{i-t} \supseteq I_{i,t}$ であったから、 $R'(\mathcal{H}) \subseteq R'(\mathcal{G})[V\xi]$ である。また、仮定 1, 2 によって $I_{l,0} = F_l \cap S = G_l$ であるから $R'(\mathcal{H}) \supseteq R'(\mathcal{G})$ 。さらに、仮定 4 によってある自然数 s が存在して $H_s \ni V^s$ となる。故に、

$$R'(\mathcal{G})[V^s \xi^s] \subseteq R'(\mathcal{H}) \subseteq R'(\mathcal{G})[V\xi]$$

であることがわかる。仮定 3 より $R'(\mathcal{G})$ は Noether 環であった。これより直ちに $R'(\mathcal{H})$ が Noether 環であることがわかる。 証明終

上の定理の 1, 2 の仮定は不自然なものではない。実際、次の様な単純な状況で起こるのである。

命題 2.5 S を Noether 環、 $T = S[V]$ を S 上の一変数多項式環。 $\mathfrak{q}$ を T の素イデアル、 $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap S$ とおく。さらに、 $S_{\mathfrak{p}}$ が正則局所環、 $Q(T/\mathfrak{q})$ が $Q(S/\mathfrak{p})$ の d 次代数拡大とする。このとき、次が成立する。

1. 任意の整数 i に対して $\mathfrak{p}^{(i)}T \subseteq \mathfrak{q}^{(i)}$.
2. 整数 i と非負整数 t に対し、 $\mathfrak{q}^{(i)} \ni g_0V^t + g_1V^{t-1} + \cdots + g_t$ ($g_0, \dots, g_t \in S$) であるとき、 $g_0 \in \mathfrak{p}^{(i - \lfloor \frac{t}{d} \rfloor)}$.

(但し、 $Q(*)$ は商体を表し、 $i \leq 0$ のときは、 $\mathfrak{p}^{(i)} = S$, $\mathfrak{q}^{(i)} = T$ であると定める。)

証明 $\text{ht } \mathfrak{p} = r$ とする。 $S_{\mathfrak{p}}$ が正則局所環であるから、 $f_1, \dots, f_r \in \mathfrak{p}$ と $a_1 \in S \setminus \mathfrak{p}$ が次を充すように取れる。

- $(f_1, \dots, f_r)S_{a_1} = \mathfrak{p}S_{a_1}$.
- $f_1, \dots, f_r$ は S_{a_1} の正則列。

$Q(T/\mathfrak{q})$ が $Q(S/\mathfrak{p})$ の代数拡大であるから、 $\mathfrak{p}T \neq \mathfrak{q}$ であることに注意。

$$\begin{array}{ccc} T/\mathfrak{p}T & = & (S/\mathfrak{p})[V] \rightarrow T/\mathfrak{q} \\ & & \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ & & Q(S/\mathfrak{p})[V] \rightarrow Q(T/\mathfrak{q}) \end{array}$$

また $Q(T/\mathfrak{q})$ が $Q(S/\mathfrak{p})$ の d 次代数拡大であることから、 S の元 $b_0, \dots, b_d$ が存在して、 $b_0 \notin \mathfrak{p}$, $b_0V^d + b_1V^{d-1} + \cdots + b_d \in \mathfrak{q}$,

$$(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}T) \otimes_{S/\mathfrak{p}} Q(S/\mathfrak{p}) = (b_0V^d + b_1V^{d-1} + \cdots + b_d)Q(S/\mathfrak{p})[V]$$

を充す。

このことより、 $a_2 \in S \setminus \mathfrak{p}$ が存在して、

- b_0 は S_{a_2} で unit.
- $(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}T) \otimes_{S/\mathfrak{p}} S_{a_2}/\mathfrak{p}S_{a_2} = (b_0V^d + b_1V^{d-1} + \cdots + b_d)(S_{a_2}/\mathfrak{p}S_{a_2})[V]$.

が成立する。 $a = a_1a_2 \in S \setminus \mathfrak{p}$ とし、 $S' = S_a$, $T' = T_a = S'[V]$,

$$f_{r+1} = \frac{1}{b_0}(b_0V^d + b_1V^{d-1} + \cdots + b_d) \in T'$$

とおく。

このとき、

- $f_1, \dots, f_r$ は S' の正則列、
- $f_1, \dots, f_{r+1}$ は T' の正則列、
- $\mathfrak{p}S' = (f_1, \dots, f_r)S'$,
- $\mathfrak{q}T' = (f_1, \dots, f_{r+1})T'$,

を充すので、任意の $i \geq 0$ に対して $\mathfrak{p}^{(i)} = (f_1, \dots, f_r)^i S' \cap S$, $\mathfrak{q}^{(i)} = (f_1, \dots, f_{r+1})^i T' \cap T$ を充す。

今、 $g_0 V^t + g_1 V^{t-1} + \dots + g_t \in \mathfrak{q}^{(i)}$ ($g_0, \dots, g_t \in S$) としよう。このとき、 $g_0 V^t + g_1 V^{t-1} + \dots + g_t \in (f_1, \dots, f_{r+1})^i T'$ 。このとき、次の補題により、 $g_0 \in (f_1, \dots, f_r)^{i-\xi} S'$ となる。ここで、 $t = \xi d + \zeta$ (ξ, ζ は非負整数で、 $0 \leq \zeta < d$) であるから、

$$g_0 \in (f_1, \dots, f_r)^{i-\xi} S' \cap S = (f_1, \dots, f_r)^{(i-\xi)}$$

であり、 $\xi = \lfloor \frac{t}{d} \rfloor$ であるから、証明は完了した。

証明終

補題 2.6 S' を可換環、 $T' = S'[V]$ を S' 上の一変数多項式環とする。 $f_1, \dots, f_r$ を S' の元、 f_{r+1} を T' の元で V に関して d 次の *monic* 多項式とする。 $H = S' + S'V + \dots + S'V^{d-1} \subseteq T'$ とする。このとき、次が成立する。

1. $T' = \bigoplus_{l \geq 0} H \cdot f_{r+1}^l$ と S' -加群として直和分解する。
2. $h = g_0 V^t + g_1 V^{t-1} + \dots + g_t \in T'$ ($g_0, \dots, g_t \in S'$), $t = \xi d + \zeta$ ($\xi \geq 0, d > \zeta \geq 0$) で、1 の直和分解で $h = \sum_{l \geq 0} h_l \cdot f_{r+1}^l$ ($h_l \in H$) を得たとすれば、 h_ξ の V^ζ の係数は g_0 。
3. 1 の分解で $h = \sum_{l \geq 0} h_l \cdot f_{r+1}^l$ ($h \in T', h_l \in H$) となったとする。このとき、 $h \in (f_1, \dots, f_{r+1})^i$ であるための必要充分条件は、任意の l に対して $h_l \in (f_1, \dots, f_r)^{i-l} H$ である。

証明 1, 2 は明らか。

3 を示す。任意の l に対して $h_l \in (f_1, \dots, f_r)^{i-l} H$ であれば、 $h \in (f_1, \dots, f_{r+1})^i$ となるのは自明。逆を示す。1 の分解は S' -加群としての直和分解であるから、 $(f_1, \dots, f_{r+1})^i$ の S' -加群としての生成元に対して証明すればよい。

$$\{V^j f_1^{e_1} \dots f_r^{e_r} f_{r+1}^{e_{r+1}} \mid j \geq 0, e_1 + \dots + e_{r+1} = i\}$$

は、 S' -加群として $(f_1, \dots, f_{r+1})^i$ を生成する。 $V^j = \sum_{l \geq 0} h_l f_{r+1}^l$ ($h_l \in H$) とおく。このとき、

$$V^j f_1^{e_1} \cdots f_r^{e_r} f_{r+1}^{e_{r+1}} = \sum_{l \geq 0} h_l f_1^{e_1} \cdots f_r^{e_r} f_{r+1}^{l+e_{r+1}}$$

であり、 $h_l f_1^{e_1} \cdots f_r^{e_r} \in H$ であって、

$$e_1 + \cdots + e_r = i - e_{r+1} \geq i - (l + e_{r+1})$$

であるから、 $h_l f_1^{e_1} \cdots f_r^{e_r} \in (f_1, \dots, f_r)^{i-(l+e_{r+1})} H$ となる。

証明終

定理 2.3 と 命題 2.5 を使うことにより直ちに次の系を得る。

系 2.7 S を Noether 環、 $T = S[V]$ を S 上の一変数多項式環。 $\mathfrak{q}$ を T の素イデアル、 $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap S$ とおく。さらに、 $S_{\mathfrak{p}}$ が正則局所環、 $Q(T/\mathfrak{q})$ が $Q(S/\mathfrak{p})$ の d 次代数拡大とする。そして、 $R_s(\mathfrak{p}) = \sum_{i \geq 0} \mathfrak{p}^{(i)} \xi^i \subseteq S[\xi]$ が Noether 環であり、ある自然数 l が存在して $\mathfrak{q}^{(l)}$ が V に関して dl 次の monic 多項式を含むと仮定する。このとき、 $R_s(\mathfrak{q}) = \sum_{i \geq 0} \mathfrak{q}^{(i)} \xi^i \subseteq T[\xi]$ は Noether 環である。

注意 2.8 系 2.7 の状況で、更に $d = 1$ で、 S は有理数体 $\mathbb{Q}$ を含むものとする。

$f \in \mathfrak{q}^{(l)}$ を V に関して l 次の monic 多項式とする。このとき、 $gf \in \mathfrak{q}^l$ となる元 $g \in T \setminus \mathfrak{q}$ がとれる。このとき、 $\frac{\partial}{\partial V}(gf) \in \mathfrak{q}^{l-1}$, $\dots$, $\frac{\partial^{l-1}}{\partial V^{l-1}}(gf) \in \mathfrak{q}$ となる。 $f^{(i)} = \frac{\partial^i}{\partial V^i} f$ とおけば、 $\frac{\partial^j}{\partial V^j}(gf) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} g^{(j-i)} f^{(i)}$ であるから、 $\mathfrak{q}$ の元 $h_0, \dots, h_{l-1}$ が存在して、

$$\begin{pmatrix} g^{(0)} & & & & \\ & g^{(0)} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & * & & \ddots & \\ & & & & g^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{(0)} \\ f^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ f^{(l-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{l-1} \end{pmatrix}.$$

となる。ここで、左の下半三角行列の余因子行列を M とおけば、

$$g^l \begin{pmatrix} f^{(0)} \\ f^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ f^{(l-1)} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{l-1} \end{pmatrix}$$

となる。故に、 $g^l f^{(l-1)} \in \mathfrak{q}$ となり、 $f^{(l-1)} \in \mathfrak{q}$ を得る。 f は V に関して l 次の monic 多項式であったから、 $f^{(l-1)} = (l!)V + g$ ($g \in S$) と書ける。

つまり、このとき、元々 $\mathfrak{q}$ は V に関して 1 次の monic 多項式を含んでいるのである。 $\mathfrak{q}$ に含まれる V に関して 1 次の monic 多項式を改めて f とおけば、 $\mathfrak{q} = (f, \mathfrak{p})T$ となる。このとき、任意の自然数 i に対して

$$\mathfrak{q} = \sum_{i=0}^j \mathfrak{p}^{(i)} f^{j-i} T$$

となることがわかる。これより直ちに、 $R_s(\mathfrak{p})$ が Noether 環であれば、 $R_s(\mathfrak{q})$ が Noether 環となることがわかる。

例 2.9 $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ とおき、 r を自然数とする。 $h_1, \dots, h_n \in (\mathbb{N}_0)^r$ とする。 $H' = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{N}_0 h_i$, $H = \sum_{i=0}^n \mathbb{N}_0 h_i$ を $(\mathbb{N}_0)^r$ の部分半群とする。 F を体とし、 $S = F[x_1, \dots, x_{n-1}]$, $T = F[x_1, \dots, x_{n-1}, V]$ を F 上の多項式環とする。 H (または、 H') で定まる F 上の semi-group ring を $F[H]$ (または、 $F[H']$) と表す。 h_i に対応する semi-group ring の元を multi-index で t^{h_i} と表す。 $x_i \mapsto t^{h_i}$ によって決まる S から $F[H']$ への環準同型の核を $\mathfrak{p}$, $x_i \mapsto t^{h_i}$, $V \mapsto t^{h_n}$ によって決まる T から $F[H]$ への環準同型の核を $\mathfrak{q}$ とおく。このとき、明らかに $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap S$ である。さらに、 $\dim F[H] = \dim F[H']$ を仮定する。このとき、 $Q(T/\mathfrak{q})$ は $Q(S/\mathfrak{p})$ の代数拡大となる。拡大次数を d とおく。このとき、もし $R_s(\mathfrak{p})$ が Noether 環であり、ある自然数 l が存在して $\mathfrak{q}^{(l)}$ が V に関して dl 次の monic 多項式が存在すれば、系 2.7 により、 $R_s(\mathfrak{q})$ は Noether 環になる。

