

複素解析的特異葉層構造

北大 教養 諏訪 立雄

葉層構造の特異点を調らば (generic な特異点を求め、
residue を求め、etc.) ために、その変形を考える。§1 で
は変形理論の outline を述べ、§2 では局所的葉層構造につ
いて考察する。

§1. 特異葉層構造の変形.

M を (連結) 複素多様体とし、 $\mathcal{O}_M, \Omega_M$ および $\mathcal{H}_M$ でそれぞれ
 M 上の正則関数、正則 1- 形式 および 正則 1- フォームの
芽の層を表わす。まず特異葉層構造を次のように定義する
([2], [3] 参照。ここでは用いる積分可能条件は [2] のより弱
い)。

(1.1) 定義. M 上の (特異) 葉層構造とは、 Ω_M の部分層 F で
次の条件 a), b), c) を満たすものとする：

a) F は連接.

$\Omega_F = \Omega_M / F$ とおき, $\omega \in F$ の葉に沿った正則 1-形式の葉の層という.

$$S = \{p \in M \mid \Omega_{F,p} \text{ は } \mathcal{O}_{M,p} \text{-自由加群でない}\}$$

とおく S は M の解析的集合となる. $\omega \in F$ の特異集合という.

b) F は積分可能, すなわち $d(F/M-S) \subset (\Omega_M \wedge F)|_{M-S}$.

従って F は $M-S$ 上に普通の意味の葉層構造を定義する. ω の余次元 $\dim F$ の余次元という.

c) F は full, すなわち, M の任意の開集合 U に対し,

$$\omega \in \Gamma(U-S, F) \text{ ならば } \omega \in \Gamma(U, F).$$

(ω は reduced variety の π を考えよことに注意する).

(1.2) 定義. M 上の葉層構造 F が Haefliger 型であるとは, M の各点の近傍で F の局所生成系として完全 1-形式がとれること.

M 上の葉層構造 F の annihilator $F^\perp \in$, 前層 $U \mapsto \{\gamma \in \Gamma(U, \oplus_M) \mid \forall \omega \in \Gamma(U, F), \omega(\gamma) = 0\}$ で定義される層とする. 明らかに $F^\perp \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_M}(\Omega_F, \mathcal{O}_M)$ である. $F^\perp$ の annihilator $(F^\perp)^\perp \in$ 同様に定義すると F が full であることから $(F^\perp)^\perp = F$ であることが分る.

(1.3) 定義. M 上の葉層構造 F の変形は次の I), II) よりなる:

I) M の変形 $\mathcal{M} \xrightarrow{\pi} T$ (点 $0 \in T$ に對し $\pi^{-1}(0) = M$ とし、 $\pi^*(0) = M$ とする).

II) $\mathcal{M}$ 上の葉層構造 $\mathcal{F}$ で次をみたすもの:

a) $\mathcal{M}$ の固有な解析的集合 $\mathcal{S}$ (一般に $\mathcal{F}$ の特異集合より大)

ii) が存在し,

$$\mathcal{F}^a / \mathcal{F}^a \cap \mathcal{H}_{\mathcal{M}/T} |_{\mathcal{M}-\mathcal{S}} = \pi^*(\mathcal{H}_T) |_{\mathcal{M}-\mathcal{S}}.$$

b) $\mathcal{F} |_{\mathcal{M}}$ (層の制限ではなく、形式の制限) $= F$.

正則写像による葉層構造のひきもと、versal 変形等の概念は普通に定義される。 $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ が (M, F) の変形の時、条件 a), b) を用いて次の完全可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \rightarrow & \pi^* \Omega_T \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{M}} & \rightarrow & \Omega_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{M}} & \rightarrow & \Omega_F \rightarrow 0 \\
 (1.4) & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \rightarrow & \pi^* \Omega_T \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{M}} & \rightarrow & \Omega_{\mathcal{M}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{M}} & \rightarrow & \Omega_M \rightarrow 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{M}} \cong F & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & (\otimes = \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}}})
 \end{array}$$

第一行より写像

$$(1.5) \quad \rho: \mathbb{T}_{T,0} \longrightarrow \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_M}^1(\Omega_F, \mathcal{O}_M)$$