例えば、 $r = 1$, $n = 3$ の場合について考えてみよう。このとき、 $\mathfrak{q}$ は非負整数 h_1, h_2, h_3 によって定まる space monomial curve の定義イデアルである。 $\mathfrak{p}$ は単項イデアルであるから $R_s(\mathfrak{p})$ は Noether 環である。 $R_s(\mathfrak{q})$ 環論的性質 (Noether 性、Cohen-Macaulay 性等) を調べるときは h_1, h_2, h_3 は、pairwise coprime としてよいということが簡単にわかる。以下 h_1, h_2, h_3 は pairwise coprime と仮定する。このとき、 $Q(T/\mathfrak{q}) = Q(S/\mathfrak{p})$ であり、 $d = 1$ となる。故にこのとき、ある自然数 l が存在して $\mathfrak{q}^{(l)}$ が V に関して l 次の monic 多項式が存在すれば $R_s(\mathfrak{q})$ が Noether 環となるのである。

$\text{ch}(F) = 0$ の場合、注意 2.8 により、ある自然数 l が存在して $\mathfrak{q}^{(l)}$ が V に関して l 次の monic 多項式を含んでいれば $l = 1$ でとれ、つまり、 $H = H'$ であり、このとき $R_s(\mathfrak{q})$ が Noether 環となることは $\mathfrak{q}$ が complete intersection であることから明らかである。

$\text{ch}(F) = p > 0$ の場合も、 $\mathfrak{q}^{(l)}$ が V に関して l 次の monic な斉次多項式を含めば、その次数 ($\deg x_1 = h_1, \deg x_2 = h_2, \deg V = h_3$ としての) は lh_3 となる。ところが、一般に、Cutkosky [3] により、この状況で、ある自然数 l が存在して $\mathfrak{q}^{(l)}$ が次数 $l(h_1 + h_2 + h_3)$ 未満の元を含めば、 $R_s(\mathfrak{q})$ が Noether 環であることが証明されている。

だから、space monomial curve の定義イデアルの symbolic Rees algebra を調べるときには、この判定法は有効ではない。

以下の section で、この判定法が有効に使える場合を見ることにする。

3 ある種のイデアルの Rees 環の定義イデアルの symbolic Rees algebra について

この section では、与えられた環の正則列ともうひとつの元で生成されたイデアルの Rees 環の定義イデアルによって定まる symbolic Rees algebra の Noether 性について議論する。まず、次を証明する。

定理 3.1 A を Noether 環、 $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を A のイデアルの filtration とする。 $\mathfrak{p}$ が A の素イデアルで、 $R(\mathcal{F}) \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$ が Noether 環であるとする。このとき、 $R(\mathcal{F}) \otimes_A A_x$ が Noether 環であるような $x \in A \setminus \mathfrak{p}$ が存在する。

証明 適当に Veronese subring をとり、任意の n に対して $F_n A_{\mathfrak{p}} = F_1^n A_{\mathfrak{p}}$ と仮定してよい。

$F_1 = A$ であれば、 $R(\mathcal{F})$ は A 上の 1 変数多項式環であるから、 $x = 1 \in A \setminus \mathfrak{p}$ とすればよい。

$F_1 \neq A$ と仮定する。

$$\bigcup_{l \geq 1} \text{Ass}_A(A/F_1^l) = \{\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{q}_{m+1}, \dots, \mathfrak{q}_k\}$$

とする。ただし、 $i = 1, \dots, m$ に対して $\mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{p}$ で、 $j = m+1, \dots, k$ に対して $\mathfrak{q}_j \not\subseteq \mathfrak{p}$ とする。(仮定より $k > 0$ であるが、 $m = 0$ または $k = m$ となることもありうる。 $\bigcup_{l \geq 1} \text{Ass}_A(A/F_1^l)$ が有限集合となることは、よく知られている。)

$x \in \mathfrak{q}_{m+1} \cup \dots \cup \mathfrak{q}_k \setminus \mathfrak{p}$ とする。 $(k = m$ の場合には、単に $x \in A \setminus \mathfrak{p}$ ととる。) ここで、ある自然数 n が存在して $F_n A_x \neq F_1^n A_x$ と仮定する。このとき、 P を $\text{Ass}_{A_x}(F_n A_x / F_1^n A_x) \subseteq \text{Ass}_{A_x}(A_x / F_1^n A_x)$ からとる。 $Q = P \cap A$ とおく。このとき、 $Q \in \text{Ass}_A(A / F_1^n)$ である。 $Q \not\ni x$ より $Q \subseteq \mathfrak{p}$ である。しかし、このとき、 $F_n A_Q = F_1^n A_Q$ となり P のとり方に反する。

証明終

これより直ちに次を得る。

系 3.2 前定理と同じ記号の下で $U = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid R(\mathcal{F}) \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \text{ は Noether 環}\}$ とおいたとき、次が成立する。

1. U は $\text{Spec}(A)$ の Zariski open.
2. $U = \text{Spec}(A)$ なら $R(\mathcal{F})$ は Noether 環。

定理 3.1 と系 3.2 より、 $R(\mathcal{F})$ の Noether 性は、(A に関して) 局所的な性質であることがわかる。これらと section 2 の結果より次がわかる。

定理 3.3 A を体を含む Noether 環、 $t_1, \dots, t_d$ を A -正則列、 $y \in A$ とする。 $x_i \mapsto t_i W$, $V \mapsto yW$ によって決まる A 上の多項式環の間の環準同型 $T = A[x_1, \dots, x_d, V] \rightarrow A[W]$ の核を $\mathfrak{q}$ とする。自然数 n に対して、

$$\mathfrak{q}^{(n)} = \{r \in T \mid \text{充分大きい } m \text{ に対して } t_1^m r, \dots, t_d^m r \in \mathfrak{q}^n\}$$

とし、 $n \leq 0$ のときは $\mathfrak{q}^{(n)} = T$ とおけば、 $\mathcal{F} = \{\mathfrak{q}^{(i)}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ は T のイデアルの filtration となる。このとき、ある自然数 l が存在して $\mathfrak{q}^{(l)}$ が V に関して l 次の monic 多項式を含めば、 $R(\mathcal{F})$ は Noether 環である。

注意 3.4 上で A が整域であるとき、 $\mathfrak{q}$ は A の素イデアルである。このとき、上で定義した $\mathfrak{q}^{(n)}$ は、普通の $\mathfrak{q}$ の n 次の symbolic power と一致する。

なぜならば、

$$\mathfrak{q}T_{t_1} = (x_2 - (t_2/t_1)x_1, \dots, x_d - (t_d/t_1)x_1, V - (y/t_1)x_1)T_{t_1}$$

は、complete intersection であるからである。

定理 3.3 の証明 系 3.2 によって、 A の任意の素イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $R(\mathcal{F}) \otimes_A A_{\mathfrak{m}}$ が Noether 環であることを示せばよい。(系 3.2 を T に対して使う。)

最初に $\mathfrak{m} \not\supseteq (t_1, \dots, t_d, y)$ の場合を考える。 $T_{\mathfrak{m}} = T \otimes_A A_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}}[x_1, \dots, x_d, V]$ の不定元を取り替えて、

$$T_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}}[Z_1, \dots, Z_{d+1}] \supseteq \mathfrak{q}T_{\mathfrak{m}} = (Z_2, \dots, Z_{d+1})T_{\mathfrak{m}}$$

であるとしてよい。 $t_1, \dots, t_d$ が $A_{\mathfrak{m}}$ の非零因子であることより、

$$\mathfrak{q}^n T_{\mathfrak{m}} = (Z_2, \dots, Z_{d+1})^n T_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{q}^{(n)} T_{\mathfrak{m}}$$

となる。これより、 $R(\mathcal{F}) \otimes_A A_{\mathfrak{m}}$ は Noether 環となる。

次に $\mathfrak{m} \supseteq (t_1, \dots, t_d, y)$ の場合を考える。つまり、最初から $(A, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環、 $t_1, \dots, t_d \in \mathfrak{m}$ は A -正則列、 $y \in \mathfrak{m}$ としてよい。 $x_i \mapsto t_i W$ によって決まる A 上の多項式環の間の環準同型 $S = A[x_1, \dots, x_d] \rightarrow A[W]$ の核を $\mathfrak{p}$ とする。さらに、自然数 n に対して、

$$\mathfrak{p}^{(n)} = \{r \in S \mid \text{充分大きい } m \text{ に対して } t_1^m r, \dots, t_d^m r \in \mathfrak{p}^n\}$$

とし、 $n \leq 0$ のときは $\mathfrak{p}^{(n)} = S$ とおけば、 $\mathcal{G} = \{\mathfrak{p}^{(i)}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ は S のイデアルの filtration となる。この $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ が $d = 1$ として、定理 2.3 の四つの仮定を充すことがいえれば、 $R(\mathcal{F})$ は Noether 環となる。

定理 2.3 の仮定 4 はこの定理では仮定している。

また、任意の自然数 n に対して $\mathfrak{p}^n T \subseteq \mathfrak{q}^n$ であるから、 $\mathfrak{p}^{(n)} T \subseteq \mathfrak{q}^{(n)}$ は自明である。

次に、定理 2.3 の仮定 3 について調べる。 A は、体 F を含むとする。 $t_1, \dots, t_d$ は A -正則列であるから、 $T_i \mapsto t_i$ で定まる多項式環の局所環 $F[T_1, \dots, T_d]_{(T_1, \dots, T_d)}$ から A への環準同型は忠実平坦である。故に、 $L = F[T_1, \dots, T_d, x_1, \dots, x_d] \rightarrow S$ は平坦である。 L の素イデアルを

$$P = I_2 \begin{pmatrix} T_1 & \cdots & T_d \\ x_1 & \cdots & x_d \end{pmatrix}$$

とおく。 P は generic matrix の maximal minor で生成されたイデアルであるから、任意の自然数 n に対して $P^n = P^{(n)}$ が成立する ([1])。故に、任意の i と任意の自然数 n, m に対して $T_i \notin P$ であるから、 $P^n : T_i^m = P^n$ が成立する。 $L \rightarrow S$ は平坦であり、 $PS = \mathfrak{p}$ であるから、 $\mathfrak{p}^n : t_i^m = \mathfrak{p}^n$ が成立する。故に、任意の自然数 n に対して $\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^n$ となる。

最後に、定理 2.3 の仮定 2 について調べる。完全列

$$0 \rightarrow \mathfrak{q}T \rightarrow A[x_1, \dots, x_d, V] \rightarrow A[W]$$

を t_i で局所化して、

$$0 \rightarrow \mathfrak{q}T_{t_i} \rightarrow T_{t_i} \rightarrow A_{t_i}[W]$$

を得る。ここで、 $x'_i = x_i/t_i$, $j \neq i$ に対して $x'_j = x_j - (t_j/t_i)x_i$, $V' = V - (y/t_i)x_i$ とおけば、 $T_{t_i} = A_{t_i}[x'_1, \dots, x'_d, V']$ となり、 $\mathfrak{q}T_{t_i} = (x'_1, \dots, x'_d, V')T_{t_i}$ である。(ここで、 $(x'_1, \dots, x'_d, V')$ は、 $(x'_1, \dots, x'_{i-1}, x'_{i+1}, \dots, x'_d, V')$ を表す。) このことより、 $\mathfrak{q}^{(n)}T_{t_i} = (x'_1, \dots, x'_d, V')^n T_{t_i} = \mathfrak{q}^n T_{t_i}$ であり、

$$\mathfrak{q}^{(n)} \subseteq (x'_1, \dots, x'_d, V')^n T_{t_i} \cap T = \bigcup_{m \geq 0} (\mathfrak{q}^n :_T t_i^m)$$

となる。今、 t_j は A_{t_i} の非零因子であることに注意すれば、任意の i, j に対して $\bigcup_{m \geq 0} (\mathfrak{q}^n :_T t_i^m) = \bigcup_{m \geq 0} (\mathfrak{q}^n :_T t_j^m)$ となり、 $\mathfrak{q}^{(n)} = (x'_1, \dots, x'_d, V')^n T_{t_i} \cap T$ であることがわかる。 $\alpha : T = A[x_1, \dots, x_d, V] \rightarrow T_{t_i} = A_{t_i}[x'_1, \dots, x'_d, V']$ を局所化とするとき、 α は単射である。 $A \rightarrow A_{t_i}$ から誘導される多項式環の間の写像 $A[x'_1, \dots, x'_d, V'] \rightarrow A_{t_i}[x'_1, \dots, x'_d, V']$ を β とおく。 $\gamma(x_i) = t_i x'_i$, $j \neq i$ に対して $\gamma(x_j) = x'_j + t_j x'_i$, $\gamma(V) = V' + y X'_i$ で、 A 上の多項式環の間の写像 $\gamma : A[x_1, \dots, x_d, V] \rightarrow A[x'_1, \dots, x'_d, V']$ を定義する。このとき、 $\alpha = \beta \circ \gamma$ である。 $r \in T$ に対して、 $r \in \mathfrak{q}^{(n)}$ は、 $\alpha(r) \in (x'_1, \dots, x'_d, V')^n T_{t_i}$ と同値であり、これはさら

に、 $\gamma(r) \in (x'_1, \dots, x'_d, V')^n A[x'_1, \dots, x'_d, V']$ と同値である。故に、

$$\mathfrak{q}^{(n)} = \{r \in T \mid \gamma(r) \in (x'_1, \dots, x'_d, V')^n A[x'_1, \dots, x'_d, V']\}$$

を得る。同様にして、 $\delta: S = A[x_1, \dots, x_d] \rightarrow A[x'_1, \dots, x'_d]$ を、 $\gamma(x_i) = t_i x'_i$, $j \neq i$ に対して $\delta(x_j) = x'_j + t_j x'_i$ と定めれば、

$$\mathfrak{p}^{(n)} = \{r \in S \mid \delta(r) \in (x'_1, \dots, x'_d)^n A[x'_1, \dots, x'_d]\}$$

となる。今、 $h = g_0 V^t + g_1 V^{t-1} + \dots + g_t \in \mathfrak{q}^{(n)}$ ($g_0, \dots, g_t \in S$) とする。このとき、

$$\gamma(h) = \delta(g_0)(V' + yx'_i)^t + \delta(g_1)(V' + yx'_i)^{t-1} + \dots + \delta(g_t) \in (x'_1, \dots, x'_d, V')^n A[x'_1, \dots, x'_d, V']$$

となる。 V'^t の係数に注目してみれば、 $\delta(g_0) \in (x'_1, \dots, x'_d)^{n-t} A[x'_1, \dots, x'_d]$ を得る。故に、 $g_0 \in \mathfrak{p}^{(n-t)}$ となる。 証明終

4 定理 2.3 の応用例

section 2 の後半や section 3 では、いろいろな状況で、定理 2.3 の仮定 1, 2, 3 が充されることを見た。

この section では、実際に具体的な例によって、どの程度、定理 2.3 の仮定 4 が充されるかを調べる。

Roberts は [6] の中で、Hilbert の第 14 問題に対して、非常に簡単な反例を与えた。そこに出てくる環は、標数 0 の体を含んでいる。ここでは、その基礎体が、正標数である場合に Noether 性を判定する。

まず、記号の準備から始める。

F を体 (ここでは、標数についての仮定はしない)、 $R_0 = F[x, y, z]$ を多項式環とする。多項式環 $R = \sum_{l \geq 0} R_l = F[x, y, z, S, T, U, V]$ に、 x, y, z の次数を 0、 S, T, U, V の次数を 1 として次数環の構造を与える。 α, β を自然数とし、 R_0 -自由加群の間の射 $\phi: R_1 \rightarrow R_0$ を、 $S \mapsto x^\alpha, T \mapsto y^\alpha, U \mapsto z^\alpha, V \mapsto (xyz)^\beta$ で定める。 $M = \text{Ker}(\phi)$ は、 R_1 の R_0 -部分加群である。 $(M$ の R_0 -加群としての生成元は、 $\beta \geq \alpha$ のときは $\{y^\alpha S - x^\alpha T, z^\alpha T - y^\alpha U, x^\alpha U - z^\alpha S, V - x^{\beta-\alpha} y^\beta z^\beta S\}$ 、 $\beta < \alpha$ のときは $\{y^\alpha S - x^\alpha T, z^\alpha T - y^\alpha U, x^\alpha U - z^\alpha S, x^{\alpha-\beta} V - y^\beta z^\beta S, y^{\alpha-\beta} V - x^\beta z^\beta T, z^{\alpha-\beta} V - x^\beta y^\beta U\}$ である) R_0 上に、 M で生成された R の次数付きの部分環を $S(M) = \bigoplus_{l \geq 0} S^l(M)$ とする。さらに、

$$\overline{S^l(M)} = \{f \in R_l \mid \text{充分大きい } m \text{ に対して、} x^m f, y^m f, z^m f \in S^l(M)\}$$

と定める。このとき、 $\overline{S(M)} = \bigoplus_{l \geq 0} \overline{S^l(M)}$ は、 R の次数付きの部分環となる。

注意 4.1 $\mathfrak{m} = (x, y, z)R_0$ とおく。このとき、

1. 任意の l に対して、 $S^l(M) = \text{Sym}^l(M)/H_{\mathfrak{m}}^0(\text{Sym}^l(M))$
2. $\alpha > \beta$ なら $\text{Sym}(M) \neq S(M)$ で、 $\alpha \leq \beta$ なら $\text{Sym}(M) = S(M)$
3. 任意の l に対して、 $\overline{S^l(M)} = (S^l(M))^{**} = (\text{Sym}^l(M))^{**}$

が成立する。(ここで、 $(-)^*$ は R_0 -dual とする。)

$\varphi : R = F[x, y, z, S, T, U, V] \rightarrow F[x, y, z, W]$ を、 $\varphi(S) = x^\alpha W$, $\varphi(T) = y^\alpha W$, $\varphi(U) = z^\alpha W$, $\varphi(V) = (xyz)^\beta W$ で定義する。このとき、 $Q = \text{Ker}(\varphi)$ は、 R の高さ 3 の素イデアルであり、 $Q_1 = M$ である。また、 Q の生成元は、次数が正であることに注意すれば、任意の l に対して、 $[Q^l]_l = S^l(M)$ となることがわかる。このことより容易に $[Q^{(l)}]_l = \overline{S^l(M)}$ であることがわかる。

さらに、[6] の中で、次のことが示されている。

命題 4.2 1. $R_s(Q)$ から $\overline{S(M)}$ への全射準同型がある。

2. $Q(R)$ の中で、 $\overline{S(M)} = R \cap Q(S(M))$ 。

故に、 $\overline{S(M)}$ が Noether 環でなければ、 $R_s(Q)$ は Noether 環でなく、 $\overline{S(M)} = R \cap Q(S(M))$ は Hilbert の第 14 問題の反例であり、 $R_s(Q)$ は Cowsik の問題の反例である。

Roberts は、次のことを証明した。

定理 4.3 (Roberts [6]) F の標数が 0 で、 $1 > \beta/\alpha \geq 2/3$ のとき、 $\overline{S(M)}$ は Noether 環でない。

以下、 F の標数に関する仮定をはずして、 $R_s(Q)$ の Noether 性についての議論をする。

Q は、ある semi-group ring の定義イデアルとなっている。実際、例 2.9 の状況で、 $r = 4$, $n = 7$ として、

$$h_1 = (1, 0, 0, 0)$$

$$h_2 = (0, 1, 0, 0)$$

$$h_3 = (0, 0, 1, 0)$$

$$h_4 = (\alpha, 0, 0, 1)$$

$$h_5 = (0, \alpha, 0, 1)$$

$$h_6 = (0, 0, \alpha, 1)$$

$$h_7 = (\beta, \beta, \beta, 1)$$

とすれば、 $H = \sum_{i=0}^7 \mathbb{N}_0 h_i$ の定義イデアルが Q である。例 2.9 と同様にして、 $H' = \sum_{i=0}^6 \mathbb{N}_0 h_i$ とおき、その定義イデアルを P とおく。つまり、 $P = Q \cap F[x, y, z, S, T, U]$ である。今の場合、 $Q(F[H]) = Q(F[H'])$ であることに注意。また、 $x^\alpha, y^\alpha, z^\alpha$ は R_0 -正則列であるから、

$$P = I_2 \begin{pmatrix} S & T & U \\ x^\alpha & y^\alpha & z^\alpha \end{pmatrix}$$

であり、[1] によって、任意の l に対して $P^l = P^{(l)}$ となる。このことより、 $R_s(P)$ は Noether 環であることがわかる。故に、例 2.9 で見たように、ある自然数 l が存在して、 $Q^{(l)}$ が V に関して l 次の monic 多項式を含んでいれば、 $R_s(Q)$ は、Noether 環となる。 $(Q(F[H]) = Q(F[H']))$ であるから $d = 1$)

もし、 $Q^{(l)}$ の中に V に関して l 次の monic 多項式があれば、それは、 l 次斉次式であるとしてよい。ところが、 $[Q^{(l)}]_l = \overline{S^l(M)}$ であった。だから、 $\overline{S^l(M)}$ の中に、 V に関して l 次の斉次式があるかどうかを調べればよい。

$S \mapsto x^\alpha S', T \mapsto T' + y^\alpha S', U \mapsto U' + z^\alpha S', V \mapsto V' + (xyz)^\beta S'$ で定まる環準同型を

$$\delta : F[x, y, z, S, T, U] \rightarrow F[x, y, z, S', T', U']$$

$$\gamma : F[x, y, z, S, T, U, V] \rightarrow F[x, y, z, S', T', U', V']$$

とおけば、定理 3.3 の証明の中で示したように、任意の自然数 l に対して、

$$P^{(l)} = \{f \in F[x, y, z, S, T, U] \mid \delta(f) \in (T', U')^l F[x, y, z, S', T', U']\}$$

$$Q^{(l)} = \{f \in R \mid \gamma(f) \in (T', U', V')^l F[x, y, z, S', T', U', V']\}$$

が成立する。さらに、 $[Q^{(l)}]_l = \overline{S^l(M)}$, $[P^{(l)}]_l = [P^l]_l = S^l(N)$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} \overline{S^l(N)} &= S^l(N) \\ &= \{f \in R_l \mid \delta(f) \text{ には } S' \text{ が出てこない}\} \\ \overline{S^l(M)} &= \{f \in R_l \mid \gamma(f) \text{ には } S' \text{ が出てこない}\} \end{aligned}$$

となる。(ここで、 $N = P_1 = R_0(y^\alpha S - x^\alpha T) + R_0(z^\alpha T - y^\alpha U) + R_0(x^\alpha U - z^\alpha S)$ とし、 $S(N) = \oplus_l S^l(N)$ を R_0 上 N で生成された $F[x, y, z, S, T, U]$ の次数付き部分環で、

$$\overline{S^l(N)} = \{f \in (F[x, y, z, S, T, U])_l \mid \text{充分大きい } m \text{ に対して、} x^m f, y^m f, z^m f \in S^l(N)\}$$

とする。)

注意 4.4 $\beta \geq \alpha$ であるときは、体の標数に依らずに、 $Q_1 = M$ の中に V に関する 1 次の monic 多項式が存在する。

逆に、 $\beta < \alpha$ であるときは、体の標数に依らずに、 $Q_1 = M = S^1(M) = \overline{S^1(M)}$ の中に V に関する 1 次の monic 多項式は存在しない。つまり、このときは、 Q の中には、 V に関する 1 次の monic 多項式は存在しない。

今、更に、 $\beta < \alpha$ であり、 F の標数が 0 であると仮定する。このとき、注意 2.8 によって、ある自然数 l が存在して $Q^{(l)}$ が、 V に関して l 次の monic 多項式を含むと仮定すれば、 Q 自身が V に関して 1 次の monic 多項式を含むことになる。故に、この場合は、任意の自然数 l に対して $Q^{(l)}$ は、 V に関して l 次の monic 多項式を含まない。

つまり、 F の標数が 0 の場合は、ある自然数 l に対して $Q^{(l)}$ が V に関して l 次の monic 多項式を含むための必要充分条件は、 $\beta \geq \alpha$ であることがわかる。

以下、この section では、 F の標数は $p > 0$ であり $\alpha > \beta$ と仮定する。

この section の残りは、次の定理の証明を目標とする。

定理 4.5 $\text{ch}(F) = p > 0$ とする。このとき、ある自然数 l が存在して $\overline{S^l(M)}$ が V に関する l 次の monic 多項式を含むための必要充分条件は、 $p \equiv 2 \pmod{3}$ のときは $\beta/\alpha \geq (2p-1)/3p$, $p \not\equiv 2 \pmod{3}$ のときは $\beta/\alpha \geq 2/3$ である。

故にこのとき、 $\overline{S(M)}$ と $R_s(Q)$ は Noether 環である。

定理を証明するために、いくつかの準備をする。

補題 4.6 $p > 0$, $\alpha > \beta$ が与えられたとする。このとき、ある自然数 l が存在して $\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の monic 多項式を含めば、ある自然数 n が存在して $\overline{S^{p^n}(M)}$ が V に関して p^n 次の monic 多項式を含む。

証明 $h = V^l + g_1 V^{l-1} + \cdots + g_l$ ($g_1, \dots, g_l \in F[x, y, z, S, T, U]$) を $\overline{S^l(M)}$ に含まれる V に関して l 次の monic 多項式とする。このとき、

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \gamma(V)^l + \delta(g_1)\gamma(V)^{l-1} + \cdots + \delta(g_l) \\ &= (V' + (xyz)^\beta S')^l + \delta(g_1)(V' + (xyz)^\beta S')^{l-1} + \cdots + \delta(g_l) \end{aligned}$$

には、 S' は出てこない。故に、 $S'V^{l-1}$ の係数に注目してみれば、 $l(xyz)^\beta \in (x^\alpha, y^\alpha, z^\alpha)R_0$ となる。 $\alpha > \beta$ であったから、 l は p で割り切れなければならない。

$l = p^n t$ (p と t は互いに素) とおく。上で見たように、 $n > 0$ である。

$t = 1$ なら、 $l = p^n$ であるからよい。

$t \geq 2$ と仮定する。

$$h = V^{p^nt} + g_1 V^{p^{n(t-1)}} + \cdots + g_{p^n} V^{p^n}$$

に対して、

$$h' = tV^{p^n} + g_1 V^{p^{n-1}} + \cdots + g_{p^n} V^{p^n}$$

とおく。 $\gamma(h), \gamma(h')$ を、 V' について整理する。 $i = 1, \dots, p^n$ とする。このとき、任意の非負整数 j に対して、 $\gamma(g_i V^{p^{n(t-i)}})$ の $V'^{p^{n(t-1)+j}}$ の係数と、 $\gamma(g_i V^{p^{n-i}})$ の V'^j の係数は等しい。さらに、

$$\begin{aligned}\gamma(V^{p^nt}) &= V'^{p^nt} + t((xyz)^\beta S')^{p^n} V'^{p^{n(t-1)}} + \cdots \\ \gamma(tV^{p^n}) &= tV'^{p^n} + t((xyz)^\beta S')^{p^n}\end{aligned}$$