を得る ($\mathbb{T}_{T,0}$ は T の 0 における正則接空間). これは無限小変形字像という. $\operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_M}^1(\Omega_F, \mathcal{O}_M)$ の元が abstract であるとは, その元が (M, F) の変形の無限小変形字像の像に属していることである. もし $\mathcal{O}_M$ -加群 Ω_F が局所自由分解を持てば (例えば, M が射影代数的, Stein etc.) 群 $\operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_M}^1(\Omega_F, \mathcal{O}_M)$ および字像 (1.5) は具体的に表わすことが出来る (表現は用いる局所自由分解にはよる). $F = (df_1, \dots, df_r)$ が局所的 Haefliger 葉層構造であるとせば, F の変形理論は関数系 $(f_1, \dots, f_r)$ の変形理論である. $f_1, \dots, f_r$ で生成される ideal で定義される variety の変形理論 (例えば [1][6][10][11] 等) と同値である. また $f: X \rightarrow Y$ が複素多様体の間の正則写像のとき, $F^a = \bigoplus_{X/Y}$ とすると F の変形理論は f の変形理論 ([5]) と同値である.

Ext のスプロット列から次の可換図式を得る:

$$(1.6) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^1(M, F^a) & \rightarrow & \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_M}^1(\Omega_F, \mathcal{O}_M) & \rightarrow & H^0(M, \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_M}^1(\Omega_F, \mathcal{O}_M)) \rightarrow H^2(M, F^a) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & H^1(M, \bigoplus_M) & \simeq & \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_M}^1(\Omega_M, \mathcal{O}_M) & & \end{array}$$

2行目は M のみの変形, $H^1(M, F^a)$ は F の "equisingular" な変形と表わしてよい.

§2. 局所的な特異葉層構造. $M = U \subset \mathbb{C}^n$ の原点 $0 \in U$ を中心とする多重円板とし, $F \subset U$ 上の余次元 g の葉層構造とす.

さらに F は完全交叉型とす, すなわち F は g 個の 1-形式 $\omega_1, \dots, \omega_g$ で生成され generic 点 $z \in U$ で $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_g(z) \neq 0$ とす. F の特異集合 S は $S = \{z \in U \mid \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_g(z) = 0\}$ と書ける. (1.1) b) の条件は

$$(2.1) \quad d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_g = 0, \quad i=1, \dots, g$$

と書け, さらに (1.1) c) より $\text{codim } S \geq 2$ であることが分る. (1.6) により F の変形を調べるには, 層 $\text{Ext}_{\mathcal{O}_M}^1(\Omega_F, \mathcal{O}_M)$ を調べるのがよい. この層は次のように表わせる.

$$(2.2) \quad \begin{array}{ccccc} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_M}(\Omega_M, \mathcal{O}_M) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_M}(F, \mathcal{O}_M) & \rightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{O}_M}^1(\Omega_F, \mathcal{O}_M) \rightarrow 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & \mathcal{H}_M & & \mathcal{Q}_M^g & \end{array}$$

関数系 $(h_1, \dots, h_g) \in \mathcal{Q}_M^g$ の $\text{Ext}_{\mathcal{O}_M}^1(\Omega_F, \mathcal{O}_M)$ の中での像を $[h_1, \dots, h_g]$ で表わす.

そこで, 次の Malgrange - Moussu の定理を引用しておく.

(2.3) 定理 [4][7][8][9]. $\text{codim } S \geq g$ ならば F は Haefliger 型.

この定理の証明は変形理論の立場から次のように解釈できる. すなわち, $\text{codim } S \geq g$ ならば g -個の parameter $(t_1, \dots, t_g)$ によらず F の変形子で, $\rho(\frac{\partial}{\partial t_i})(\omega_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq g$,

となるものを作れる。予は非特異葉層構造だから Frobenius の定理により Haefliger 型, 従ってその制限である F もそうである。

(2.3) により, $\text{codim } \mathcal{F} = 2$ が最も興味ある場合である。一般に F の一次無限小変形 (の同型類) 全体が, どのような集合で表わされるかを考える。まず

$$(2.4) \quad \tau \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_g = 0$$