であるから $\gamma(h')$ には S' が出てこないことがわかる。

証明終

今後、 $x^\alpha, y^\alpha, z^\alpha$ の Koszul relation を

$$\begin{aligned}A &= y^\alpha S - x^\alpha T \\ B &= z^\alpha S - x^\alpha U \\ C &= z^\alpha T - y^\alpha U\end{aligned}$$

と表す。このとき、 $S(N) = \overline{S(N)} = F[x, y, z, A, B, C] \subset F[x, y, z, S, T, U]$ である。

補題 4.7 $p > 0, \alpha > \beta$ が与えられたとする。このとき、ある自然数 n が存在して $\overline{S^{p^n}(M)}$ が

$$h = V^{p^n} + g_i V^{p^{n-i}} + (V \text{ に関して } p^n - i \text{ 次未満})$$

という形 ($0 < i < p^n, g_i \in F[x, y, z, S, T, U]$) の元を含めば、 $g_i \in S^i(N)$ である。

証明 $\gamma(h)$ を V' について整理する。そうすれば、 $\delta(g_i)$ には、 S' が出てこないことがわかる。 g_i は S, T, U に関して i 次斉次式であるから、 $g_i \in S^i(N)$ を得る。 証明終

$R = F[x, y, z, S, T, U, V]$ は、 x, y, z の次数を 0、 S, T, U, V の次数を 1 として次数環の構造を持っていた。ここでさらに、 R_0 と R に別の次数環の構造を与える。 $\deg_{\mathbb{Z}^3} x = (1, 0, 0)$, $\deg_{\mathbb{Z}^3} y = (0, 1, 0)$, $\deg_{\mathbb{Z}^3} z = (0, 0, 1)$, $\deg_{\mathbb{Z}^3} S = (\alpha, 0, 0)$, $\deg_{\mathbb{Z}^3} T = (0, \alpha, 0)$, $\deg_{\mathbb{Z}^3} U = (0, 0, \alpha)$, $\deg_{\mathbb{Z}^3} V = (\beta, \beta, \beta)$ により、 R_0, R を $\mathbb{Z}^3$ -graded ring と思う。このとき、任意の自然数 l に対して、 R_l は graded R_0 -加群であり、 $S^l(M), \overline{S^l(M)}$ は graded 部分 R_0 -加群である。 $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous な元 f が $\deg_{\mathbb{Z}^3} f = (a, b, c)$ であるとき、 $\text{t.deg}_{\mathbb{Z}^3} f = a + b + c$ と定める。

補題 4.8 $p > 0$ と $\beta/\alpha < 2/3$ を充す α, β が与えられたとする。 h は、 $\overline{S^{p^n}(M)}$ の元で $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous であり、 V に関する monic 多項式であるとする。このとき、 $g \in F[x, y, z, S, T, U]$ が存在して、 $h = V^{p^n} + g$ と書ける。

証明 仮定より、 $\deg_{\mathbb{Z}^3} h = (\beta p^n, \beta p^n, \beta p^n)$ である。ここで、

$$h = V^{p^n} + g_i V^{p^n-i} + (V \text{ に関して } p^n - i \text{ 次未満})$$

で、 $0 \neq g_i \in F[x, y, z, S, T, U]$, $0 < i < p^n$ とする。このとき、補題 4.7 により、 $g_i \in S^i(N)$ である。 $\text{t.deg}_{\mathbb{Z}^3} A = \text{t.deg}_{\mathbb{Z}^3} B = \text{t.deg}_{\mathbb{Z}^3} C = 2\alpha$ に注意すれば、 $\text{t.deg}_{\mathbb{Z}^3} g_i \geq 2i\alpha$ となる。故に、

$$3\beta p^n = \text{t.deg}_{\mathbb{Z}^3} g_i V^{p^n-i} \geq 2i\alpha + 3\beta(p^n - i)$$

となり、これは、 $\beta/\alpha < 2/3$ に反する。

証明終

補題 4.9 $p > 0$ と $\beta/\alpha < 1/2$ を充す α, β が与えられたとする。このとき、任意の自然数 l に対して、 $\overline{S^l(M)}$ は V に関して l 次の monic 多項式を含まない。

証明 ある自然数 l が存在して $\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の monic 多項式 h を含むとする。このとき、補題 4.6 により、 $l = p^n$ であり h は $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous としてよい。注意 4.4 により $n \geq 1$ である。さらに、補題 4.8 によって、 $h = V^{p^n} + g$ ($g \in F[x, y, z, S, T, U]$) の形としてよい。

$x^{\alpha-\beta}V - y^{\beta}z^{\beta}S \in M$ であるから $x^{(\alpha-\beta)p^n}V^{p^n} - y^{\beta p^n}z^{\beta p^n}S^{p^n} \in S^{p^n}(M)$ となる。また、 $x^{(\alpha-\beta)p^n}V^{p^n} + x^{(\alpha-\beta)p^n}g^{p^n} \in \overline{S^{p^n}(M)}$ であるから、 $x^{(\alpha-\beta)p^n}g^{p^n} + y^{\beta p^n}z^{\beta p^n}S^{p^n} \in \overline{S^{p^n}(M)} \cap F[x, y, z, S, T, U] = S^{p^n}(N)$ である。

つまり、

- f は $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous で、 $\deg_{\mathbb{Z}^3} f = (\alpha p^n, \beta p^n, \beta p^n)$.
- $f - y^{\beta p^n}z^{\beta p^n}S^{p^n}$ は $x^{(\alpha-\beta)p^n}$ で割り切れる。

を充す $f \in S^{p^n}(N)$ が存在する。 f の中から $y^{\beta p^n}z^{\beta p^n}S^{p^n}$ が出てくるから、 f の中には、 A, B の p^n 次の monomial が少なくとも一つ出てくる。ところが、 $\deg_{\mathbb{Z}^3} A^i B^{p^n-i} = (\alpha p^n, \alpha i, \alpha(p^n-i))$ であるから、 f の中に $A^i B^{p^n-i}$ が出てくるとすれば $\alpha i \leq \beta p^n$, $\alpha(p^n-i) \leq \beta p^n$ となり、これは $\beta/\alpha < 1/2$ に反する。

証明終

補題 4.10 l を自然数をする。このとき、 $\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の monic 多項式を含むかどうかは、有理数 β/α と F の標数だけで定まる。

証明 $R'_0 = F[x', y', z']$ とし、 $x \mapsto x'^t, y \mapsto y'^t, z \mapsto z'^t$ によって定まる準同型 $R_0 \rightarrow R'_0$ により、 R'_0 を R -algebra とみる。 $R' = R \otimes_{R_0} R'_0$ とおく。このとき、 $R' = F[x', y', z', S, T, U, V]$, $R'_1 = R_1 \otimes_{R_0} R'_0 = R'_0 S + R'_0 T + R'_0 U + R'_0 V$ である。 $S \mapsto x'^{t\alpha}, T \mapsto y'^{t\alpha}, U \mapsto z'^{t\alpha}, V \mapsto (x'y'z')^{t\beta}$ により R'_1 から R'_0 への R'_0 -線形写像を定め、その核を M' と書く。このとき、 $M' = M \otimes_{R_0} R'_0$ である。 R'_0 上 M' で生成された R' の部分環を $S(M')$ とし、 $\overline{S^l(M')}$ を M のときと同様に定める。このとき、 $S^l(M') = S^l(M) \otimes_{R_0} R'_0$ となり、 $S^l(M') \subseteq \overline{S^l(M)} \otimes_{R_0} R'_0 \subseteq R'_1$ である。定義より、 $\overline{S^l(M)} \otimes_{R_0} R'_0 \subseteq \overline{S^l(M')}$ である。また、 x は $R_l / \overline{S^l(M)}$ の非零因子であったから、 x' は $R'_l / \overline{S^l(M')}$ の非零因子である。故に、 $\overline{S^l(M')} = \overline{S^l(M)} \otimes_{R_0} R'_0$ となる。だから、 $\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の monic 多項式を含むことと、 $\overline{S^l(M')}$ が V に関して l 次の monic 多項式を含むことは同値である。 証明終

補題 4.11 F の標数 $p > 0$ を固定する。さらに、 $\beta'/\alpha' < \beta/\alpha \leq 1$ とする。 α', β' のとき、 $\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の monic 多項式を含むなら、 α, β のときも、 $\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の monic 多項式を含む。

証明 補題 4.10 を使い、分子を共通にとり、 $\alpha' = \alpha + 1, \beta' = \beta$ の場合に証明すればよい。 $S \mapsto x^{\alpha+1}, T \mapsto y^{\alpha+1}, U \mapsto z^{\alpha+1}, V \mapsto (xyz)^{\beta}$ により R_1 から R_0 への R_0 -線形写像を定め、その核を M' と書く。 $S \mapsto xS, T \mapsto yT, U \mapsto zU, V \mapsto V$ によって定まる R から R への環準同型を Ψ と書く。 Ψ は次数を保つ準同型である。

$$\Psi(y^{\alpha+1}S - x^{\alpha+1}T) = xy^{\alpha+1}S - x^{\alpha+1}yT = xy(y^{\alpha}S - x^{\alpha}T) \in M$$

や、

$$\Psi(x^{\alpha+1-\beta}V - y^{\beta}z^{\beta}S) = x^{\alpha+1-\beta}V - xy^{\beta}z^{\beta}S = x(x^{\alpha-\beta}V - y^{\beta}z^{\beta}S) \in M$$

により、 $\Psi(M') \subseteq M$ であり、 $\Psi(S^l(M')) \subseteq S^l(M)$ となる。故に、 $\Psi(\overline{S^l(M')}) \subseteq \overline{S^l(M)}$ となる。 V に関して l 次の monic 多項式の Ψ による像は、 V に関して l 次の monic 多項式である。

(このとき、 $\overline{S^l(M')}$ が $V^l + g$ ($g \in F[x, y, z, S, T, U]$) の形の元を含めば、 $\overline{S^l(M)}$ もそのような形の元を含むことに注意。) 証明終

命題 4.12 $\text{ch}(F) = 2$ とする。このとき、ある自然数 l が存在して $\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の monic 多項式を含むための必要充分条件は、 $\beta/\alpha \geq 1/2$ である。

証明 $\beta \geq \alpha$ のときは、注意 4.4 よりよい。 $\beta/\alpha < 1/2$ のときは、補題 4.9 によってわかる。

あと、補題 4.10 と 補題 4.11 により、 $\alpha = 2, \beta = 1$ の場合に、 $\overline{S^2(M)}$ が V に関して 2 次の *monic* 多項式を含むことを示せば充分である。

$xV - yzS \in M$ より、 $x^2V^2 - y^2z^2S^2 \in S^2(M)$ である。また、

$$AB = (y^2S - x^2T)(z^2S - x^2U) = y^2z^2S^2 - x^2y^2SU - x^2z^2ST + x^4TU \in S^2(M)$$

であるから、

$$(xV - yzS)^2 + AB = x^2V^2 - x^2y^2SU - x^2z^2ST + x^4TU \in S^2(M)$$

となり、 $V^2 - y^2SU - z^2ST + x^2TU \in \overline{S^2(M)}$ となる。

証明終

次に、

命題 4.13 $\text{ch}(F) = p \equiv 1 \pmod{6}$ とする。このとき、ある自然数 l が存在して $\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の *monic* 多項式を含むための必要充分条件は、 $\beta/\alpha \geq 2/3$ である。

を、示す。注意 4.4、補題 4.6、補題 4.8、補題 4.10、補題 4.11 とその証明の最後の注意によって、次の二つの補題を示せば、命題 4.13 が示される。

補題 4.14 $\text{ch}(F) = p \equiv 1 \pmod{6}$ 、 $\alpha = 3, \beta = 2$ とする。このとき、 $\overline{S^p(M)}$ は V に関して p 次の *monic* 多項式を含む。

補題 4.15 $\text{ch}(F) = p \equiv 1 \pmod{6}$ 、 $\beta/\alpha = 2/3$ とする。このとき、任意の自然数 n に対して $\overline{S^{p^n}(M)}$ は、 $V^{p^n} + g$ ($g \in F[x, y, z, S, T, U]$) の形の元を含まない。

補題 4.14 の証明 まず、 $S^p(N)$ が、

$$y^{2p}z^{2p}S^p + f_jS^{p-j} + (S \text{ に関して } p-j \text{ 次未満}) \quad (1)$$

の形 ($f_j \in F[x, y, z, T, U]$) で、 $j \geq (p-1)/3$ を満たすような元を含むことを示す。

$$A^{(p+1)/2}B^{(p-1)/2} = y^{3(p+1)/2}z^{3(p-1)/2}S^p + (S \text{ に関して } p \text{ 次未満}) \in S^p(N)$$

であり、 $2p > 3(p+1)/2$ であるので、確かに $S^p(N)$ は $y^{2p}z^{2p}S^p + (S \text{ に関して } p \text{ 次未満})$ の形の元を含むことがわかる。(1) の形の式で、 j が最大となるものの一つを

$$h = y^{2p}z^{2p}S^p + f_iS^{p-i} + (S \text{ に関して } p-i \text{ 次未満}) \in S^p(N)$$

とし、 $i < (p-1)/3$ と仮定して矛盾を導く。 $((p-1)/3 < p$ であるから、 $0 \neq f_i \in F[x, y, z, T, U]$ である。 $(p-1)/3$ は偶数であることに注意。) また、 h は $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous としてよい。