をみたす $\mathbb{C}^n$ の原点 o の近傍で定義された正則 2-形式 τ に対し, $H^1(U-\mathcal{F}, \mathcal{O}_U^{\otimes 2}) \simeq H^2(U, \mathcal{O}_U^{\otimes 2})$ の cohomology 類 $[\tau]$ を次のようにして作る。 $U-\mathcal{F}$ の多重円板 U_λ による開被覆 $\{U_\lambda\}$ をとると (2.4) より, 各 U_λ 上で $\tau = \sum_{i=1}^g \tau_i^\lambda \wedge \omega_i$ と書ける, ただし $\tau_i^\lambda, i=1, \dots, g$, は U_λ 上の正則 1-形式である。従って $U_\lambda \cap U_\mu$ 上で

$$(2.5) \quad \tau_i^\lambda - \tau_i^\mu = \sum_{j=1}^g \psi_{ij}^{\lambda\mu} \omega_j, \quad \psi_{ij}^{\lambda\mu} = \psi_{ji}^{\mu\lambda}$$

と書ける, ただし $\psi_{ij}^{\lambda\mu}$ は $U_\lambda \cap U_\mu$ 上の正則関数で cocycle 条件をみたす。 $\Psi = \{\Psi^{\lambda\mu}\}$, $\Psi^{\lambda\mu} = \{\psi_{ij}^{\lambda\mu}\}$ とおけば, Ψ の定め $H^1(U-\mathcal{F}, \mathcal{O}_U^{\otimes 2}) \simeq H^2(U, \mathcal{O}_U^{\otimes 2})$ の cohomology 類は γ, ψ のとりかたによる II ことが示せる。これを $[\tau]$ と書くことにする。

(2.6) 定理. F の一次無限小変形と同型類全体

$$\sim \left\{ [h] = [h_1, \dots, h_g] \in \text{Ext}_{\mathcal{O}_n}^1(\mathcal{Q}_F, \mathcal{O}_n) \mid \begin{pmatrix} [h][dw_1] \\ \vdots \\ [h][dw_g] \end{pmatrix} = 0 \text{ in } H_S^2(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{g^2}) \right\}.$$

(2.7) 例. $n=2$, $g=1$, $F=\{\omega\}$, $\omega = z_2^p dz_1 - z_1^p dz_2$,
 p, q は自然数. このときは各一次無限小変形が変形であるよ
うに選ぶ, 次の $(p-1)(q-1)$ 個の parameter $\{t_{rs}\}$, $1 \leq r \leq p-1$,
 $1 \leq s \leq q-1$, を含む versal 変形 $\tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}\}$ を得る:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} = & (z_2^q - \sum_{r,s} (p-r) z_1^{r-1} z_2^s t_{rs}) dz_1 - (z_1^p + \sum_{r,s} (q-s) z_1^r z_2^{s-1} t_{rs}) dz_2 \\ & + \sum_{r,s} z_1^r z_2^s dt_{rs}. \end{aligned}$$

References

- [1] M. Artin, Deformations of Singularities, Tata Institute, Bombay, 1976.
- [2] P. Baum, Structure of foliation singularities, Advances in Math. 15, 361-374 (1975).
- [3] P. Baum and R. Bott, Singularities of holomorphic foliations, J. Diff. Geom. 7, 279-342 (1972).
- [4] S. Guelorget et R. Moussu, Le théorème de Frobenius pour un pli intégrable, C. R. Acad. Sc. Paris, 282, 455-458 (1976).
- [5] E. Horikawa, On deformations of holomorphic maps I, II, J. Math. Soc. Japan, 25, 372-396 (1973), 26, 647-667 (1974).
- [6] A. Kas and M. Schlessinger, On the versal deformation of a complex space with an isolated singularity, Math. Ann. 196, 23-29 (1972).
- [7] B. Malgrange, Frobenius avec singularités, 1, Publ. I.H.E.S. 46 (1976).
- [8] B. Malgrange, Frobenius avec singularités, 2, Invent. Math. 39, 67-89 (1977).
- [9] R. Moussu, Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de Pfaff, Ann. Inst. Fourier, 26, 171-220 (1976).
- [10] M. Schlessinger, On rigid singularities, Rice Univ. Studies, 59, 147-162 (1973).
- [11] G.N. Tjurina, Locally semiuniversal flat deformations of isolated singularities of complex spaces, Izv. Akad. Nauk SSSR, 33, 967-999 (1970).