このとき、補題 4.7 と同様にして、 $f_i = dC^i$ となる $d \in F[x, y, z]$ が存在することがわかる。このとき、 $\deg_{\mathbb{Z}^3} C^i S^{p-i} = (3p-3i, 3i, 3i)$ 、 $\deg_{\mathbb{Z}^3} y^{2p} z^{2p} S^p = (3p, 2p, 2p)$ であるから、 $f_i = qx^{3i} y^{2p-3i} z^{2p-3i} C^i$ ($q \in F^\times$) としてよい。 $(i < (p-1)/3$ より、 $2p-3i > 0$) 故に、

$$h = y^{2p} z^{2p} S^p + qx^{3i} y^{2p-3i} z^{2p-3i} C^i S^{p-i} + (S \text{ に関して } p-i \text{ 次未満}) \in S^p(N)$$

となる。

i が奇数と仮定する。このとき、 $p-i$ は偶数で、 $2p-3i \geq 3(p-i)/2$ となることがわかる。このとき、

$$C^i A^{(p-i)/2} B^{(p-i)/2} = y^{3(p-i)/2} z^{3(p-i)/2} C^i S^{p-i} + (S \text{ に関して } p-i \text{ 次未満}) \in S^p(N)$$

となり、 i をもっと大きくとれ、 h のとり方に反する。

i が偶数と仮定する。このとき、 $p-i$ は奇数で、 $2p-3i \geq 3(p-i+1)/2$ となることがわかる。このとき、

$$C^i A^{(p-i+1)/2} B^{(p-i-1)/2} = y^{3(p-i+1)/2} z^{3(p-i-1)/2} C^i S^{p-i} + (S \text{ に関して } p-i \text{ 次未満}) \in S^p(N)$$

となり、 i をもっと大きくとれ、 h のとり方に反する。

以上で、 $t = (p-1)/3$ としたとき、 $S^p(N)$ の中に、

$$h = y^{2p} z^{2p} S^p + qx^{3t} y^{2p-3t} z^{2p-3t} C^t S^{p-t} + (S \text{ に関して } p-t \text{ 次未満})$$

の形 ($q \in F$) の $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous な元がとれることがわかった。上の h の第 3 項以下は、 S に関して高々 $p-t-1$ 次であることから $x^{3(t+1)} = x^{p+2}$ で割り切れることに注意。(補題 4.15 を使えば、 $q \neq 0$ であることがわかるが、ここではそのことは使わない。)

ここで、

$$\begin{aligned} k &= C^t A^t B^t (xV - y^2 z^2 S) \\ &= C^t (y^3 S - x^3 T)^t (z^3 S - x^3 U)^t (xV - y^2 z^2 S) \\ &= xy^{3t} z^{3t} C^t S^{2t} V - y^{3t+2} z^{3t+2} C^t S^{2t+1} + x^3 (V \text{ に関して } 1 \text{ 次以下}) \in S^p(M) \end{aligned}$$

とおき、 $3t+1 = p$ 、 $3t+2 = 2p-3t$ であることに注意すれば、

$$qx^{p-1} k = qx^p y^{3t} z^{3t} C^t S^{2t} V - qx^{3t} y^{2p-3t} z^{2p-3t} C^t S^{p-t} + x^{p+2} (V \text{ に関して } 1 \text{ 次以下})$$

となる。すると、

$$h + qx^{p-1}k + (xV - y^2z^2S)^p = x^pV^p + qx^py^{3t}z^{3t}C^tS^{2t}V + x^{p+2}(V \text{ に関して } 1 \text{ 次以下}) \in S^p(M)$$

となり、 $\overline{S^p(M)}$ は V に関して p 次の monic 多項式を含む。

証明終

補題 4.15 の証明 $t = (p^n - 1)/3$ とおく。 t は偶数であることに注意。

Step 1. まず最初に、 $S^{p^n}(N)$ は、

$$y^{\beta p^n} z^{\beta p^n} S^{p^n} + qx^{\alpha t} y^{\beta p^n - \alpha t} z^{\beta p^n - \alpha t} C^t S^{p^n - t} + (S \text{ に関して } p^n - t \text{ 次未満})$$

の形の $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous な元で、 $q \in F^\times$ となるものを含むことを示す。 α, β, t のとり方より、 $\beta p^n - \alpha t > 0$ であることに注意。

$i = 0, 1, \dots, t-1$ に対して、

$$H(i) = x^{\alpha i} y^{\beta p^n - \alpha(d_i + i)} z^{\beta p^n - \alpha(e_i + i)} A^{d_i} B^{e_i} C^i$$

とおく。ただし、 i が偶数であるときは $d_i = (p^n - i + 1)/2$, $e_i = d_i - 1$ とし、 i が奇数であるときは $d_i = e_i = (p^n - i)/2$ とおく。ここで、 $i = 0, 1, \dots, t-1$ に対して、 $\beta p^n - \alpha(d_i + i) \geq 0$, $\beta p^n - \alpha(e_i + i) \geq 0$ に注意。 $H(i) \in S^{p^n}(N)$ は、 $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous で、 $\deg_{\mathbb{Z}} H(i) = (\alpha p^n, \beta p^n, \beta p^n)$ である。 $H(i)$ を展開して、 U が出ない項に注目する。

$$[a, b] = x^{\alpha(p^n - a)} y^{\beta p^n - \alpha b} z^{\beta p^n} S^a T^b$$

とおけば、

$$\begin{aligned} H(i) &= x^{\alpha i} y^{\beta p^n - \alpha(d_i + i)} z^{\beta p^n - \alpha(e_i + i)} (y^\alpha S - x^\alpha T)^{d_i} (z^\alpha S - x^\alpha U)^{e_i} (z^\alpha T - y^\alpha U)^i \\ &= \sum_{j=0}^{d_i} (-1)^j \binom{d_i}{j} [d_i - j + e_i, i + j] + (U \text{ が出てくる項}) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $d_i - j + e_i = p^n - i - j$ に注意。

今、 F の元 $c_0, \dots, c_{t-1}$ があって、

$$H = \sum_{i=0}^{t-1} c_i H(i) = [p^n, 0] + q[p^n - t, t] + \sum_{l>t} q_l [p^n - l, l] + (U \text{ が出てくる項})$$

と書け、 $q \in F^\times$, $q_{t+1}, \dots \in F$ となったとする。 H の $S^{p^n-t}T^t$ の係数は 0 ではないので、

$$H = y^{\beta p^n} z^{\beta p^n} S^{p^n} + q' x^{\alpha i} y^{\beta p^n - \alpha i} z^{\beta p^n - \alpha i} C^i S^{p^n - i} + (S \text{ に関して } p - i \text{ 次未満})$$

($q' \in F^\times$, $1 \leq i \leq t$) と書ける。しかし、 H のとり方より、 $1 \leq i < t$ のとき、 $S^{p^n-i}T^i$ の係数は 0 であるから、 $i = t$ である。

故に、Step 1 の証明を完成させるためには、

$$H'(i) = \sum_{j=0}^{d_i} (-1)^j \binom{d_i}{j} [p^n - i - j, i + j]$$

とおいたとき、 F の元 $c_0, \dots, c_{t-1}$ があって、

$$\sum_{i=0}^{t-1} c_i H'(i) = [p^n, 0] + q[p^n - t, t] + \sum_{l>t} q_l [p^n - l, l]$$

($q' \in F^\times, q_{t+1} \dots \in F$) と書ければよい。

$$\sum_{i=0}^{t-1} c_i H'(i) = \sum_{l=0}^{p^n} k_l [p^n - l, l]$$

とすれば、

$$\begin{pmatrix} k_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{d_0}{0} & 0 & & 0 \\ -\binom{d_0}{1} & \binom{d_1}{0} & 0 & & \\ \binom{d_0}{2} & -\binom{d_1}{1} & \binom{d_2}{0} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \binom{d_{t-1}}{0} \\ (-1)^t \binom{d_0}{t} & (-1)^{t-1} \binom{d_1}{t-1} & (-1)^{t-2} \binom{d_2}{t-2} & \cdots & -\binom{d_{t-1}}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{t-1} \end{pmatrix}$$

である。だから、上の行列の第 2 行目から第 $t+1$ 行目までの t 次正方行列が正則であればよい。この t 次正方行列の奇数行に -1 をかけ、偶数行に -1 をかければ、

$$\begin{pmatrix} \binom{d_0}{1} & \binom{d_1}{0} & 0 & & 0 \\ \binom{d_0}{2} & \binom{d_1}{1} & \binom{d_2}{0} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \binom{d_{t-1}}{0} \\ \binom{d_0}{t} & \binom{d_1}{t-1} & \binom{d_2}{t-2} & \cdots & \binom{d_{t-1}}{1} \end{pmatrix}$$

となる。ここで、

$$d_{t-1} = \frac{p^n + 2}{3} > \frac{p^n - 1}{3} = t$$

に注意。また、定義より、 $d_i - d_{i+1}$ は 0 または 1 であるから、この行列を基本変形して、

$$\begin{pmatrix} \binom{d_{t-1}}{1} & \binom{d_{t-1}}{0} & 0 & & 0 \\ \binom{d_{t-1}}{2} & \binom{d_{t-1}}{1} & \binom{d_{t-1}}{0} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \binom{d_{t-1}}{0} \\ \binom{d_{t-1}}{t} & \binom{d_{t-1}}{t-1} & \binom{d_{t-1}}{t-2} & \cdots & \binom{d_{t-1}}{1} \end{pmatrix}$$

となる。

Giambelli's identity ([4]) によって、 G を d_{t-1} 次元の $\mathbb{C}$ -vector space としたときこの行列式は $\dim_{\mathbb{C}} \text{Sym}^t G = \binom{2t}{t}$ と等しい。 $(d_{t-1} + t - 1 = 2t$ に注意)

故に、あと $\binom{2t}{t}$ が p で割り切れないことを示せば充分である。

$$\binom{2t}{t} = \frac{(t+1)(t+2) \cdots 2t}{1 \cdot 2 \cdots t}$$

で、 $2t \leq p^n$ であるから、 $l = 1, 2, \dots, n-1$ に対して、 $\{1, 2, \dots, t\}$ と $\{t+1, t+2, \dots, 2t\}$ の中の p^l の倍数の個数が等しければよい。 $t = (p^n - 1)/3 \not\equiv 0 \pmod{p}$ より、 $sp^l < t < (s+1)p^l$ とおく。 $t = (p^n - p^l)/3 + (p^l - 1)/3$ であり、 $(p^n - p^l)/3$ は p^l で割り切れ、 $0 < (p^l - 1)/3 < p^l$ であるから、 $t - sp^l = (p^l - 1)/3$ となり、 $2t - 2sp^l = 2(p^l - 1)/3 < p^l$ であるから、 $2sp^l < 2t < (2s+1)p^l$ となる。故に、 $\{1, 2, \dots, t\}$ と $\{t+1, t+2, \dots, 2t\}$ の中の p^l の倍数の個数は共に s である。

これで、Step 1 の証明は完了した。

Step 2. 補題 4.15 の証明に戻る。 $V^{p^n} + g \in \overline{S^{p^n}(M)}$ を充す $g \in F[x, y, z, S, T, U]$ が存在したとする。 $V^{p^n} + g$ は $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous としてよい。

$x^{\alpha-\beta}V - y^{\beta}z^{\beta}S \in M$ より、 $x^{(\alpha-\beta)p^n}V^{p^n} - y^{\beta p^n}z^{\beta p^n}S^{p^n} \in S^{p^n}(M)$ となる。 $x^{(\alpha-\beta)p^n}V^{p^n} + x^{(\alpha-\beta)p^n}g \in \overline{S^{p^n}(M)}$ であるから

$$y^{\beta p^n}z^{\beta p^n}S^{p^n} + x^{(\alpha-\beta)p^n}g \in \overline{S^{p^n}(M)} \cap F[x, y, z, S, T, U] = S^{p^n}(N)$$

となる。

また Step 1 より、 $S^{p^n}(N)$ は、

$$y^{\beta p^n}z^{\beta p^n}S^{p^n} + qx^{\alpha t}y^{\beta p^n - \alpha t}z^{\beta p^n - \alpha t}C^t S^{p^n - t} + (S \text{ に関して } p^n - t \text{ 次未満})$$

の形の $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous な元で、 $q \in F^\times$ となるものを含む。故に、

$$G = x^{(\alpha-\beta)p^n}g - qx^{\alpha t}y^{\beta p^n - \alpha t}z^{\beta p^n - \alpha t}C^t S^{p^n - t} + (S \text{ に関して } p^n - t \text{ 次未満}) \in S^{p^n}(N)$$

となる。 $(\alpha - \beta)p^n > \alpha t$ であるから、 g の S に関する次数は $p^n - t$ 未満である。だから、 $G \neq 0$ である。また、 G は、 $\deg_{\mathbb{Z}^3} G = (\alpha p^n, \beta p^n, \beta p^n)$ である $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous な元であるので、

$$G = \sum_{\substack{i+j+k=p^n \\ \alpha(i+k) \leq \beta p^n \\ \alpha(j+k) \leq \beta p^n}} d_{ijk} x^{\alpha p^n - \alpha(i+j)} y^{\beta p^n - \alpha(i+k)} z^{\beta p^n - \alpha(j+k)} A^i B^j C^k \quad (2)$$

$(d_{ijk} \in F)$ と書ける。

一般に上のように $S^p(N)$ の元を表示したとき、それぞれの k に対し、 $d_{ijk} \neq 0$ となる (i, j, k) の組は、高々一つとしてよい。(そのことを、 k に関する帰納法で示す。 $k \geq 0$ に対して、 $d_{i_1 j_1 k} \neq 0, d_{i_2 j_2 k} \neq 0$ とする。ここで、 $i_1 + j_1 + k = i_2 + j_2 + k = p^n, \alpha(i_1 + k) \leq \beta p^n, \alpha(i_2 + k) \leq \beta p^n, \alpha(j_1 + k) \leq \beta p^n, \alpha(j_2 + k) \leq \beta p^n, 0 \leq i_1 < i_2$ とおく。このとき、 $j_1 > j_2 \geq 0$ である。 $i_3 = i_1 + 1, j_3 = j_1 - 1$ とおく。このとき、 $i_3 + j_3 + k = p^n, \alpha(i_3 + k) \leq \beta p^n, \alpha(j_3 + k) \leq \beta p^n$ となる。 $z^\alpha A - y^\alpha B + x^\alpha C = 0$ に $A^{i_1} B^{j_3} C^k$ をかけると、 $z^\alpha A^{i_3} B^{j_3} C^k - y^\alpha A^{i_1} B^{j_1} C^k + x^\alpha A^{i_1} B^{j_3} C^{k+1} = 0$ であり、 $z^\alpha A^{i_3} B^{j_3} C^k, y^\alpha A^{i_1} B^{j_1} C^k, x^\alpha A^{i_1} B^{j_3} C^{k+1}$ は、 $\mathbb{Z}^3$ -grading が $(\alpha(i_3 + j_3), \alpha(i_3 + k), \alpha(j_1 + k))$ の $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous な元である。ここで、 $\alpha(i_3 + j_3) \leq \alpha p^n, \alpha(i_3 + k) \leq \beta p^n, \alpha(j_1 + k) \leq \beta p^n$ に注意して、 G を、

$$G + d_{i_1 j_1 k} x^{\alpha p^n - \alpha(i_3 + j_3)} y^{\beta p^n - \alpha(i_3 + k)} z^{\beta p^n - \alpha(j_1 + k)} (z^\alpha A^{i_3} B^{j_3} C^k - y^\alpha A^{i_1} B^{j_1} C^k + x^\alpha A^{i_1} B^{j_3} C^{k+1})$$

で置き換えれば、 $d_{i_1 j_1 k} = 0$ としてよい。これを繰り返せばよい。)

故に、式 (2) の G の表示において、それぞれの k に対し $d_{ijk} \neq 0$ となる (i, j, k) の組は、高々一つとする。 $k_1 = \min\{k \geq 0 \mid d_{ijk} \neq 0 \text{ となる } i, j \text{ が存在する}\}$ とおく。 $G \neq 0$ であるから、 k_1 は定まる。 $d_{i_1 j_1 k_1} \neq 0$ とする。このとき、 G の S に関する次数は $i_1 + j_1$ である。故に、 $i_1 + j_1 = p^n - t$ である。だから、 $k_1 = t$ となる。 $p^n - t$ は奇数であるから、 i_1 と j_1 のどちらかは $(p^n - t + 1)/2$ 以上である。 $i_1 \geq (p^n - t + 1)/2$ とすれば、 $i_1 + t \geq (p^n + t + 1)/2$ となる。しかし、簡単な計算により、

$$\beta p^n - \alpha(i_1 + t) < 0$$

となってしまう、 k_1 のとり方に反する。

証明終

これで、命題 4.13 は証明された。

次に、 $p \equiv 5 \pmod{6}$ の場合を考える。

命題 4.16 $\text{ch}(F) = p \equiv 5 \pmod{6}$ とする。このとき、ある自然数 l が存在して $\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の *monic* 多項式を含むための必要充分条件は、 $\beta/\alpha \geq (2p-1)/3p$ である。

証明 まず最初に、 $\beta/\alpha \geq (2p-1)/3p$ のとき、 $\overline{S^p(M)}$ が V に関して p 次の *monic* 多項式を含むことを示す。 $\beta \geq \alpha$ であれば、注意 4.4 よりよい。 $\alpha > \beta$ とする。補題 4.10 と補題 4.11 により、 $\beta/\alpha = (2p-1)/3p$ の場合に示せば充分である。

$t = (p+1)/3$ とおく。 t は、偶数であることに注意。

まず、 $S^p(N)$ が、

$$y^{\beta p} z^{\beta p} S^p + f_j S^{p-j} + (S \text{ に関して } p-j \text{ 次未満}) \quad (3)$$

の形 ($f_j \in F[x, y, z, T, U]$) で、 $j \geq t$ となる元を含むことを示す。

$$A^{(p+1)/2} B^{(p-1)/2} = y^{\alpha(p+1)/2} z^{\alpha(p-1)/2} S^p + (S \text{ に関して } p \text{ 次未満}) \in S^p(N)$$

であり、 $\beta p \geq \alpha(p+1)/2$ に注意すれば、 $S^p(N)$ は $y^{\beta p} z^{\beta p} S^p + (S \text{ に関して } p \text{ 次未満})$ の形の元を含むことがわかる。(3) の形の式で、 j が最大となるものの一つを

$$h = y^{\beta p} z^{\beta p} S^p + f_i S^{p-i} + (S \text{ に関して } p-i \text{ 次未満}) \in S^p(N)$$

とし、 $i < t$ と仮定して矛盾を導く。($t < p$ であるから、 $0 \neq f_i \in F[x, y, z, T, U]$ である。)
また、 h は $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous としてよい。

このとき、 $f_i = qx^{\alpha i} y^{\beta p - \alpha i} z^{\beta p - \alpha i} C^i$ ($q \in F^\times$) としてよい。($i < t$ より、 $\beta p - \alpha i > 0$)
故に、

$$h = y^{\beta p} z^{\beta p} S^p + qx^{\alpha i} y^{\beta p - \alpha i} z^{\beta p - \alpha i} C^i S^{p-i} + (S \text{ に関して } p-i \text{ 次未満}) \in S^p(N)$$

となる。

i が奇数と仮定する。このとき、 $p-i$ は偶数で、 $\beta p - \alpha i \geq \alpha(p-i)/2$ となることがわかる。このとき、

$$C^i A^{(p-i)/2} B^{(p-i)/2} = y^{\alpha(p-i)/2} z^{\alpha(p-i)/2} C^i S^{p-i} + (S \text{ に関して } p-i \text{ 次未満}) \in S^p(N)$$

となり、 i をもっと大きくとれ、 h のとり方に反する。

i が偶数と仮定する。このとき、 $p-i$ は奇数で、 $\beta p - \alpha i \geq \alpha(p-i+1)/2$ となることがわかる。このとき、

$$C^i A^{(p-i+1)/2} B^{(p-i-1)/2} = y^{\alpha(p-i+1)/2} z^{\alpha(p-i-1)/2} C^i S^{p-i} + (S \text{ に関して } p-i \text{ 次未満}) \in S^p(N)$$

となり、 i をもっと大きくとれ、 h のとり方に反する。

以上で、 $S^p(N)$ の中に、

$$h = y^{\beta p} z^{\beta p} S^p + qx^{\alpha t} y^{\beta p - \alpha t} z^{\beta p - \alpha t} C^t S^{p-t} + (S \text{ に関して } p-t \text{ 次未満})$$

の形 ($q \in F$) の $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous な元がとれることがわかった。

$x^{\alpha-\beta} V - y^{\beta} z^{\beta} S \in M$ より、

$$\begin{aligned} & (x^{\alpha-\beta} V - y^{\beta} z^{\beta} S)^p + h \\ = & x^{(\alpha-\beta)p} V^p + qx^{\alpha t} y^{\beta p - \alpha t} z^{\beta p - \alpha t} C^t S^{p-t} + (V \text{ が出ず } S \text{ に関して } p-t \text{ 次未満}) \in S^p(M) \end{aligned}$$

であり、この第二項以下は、 $x^{\alpha t}$ で割り切れることがわかる。ここで、 $\alpha t = (\alpha - \beta)p$ であるから、 $\overline{S^p(M)}$ が V に関して p 次の monic 多項式を含むことがわかる。

次に、逆を示す。

2 以上の自然数 n と、 $\beta/\alpha < (2p-1)/3p$ を充たす α, β が存在して、 $V^{p^n} + g \in \overline{S^{p^n}(M)}$ ($g \in F[x, y, z, S, T, U]$) と仮定する。 $V^{p^n} + g$ は、 $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous としてよい。(補題 4.6 と補題 4.8 を使えば、 V に関する monic 多項式はこのような形としてよい。)

$$\frac{2}{3} > \frac{2p-1}{3p} = \frac{2p^n - p^{n-1}}{3p^n} > \frac{2p^n - p^{n-1} - 3}{3p^n}$$

であるから、補題 4.10 と補題 4.11 により、

$$\frac{2p-1}{3p} > \beta/\alpha > \frac{2p^n - p^{n-1} - 3}{3p^n}$$

としてよい。ここで、 $t = (p^n - 2p^{n-1} - 3)/3$ と置き換える。 t は偶数であり、 $0 < t < p^n$ となる。($t > 0$ とするために、 $n \geq 2$ と仮定した。)

まず、補題 4.15 の Step 1 と同様にして、 $S^{p^n}(N)$ が、

$$y^{\beta p^n} z^{\beta p^n} S^{p^n} + q x^{\alpha t} y^{\beta p^n - \alpha t} z^{\beta p^n - \alpha t} C^t S^{p^n - t} + (S \text{ に関して } p^n - t \text{ 次未満})$$

の形の $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous な元で、 $q \in F^\times$ となるものを含むことを示す。(α, β, t のとり方より、 $\beta p^n - \alpha t > 0$ である。)

$i = 0, 1, \dots, t-1$ に対して、

$$H(i) = x^{\alpha i} y^{\beta p^n - \alpha(d_i + i)} z^{\beta p^n - \alpha(e_i + i)} A^{d_i} B^{e_i} C^i$$

とにおいて補題 4.15 の Step 1 と同様な議論をする。(ここで、 i が偶数であるときは $d_i = (p^n - i + 1)/2$, $e_i = d_i - 1$ とし、 i が奇数であるときは $d_i = e_i = (p^n - i)/2$ とする。)

$i = 0, 1, \dots, t-1$ に対して、 $\beta p^n - \alpha(d_i + i) \geq 0$, $\beta p^n - \alpha(e_i + i) \geq 0$ に注意。

ここで、

$$d_{t-1} = \frac{p^n + p^{n-1} + 3}{3} > t$$

であるから、補題 4.15 の Step 1 と同様にして、次の正方行列が正則であることを示せばよい。

$$\begin{pmatrix} \binom{d_{t-1}}{1} & \binom{d_{t-1}}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{d_{t-1}}{2} & \binom{d_{t-1}}{1} & \binom{d_{t-1}}{0} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \binom{d_{t-1}}{0} \\ \binom{d_{t-1}}{t} & \binom{d_{t-1}}{t-1} & \binom{d_{t-1}}{t-2} & \cdots & \binom{d_{t-1}}{1} \end{pmatrix}$$

Giambelli's identity より、この行列式は、 $\binom{d_{i-1}+t-1}{t}$ と等しい。

$$e = d_{i-1} + t - 1 = \frac{2p^n - p^{n-1} - 3}{3}$$

とおく。 $\binom{e}{t}$ が p で割り切れないことを示す。

$e = (2p^n - p^{n-1} - 3)/3 < p^n$ であるから、 $l = 1, 2, \dots, n-1$ に対して、 $\{1, 2, \dots, t\}$ と $\{e-t+1, e-t+2, \dots, e\}$ の中の p^l の倍数の個数が等しければよい。それは、

$$e - t = \frac{p^n + p^{n-1}}{3} \equiv 0 \pmod{p^{n-1}}$$

であることから直ちにわかる。

命題 4.16 の証明に戻る。

$\overline{S^{p^n}(M)} \ni V^{p^n} + g$ であった。 $x^{\alpha-\beta}V - y^\beta z^\beta S \in M$ より、 $x^{(\alpha-\beta)p^n}V^{p^n} - y^{\beta p^n} z^{\beta p^n} S^{p^n} \in S^{p^n}(M)$ であるから、 $y^{\beta p^n} z^{\beta p^n} S^{p^n} + x^{(\alpha-\beta)p^n} g \in S^{p^n}(N)$ となる。 $S^{p^n}(N)$ が、

$$y^{\beta p^n} z^{\beta p^n} S^{p^n} + q x^{\alpha t} y^{\beta p^n - \alpha t} z^{\beta p^n - \alpha t} C^t S^{p^n - t} + (S \text{ に関して } p^n - t \text{ 次未満})$$

の形の $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous な元で、 $q \in F^\times$ となるものを含むことより、

$$G = x^{(\alpha-\beta)p^n} g - q x^{\alpha t} y^{\beta p^n - \alpha t} z^{\beta p^n - \alpha t} C^t S^{p^n - t} + (S \text{ に関して } p^n - t \text{ 次未満}) \in S^{p^n}(N)$$

となる。 $(\alpha - \beta)p^n > \alpha t$ であるから、 g の S に関する次数は $p^n - t$ 未満としてよい。だから、 $G \neq 0$ である。また、 G は、 $\deg_{\mathbb{Z}^3} G = (\alpha p^n, \beta p^n, \beta p^n)$ である $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous な元であるので、

$$G = \sum_{\substack{i+j+k=p^n \\ \alpha(i+k) \leq \beta p^n \\ \alpha(j+k) \leq \beta p^n}} d_{ijk} x^{\alpha p^n - \alpha(i+j)} y^{\beta p^n - \alpha(i+k)} z^{\beta p^n - \alpha(j+k)} A^i B^j C^k$$

$(d_{ijk} \in F)$ と書ける。補題 4.15 の Step 2 と同様にして、それぞれの k に対し、 $d_{ijk} \neq 0$ となる (i, j, k) の組は、高々一つとしてよい。 $k_1 = \min\{k \geq 0 \mid d_{ijk} \neq 0 \text{ となる } i, j \text{ が存在する}\}$ とおく。 $G \neq 0$ であるから、 k_1 は定まる。 $d_{i_1 j_1 k_1} \neq 0$ とする。このとき、 G の S に関する次数は $i_1 + j_1$ である。故に、 $i_1 + j_1 = p^n - t$ である。だから、 $k_1 = t$ である。 $p^n - t$ は奇数であるから、 i_1 と j_1 のどちらかは $(p^n - t + 1)/2$ 以上である。 $i_1 \geq (p^n - t + 1)/2$ とすれば、 $i_1 + t \geq (p^n + t + 1)/2$ となる。しかし、簡単な計算により、

$$\beta p^n - \alpha(i_1 + t) < 0$$

となってしまう、 k_1 のとり方に反する。

証明終

最後に、 $p = 3$ の場合を考える。

命題 4.17 $\text{ch}(F) = 3$ とする。このとき、ある自然数 l が存在して $\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の *monic* 多項式を含むための必要充分条件は、 $\beta/\alpha \geq 2/3$ である。

証明 最初に、 $\beta/\alpha \geq 2/3$ のとき、ある自然数 l が存在して $\overline{S^l(M)}$ が V に関して l 次の *monic* 多項式を含むことを見る。 $\beta \geq \alpha$ であれば、注意 4.4 よりよい。 $\alpha > \beta$ とする。補題 4.10 と 補題 4.11 により、 $\alpha = 3, \beta = 2$ の場合に示せば充分である。そのときは、

$$(xV - y^2z^2S)^3 + z^3A^2B = x^3V^3 + x^3(V \text{ が出てこない})$$

と書けることより $\overline{S^3(M)}$ は V に関して 3 次の *monic* 多項式を含むことがわかる。

次に、逆を示す。

2 以上の自然数 n と、 $\beta/\alpha < 2/3$ を充す α, β が存在して、 $V^{3^n} + g \in \overline{S^{3^n}(M)}$ ($g \in F[x, y, z, S, T, U]$) とする。 $V^{3^n} + g$ は、 $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous としてよい。補題 4.10 と 補題 4.11 により、

$$\frac{2}{3} > \beta/\alpha > \frac{2 \cdot 3^{n-1} - 1}{3^n}$$

としてよい。ここで、 $t = 3^{n-1} - 1$ とおく。 t は偶数である。 $(n \geq 2$ であるから $t > 0$ である。)

まず、補題 4.15 の Step 1 と同様にして、 $S^{3^n}(N)$ が、

$$y^{\beta 3^n} z^{\beta 3^n} S^{3^n} + qx^{\alpha t} y^{\beta 3^n - \alpha t} z^{\beta 3^n - \alpha t} C^t S^{3^n - t} + (S \text{ に関して } 3^n - t \text{ 次未満})$$

の形の $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous な元で、 $q \in F^\times$ となるものを含むことを示す。 $(\alpha, \beta, t$ のとり方より、 $\beta 3^n - \alpha t > 0$ である。)

$i = 0, 1, \dots, t-1$ に対して、

$$H(i) = x^{\alpha i} y^{\beta 3^n - \alpha(d_i + i)} z^{\beta 3^n - \alpha(e_i + i)} A^{d_i} B^{e_i} C^i$$

とおいて補題 4.15 の Step 1 と同様にする。 $(i$ が偶数であるときは $d_i = (3^n - i + 1)/2, e_i = d_i - 1$ とし、 i が奇数であるときは $d_i = e_i = (3^n - i)/2$ とする。)

ここで、 $\beta 3^n - \alpha(d_i + i) \geq 0, \beta 3^n - \alpha(e_i + i) \geq 0$ に注意。

ここで、

$$d_{t-1} = 3^{n-1} + 1 > t$$

であるから、補題 4.15 の Step 1 と同様にして、次の正方行列が正則であることを示せば

よい。

$$\begin{pmatrix} \binom{d_{t-1}}{1} & \binom{d_{t-1}}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{d_{t-1}}{2} & \binom{d_{t-1}}{1} & \binom{d_{t-1}}{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \binom{d_{t-1}}{0} \\ \binom{d_{t-1}}{t} & \binom{d_{t-1}}{t-1} & \binom{d_{t-1}}{t-2} & \cdots & \binom{d_{t-1}}{1} \end{pmatrix}$$

Giambelli's identity より、この行列式は、 $\binom{d_{t-1}+t-1}{t}$ と等しい。

$$e = d_{t-1} + t - 1 = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$$

とおく。 $\binom{e}{t}$ が 3 で割り切れないことを示す。

$e < 3^n$ であるから、 $l = 1, 2, \dots, n-1$ に対して、 $\{1, 2, \dots, t\}$ と $\{e-t+1, e-t+2, \dots, e\}$ の中の 3^l の倍数の個数が等しければよい。それは、

$$e - t = 3^{n-1}$$

であることから直ちにわかる。

命題 4.17 の証明に戻る。

$\overline{S^{3^n}(M)} \ni V^{3^n} + g$ であった。 $x^{\alpha-\beta}V - y^\beta z^\beta S \in M$ より、 $x^{(\alpha-\beta)3^n}V^{3^n} - y^{\beta 3^n} z^{\beta 3^n} S^{3^n} \in S^{3^n}(M)$ であるから、 $y^{\beta 3^n} z^{\beta 3^n} S^{3^n} + x^{(\alpha-\beta)3^n} g \in S^{3^n}(N)$ となる。 $S^{3^n}(N)$ が、

$$y^{\beta 3^n} z^{\beta 3^n} S^{3^n} + q x^{\alpha t} y^{\beta 3^n - \alpha t} z^{\beta 3^n - \alpha t} C^t S^{3^n - t} + (S \text{ に関して } 3^n - t \text{ 次未満})$$

の形の $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous な元で、 $q \in F^\times$ となるものを含むことより、

$$G = x^{(\alpha-\beta)3^n} g - q x^{\alpha t} y^{\beta 3^n - \alpha t} z^{\beta 3^n - \alpha t} C^t S^{3^n - t} + (S \text{ に関して } 3^n - t \text{ 次未満}) \in S^{3^n}(N)$$

となる。 $(\alpha - \beta)3^n > \alpha t$ であるから、 g の S に関する次数は $3^n - t$ 未満としてよい。だから、 $G \neq 0$ である。また、 G は、 $\deg_{\mathbb{Z}^3} G = (\alpha 3^n, \beta 3^n, \beta 3^n)$ である $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous な元であるので、

$$G = \sum_{\substack{i+j+k=3^n \\ \alpha(i+k) \leq \beta 3^n \\ \alpha(j+k) \leq \beta 3^n}} d_{ijk} x^{\alpha 3^n - \alpha(i+j)} y^{\beta 3^n - \alpha(i+k)} z^{\beta 3^n - \alpha(j+k)} A^i B^j C^k$$

$(d_{ijk} \in F)$ と書ける。補題 4.15 の Step 2 と同様にして、それぞれの k に対し、 $d_{ijk} \neq 0$ となる (i, j, k) の組は、高々一つとしてよい。 $k_1 = \min\{k \geq 0 \mid d_{ijk} \neq 0 \text{ となる } i, j \text{ が存在する}\}$ とおく。 $G \neq 0$ であるから、 k_1 は定まる。 $d_{i_1 j_1 k_1} \neq 0$ とする。このとき、 G の S に関する

る次数は $i_1 + j_1$ である。故に、 $i_1 + j_1 = 3^n - t$ である。だから、 $k_1 = t$ である。 $3^n - t$ は奇数であるから、 i_1 と j_1 のどちらかは $(3^n - t + 1)/2$ 以上である。 $i_1 \geq (3^n - t + 1)/2$ とおけば、 $i_1 + t \geq (3^n + t + 1)/2$ となる。しかし、簡単な計算により、

$$\beta 3^n - \alpha(i_1 + t) < 0$$

となってしまう、 k_1 のとり方に反する。

証明終

命題 4.12, 命題 4.13, 命題 4.16, 命題 4.17 を合わせて 定理 4.5 を得る。

5 $\alpha = 2, \beta = 1$ の場合

$\alpha = 2, \beta = 1$ の場合 (Roberts の記号で $t = 1$ の場合) は、 $\text{ch}(F) = 2$ の場合は、命題 4.2 によって $\overline{S(M)}$ は Noether 環となることがわかるが、それ以外では、section 2, section 3 の判定法は使えないし、 $\text{ch}(F) = 0$ の場合も Roberts の証明も有効には働かない。

この最後の section で、 $\alpha = 2, \beta = 1$ の場合に、 $\overline{S(M)}$ が Noether 環であることを示す。

命題 5.1 $\alpha = 2, \beta = 1$ とする。このとき、任意の体 F 上で、 $\overline{S(M)}$ は Noether 環である。

証明 $\text{ch}(F) = 2$ の場合は、命題 4.12 によって $\overline{S(M)}$ は Noether 環となることがわかる。

$\text{ch}(F) \neq 2$ と仮定する。

$$\begin{aligned} A &= y^2 S - x^2 T \\ B &= z^2 S - x^2 U \\ C &= z^2 T - y^2 U \\ D &= xV - yzS \\ E &= yV - xzT \\ F &= zV - xyU \\ G &= xV^2 - 2yzSV + xz^2ST + xy^2SU - x^3TU \\ H &= yV^2 - 2xzTV + yz^2ST - y^3SU + x^2yTU \\ I &= zV^2 - 2xyUV - z^3ST + y^2zSU + x^2zTU \end{aligned}$$

とおき、 $\overline{S(M)} = R_0[A, B, C, D, E, F, G, H, I]$ を示す。

まず、

$$xG = D^2 - AB$$

$$yH = E^2 + AC$$

$$zI = F^2 - BC$$

であるから、 $G, H, I \in \overline{S^2(M)}$ となる。

この状況で、次を示す。

補題 5.2 q, t を $q \geq t \geq 0$ を充す整数とする。 $K_0V^t + K_1V^{t-1} + \cdots + K_t \in \overline{S^q(M)}$ ($K_0, \dots, K_t \in F[x, y, z, S, T, U]$) が、 $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous とする。このとき、

$$K_0 = \sum_{i+j+k=q-t} d_{ijk} A^i B^j C^k$$

($d_{ijk} \in R_0$) と書け、すべての i, j, k に対して、 $\text{t.deg}_{\mathbb{Z}^3} d_{ijk} \geq [(t+1)/2]$ となる。

証明 上の状況で、

$$\gamma(K_0V^t + K_1V^{t-1} + \cdots + K_t) = \delta(K_0)\gamma(V)^t + \delta(K_1)\gamma(V)^{t-1} + \cdots + \delta(K_t)$$

には S' が出ないので、 $\delta(K_0)$ には S' は出ず、 $K_0 \in S^{q-t}(N)$ となることは容易にわかる。

故に、 $K_0 = \sum_{i+j+k=q-t} d_{ijk} A^i B^j C^k$ ($d_{ijk} \in R_0$) と書ける。

補題を t に関する帰納法で示す。

$t = 0$ の場合は、 $\overline{S^q(M)} \cap F[x, y, z, S, T, U] = S^q(N)$ より、直ちにわかる。

これが成立しないような最小の $t > 0$ をもってくる。

最初に、その t が偶数であるときを考える。 $t = 2l$ ($l \geq 1$) とおく。このとき、 $[(t+1)/2] = l$ に注意。仮定より、 $q \geq 2l$ を充す自然数と、 $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous な元

$$L_1 = K_0V^{2l} + \sum_{i=1}^{2l} K_iV^{2l-i} \in \overline{S^q(M)}$$

($K_0, \dots, K_{2l} \in F[x, y, z, S, T, U]$) が存在して、 $K_0 = \sum_{i+j+k=q-2l} d_{ijk} A^i B^j C^k \neq 0$ と書け、 $d_{ijk} \in R_0$ は $\text{t.deg}_{\mathbb{Z}^3} d_{ijk} = l - 1$ を充す斉次式であるとしてよい。

$$\sum_{i+j+k=q-2l} d_{ijk}(G, H, I) A^i B^j C^k \in \overline{S^{q-2}(M)}$$

に注意すれば、

$$\begin{aligned} L_2 &= \left(\sum_{i+j+k=q-2l} d_{ijk}(G, H, I) A^i B^j C^k \right) G \\ &= x K_0 V^{2l} + \cdots \in \overline{S^q(M)} \end{aligned}$$

となる。さらに、

$$L_3 = x L_1 = x K_0 V^{2l} + \sum_{i=1}^{2l} x K_i V^{2l-i} \in \overline{S^q(M)}$$

とおく。

ここで、 $L_2 \neq L_3$ と仮定する。 $L_3 - L_2$ の V に関する次数を a とする。ここで、 $0 \leq a < 2l$ である。また、 $\text{t.deg}_{\mathbb{Z}^3}(L_3 - L_2) = 4q - l$ である。 $L_3 - L_1$ の V^a の係数は $S^{q-a}(N)$ の元であることと、 l の最小性より、

$$4q - l \geq [(a+1)/2] + 4(q-a) + 3a$$

となり、これより、 $a > 2l - 1$ となって矛盾する。故に、 $L_2 = L_3$ である。特に、 L_2 は x で割り切れる。だから、 $\sum_{i+j+k=q-2l} d_{ijk}(G, H, I) A^i B^j C^k$ が x で割り切れる。補題 4.15 の Step 2 の中で証明したように、 $z^2 A - y^2 B + x^2 B = 0$ であることと、 K_0 が $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous であることに注意すれば、

$$K_0 = x^\xi (m A^{i_0} B^{j_0} C^{k_0} + x(\cdots))$$

の形としてよい。ただし、 $j_0 + j_0 + k_0 = q - 2l$ であり、 $m = b y^{m_1} z^{m_2}$ ($b \in F^\times$, $\xi + m_1 + m_2 = l - 1$) とする。 G^ξ は x で割れないので、

$$b H^{m_1} I^{m_2} A^{i_0} B^{j_0} C^{k_0} + G(\cdots)$$

が x で割れる。しかし、この式の V に関する定数項は、 $\text{mod}(x)$ で、

$$b(yz^2ST - y^3SU)^{m_1}(-z^3ST + y^2zSU)^{m_2}(y^2S)^{i_0}(z^2S)^{j_0}(z^2T - y^2U)^{k_0}$$

であり、これは x で割れない。

次に、 l が奇数であるときを考える。 $l = 2l+1$ ($l \geq 0$) とおく。このとき、 $[(l+1)/2] = l+1$ である。

仮定より、 $q \geq 2l+1$ を充す自然数と、 $\mathbb{Z}^3$ -homogeneous な元

$$L_4 = K_0 V^{2l+1} + \sum_{i=1}^{2l+1} K_i V^{2l+1-i} \in \overline{S^q(M)}.$$

$(K_0, \dots, K_{2l+1} \in F[x, y, z, S, T, U])$ が存在して、 $K_0 = \sum_{i+j+k=q-2l-1} d_{ijk} A^i B^j C^k \neq 0$ と書け、 $d_{ijk} \in R_0$ は $\text{t.deg}_{\mathbb{Z}^3} d_{ijk} = l$ を充す斉次式であるとしてよい。

$$\begin{aligned} L_5 &= \sum_{i+j+k=q-2l-1} d_{ijk}(G, H, I) A^i B^j C^k \\ &= K_0 V^{2l} + \sum_{i=1}^{2l} K'_i V^{2l-i} \in \overline{S^{q-1}(M)} \end{aligned}$$

とし $(K'_i \in F[x, y, z, S, T, U])$ 、

$$\begin{aligned} L_6 &= (xV - yzS)L_5 \\ &= xK_0 V^{2l+1} + \sum_{i=1}^{2l} xK'_i V^{2l+1-i} - yzS \left(\sum_{i+j+k=q-2l-1} d_{ijk}(G, H, I) A^i B^j C^k \right) \in \overline{S^q(M)} \end{aligned}$$

とおく。さらに、

$$L_7 = xL_6 = xK_0 V^{2l+1} + \sum_{i=1}^{2l+1} xK_i V^{2l+1-i} \in \overline{S^q(M)}$$

とおく。このとき、

$$L_7 - L_6 = \sum_{i=1}^{2l+1} xK_i V^{2l+1-i} - \sum_{i=1}^{2l} xK'_i V^{2l+1-i} + yzS \left(\sum_{i+j+k=q-2l-1} d_{ijk}(G, H, I) A^i B^j C^k \right)$$

であり、この式の V に関する次数は $2l$ 以下である。

最初に $L_6 = L_7$ の場合を考える。このとき、 L_5 は、 x で割り切れることになる。このとき、 t が偶数のときと同様にして、

$$K_0 = x^\xi (mA^{i_0} B^{j_0} C^{k_0} + x(\dots))$$

の形としてよい。ただし、 $i_0 + j_0 + k_0 = q - 2l - 1$ であり、 $m = by^{m_1} z^{m_2}$ ($b \in F^\times$, $\xi + m_1 + m_2 = l$) とする。 G^ξ は x で割れないので、

$$bH^{m_1} I^{m_2} A^{i_0} B^{j_0} C^{k_0} + G(\dots)$$

が x で割れる。しかし、この式の V に関する定数項は $\text{mod}(x)$ で

$$b(yz^2 ST - y^3 SU)^{m_1} (-z^3 ST + y^2 z SU)^{m_2} (y^2 S)^{i_0} (z^2 S)^{j_0} (z^2 T - y^2 U)^{k_0}$$

であり、これは x で割れない。

次に、 $L_7 - L_6 \neq 0$ と仮定する。 $L_7 - L_6$ の V に関する次数を a_1 とする。ここで、 $0 \leq a_1 \leq 2l$ である。また、 $\text{t.deg}_{\mathbb{Z}^3}(L_7 - L_6) = 4q - l$ である。 $L_7 - L_6$ の V^{a_1} の係数は $S^{q-a_1}(N)$ の元であることと t の最小性より

$$4q - l \geq [(a_1 + 1)/2] + 4(q - a_1) + 3a_1$$

となり、これより $a_1 > 2l - 1$ であるから、 $a_1 = 2l$ でなければならない。

$$L_7 - L_6 = \sum_{i=0}^{2l} J_i V^{2l-i} \in \overline{S^q(M)}$$

とおく。ここで、 $J_i \in F[x, y, z, S, T, U]$ であり、 $J_0 \neq 0$ であるから、

$$J_0 = \sum_{i+j+k=q-2l} e_{ijk} A^i B^j C^k \in S^{q-2l}(N)$$

としてよい。ここで、 $e_{ijk} \in R_0$ で、 $\text{t.deg}_{\mathbb{Z}^3} e_{ijk} = l$ であることがわかる。さらに、

$$\begin{aligned} L_8 &= \sum_{i+j+k=q-2l} e_{ijk}(G, H, I) A^i B^j C^k \\ &= J_0 V^{2l} + (V \text{ に関して } 2l \text{ 次未満}) \in \overline{S^q(M)} \end{aligned}$$

とおく。 $L_7 - L_6 - L_8$ の V に関する次数は $2l$ 未満である。 $L_7 - L_6 - L_8 \neq 0$ と仮定して、 V に関する次数を a_2 とおけば、 $0 \leq a_2 < 2l$ であり、 t の最小性の仮定より、

$$4q - l \geq [(a_2 + 1)/2] + 4(q - a_2) + 3a_2$$

となり、 $a_2 > 2l - 1$ となってしまう。故に、 $L_7 - L_6 = L_8$ である。だから、

$$L_9 = yzS \left(\sum_{i+j+k=q-2l-1} d_{ijk}(G, H, I) A^i B^j C^k \right)$$

とおいたとき、 $L_8 - L_9$ は x で割り切れる。

t が偶数の場合の同様にして、

$$K_0 = x^\xi \left(mA^{i_0} B^{j_0} C^{k_0} + x(\cdots) \right)$$

の形としてよい。ただし、 $j_0 + j_0 + k_0 = q - 2l - 1$ であり、 $m = by^{m_1} z^{m_2}$ ($b \in F^\times$, $\xi + m_1 + m_2 = l$) とする。さらに、

$$J_0 = x^\zeta \left(nA^{i_1} B^{j_1} C^{k_1} + x(\cdots) \right)$$

の形としてよい。ただし、 $i_1 + j_1 + k_1 = q - 2l$ であり、 $n = cy^{n_1} z^{n_2}$ ($c \in F^\times$, $\zeta + n_1 + n_2 = l$) とする。

L_9 を V に関して整理する。 L_9 の中から、 x で割り切れないものが出てくる可能性があるのは、 $V^\xi, V^{\xi+1}, \dots, V^{2l-\xi}$ の係数である。ただし、 $\xi < l$ の場合は、 V^ξ と $V^{2l-\xi}$ の係数に、必ず x で割り切れないものが出てくる。

また、 L_8 を V に関して整理したとき、 L_8 の中から、 x で割り切れないものが出てくる可能性があるのは、 $V^\zeta, V^{\zeta+1}, \dots, V^{2l-\zeta}$ の係数である。ただし、 $\zeta < l$ の場合は、 V^ζ と $V^{2l-\zeta}$ の係数に、必ず x で割り切れないものが出てくる。

このことから、 $\xi = \zeta$ がわかる。

$\xi = l$ と $\xi < l$ の二つの場合に分けて考える。

$\xi = l$ のとき。このとき、 $K_0 = bx^l A^{i_0} B^{j_0} C^{k_0}$, $J_0 = cx^l A^{i_1} B^{j_1} C^{k_1}$ である。ここで、 $b, c \in F^\times$, $i_0 + j_0 + k_0 = q - 2l - 1$, $i_1 + j_1 + k_1 = q - 2l$ である。すると、

$$\begin{aligned} L_9 &= byzSG^l A^{i_0} B^{j_0} C^{k_0} \\ &\equiv byzS(-2yzSV)^l (y^2 S)^{i_0} (z^2 S)^{j_0} (z^2 T - y^2 U)^{k_0} \pmod{x} \\ L_8 &= cG^l A^{i_1} B^{j_1} C^{k_1} \\ &\equiv c(-2yzSV)^l (y^2 S)^{i_1} (z^2 S)^{j_1} (z^2 T - y^2 U)^{k_1} \pmod{x} \end{aligned}$$

となり、 $L_9 \not\equiv L_8 \pmod{x}$ であることがわかる。

$\xi < l$ のとき。 L_9 の $V^{2l-\xi}$ の係数は $\pmod{x}$ で、

$$(yzS)(-2yzS)^\xi by^{m_1} z^{m_2} (y^2 S)^{i_0} (z^2 S)^{j_0} (z^2 T - y^2 U)^{k_0}$$

であり、 L_8 の $V^{2l-\xi}$ の係数は $\pmod{x}$ で、

$$(-2yzS)^\xi cy^{n_1} z^{n_2} (y^2 S)^{i_1} (z^2 S)^{j_1} (z^2 T - y^2 U)^{k_1}$$

である。 L_9 の V^ξ の係数は $\pmod{x}$ で、

$$(yzS)(-2yzS)^\xi by^{m_1} (z^2 ST - y^2 SU)^{m_1} (-z)^{m_2} (z^2 ST - y^2 SU)^{m_2} (y^2 S)^{i_0} (z^2 S)^{j_0} (z^2 T - y^2 U)^{k_0}$$

であり、 L_8 の V^ξ の係数は $\pmod{x}$ で、

$$(-2yzS)^\xi cy^{n_1} (z^2 ST - y^2 SU)^{n_1} (-z)^{n_2} (z^2 ST - y^2 SU)^{n_2} (y^2 S)^{i_1} (z^2 S)^{j_1} (z^2 T - y^2 U)^{k_1}$$

である ($\text{ch}(F) \neq 2$ に注意)。これらより、 $k_0 = k_1$ がわかる。 $m_1 + m_2 = n_1 + n_2$ に注意して、整理すれば、

$$by^{1+m_1+2i_0} z^{1+m_2+2j_0} = cy^{n_1+2i_1} z^{n_2+2j_1}$$

と

$$(-1)^{m_2} b y^{1+m_1+2i_0} z^{1+m_2+2j_0} = (-1)^{n_2} c y^{n_1+2i_1} z^{n_2+2j_1}$$

を得る。しかし、 m_2 と n_2 の偶奇に注意すれば、矛盾がわかる。

証明終

命題 5.1 の証明に戻る。

$\overline{S(M)} \supseteq R_0[A, B, C, D, E, F, G, H, I]$ は、既に示した。逆を示す。

q, t を $q \geq t \geq 0$ を充す非負整数とする。このとき、 x, y, z の任意の $[(t+1)/2]$ 次の単項式 m と、 $i+j+k = q-t$ を充す整数 i, j, k に対して、 $R_0[A, B, C, D, E, F, G, H, I]$ に含まれる $\overline{S^q(M)}$ の元で、

$$mA^i B^j C^k V^t + (V \text{ に関して } t \text{ 次未満})$$

の形の元が存在することがわかる。このとき、補題 5.2 を用いれば、直ちに

$$\overline{S(M)} = R_0[A, B, C, D, E, F, G, H, I]$$

がわかる。

証明終

参考文献

- [1] W. BRUNS AND U. VETTER, *Determinantal rings*, Lect. Note in Math., vol. 1327, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1988.
- [2] R. COWSIK, Symbolic powers and the number of defining equations, *Algebra and its Applications*, Lect. Notes in Pure and Appl. Math., **91** (1985), 13–14.
- [3] S. D. CUTOKOSKY, Symbolic algebras of monomial primes, *J. Reine Angew. Math.*, **416** (1991), 71–89.
- [4] I. G. MACDONALD, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Clarendon press. Oxford, 1979.
- [5] M. NAGATA, *On the fourteenth problem of Hilbert*, Proc. Internat. Congress Math. (1958), Cambridge Univ. Press, 1960
- [6] P. ROBERTS, An infinitely generated symbolic blow-ups in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem, *J. Alg.*, **132** (1990), 461–473.

東京都立大学 理学部 数学教室

192-03 東京都八王子市南大沢 1-1