

Fuchsian systems with discrete monodromy groups

神戸大 理 吉田正章
三木高校 服部修三

序 先づはじめに $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ をモノドロミー群にもつ微分方程式を求める手続を復習しよう。

(0°) Γ は $i, \rho = e^{\frac{2\pi i}{6}} \in H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ を各々位数 2, 3 のた円点, ∞ 点を旗物点としている。

(1°) $\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(z_0) = z_0\}$ とすると, $\Gamma_i = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$, $\Gamma_\rho = \langle \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$, $\Gamma_\infty = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ となっている。

(2°) H/Γ_i , H/Γ_ρ , $H/\Gamma_\infty \cup \{\infty\}$ は nonsingular で local parameter は, 各々 $((z-i)/(z+i))^2$, $((z-\rho)/(z-\bar{\rho}))^3$, $\log_\lambda z$ である。

(3°) シュワルツ微分 ($\mathrm{PL}(2, \mathbb{C})$ -invariant)

$$\Delta\left(\frac{z}{x}\right) = \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2} \left(\frac{z''}{z'}\right)^2$$

において, $z(x)$ が, $x=x_0$ で l 重 ($l=1, 2, \dots, \infty$) に分岐しておれば,

$$\Delta\left(\frac{z}{x}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{l^2}\right) \frac{1}{(x-x_0)^2} + \frac{\delta_1}{x-x_0} + \dots$$

$$(4^\circ) \quad \begin{array}{ccc} H \cup \{\infty\} & \longrightarrow & H/\Gamma \cup \{\infty\} \cong \mathbb{P}^1 \\ z & \longmapsto & x \end{array}$$

を $z(\infty)=0$, $z(i)=1$, $z(p)=\infty$ として定めて, (3°) を使うと,

$$\Delta\left(\frac{z}{x}\right) = p(x) = \frac{1}{2x^2(x-1)^2} \left\{ 1 + \left\{ \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) - 1 - \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \right\} x + \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) x^2 \right\}$$

となる。故に,

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} + \frac{1}{2} p(x) \xi = 0$$

なる $\mathbb{P}^1$ 上の Fuchs 型微分方程式のモノドロミー群は, Γ と conjugate である。

我々は, 放物点に関する局所的な事実 $(1^\circ), (2^\circ), (3^\circ)$ を 2 変数に拡張する。た円点ではもっとやさしいだろうからである。

$$\text{即 } H \text{ の代りに } D = \{(z, u) \in \mathbb{C}^2 \mid \ln t - |u|^2 > 0\} \subset \mathbb{P}^2 \\ \cong \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$$

を採り, (i) $\text{Aut}(D)$ の ∞ での isotropysubgroup の discrete subgroups (それと Γ と書く) をすべて求める。一変数の場合と違って, conjugate をのぞいてもたくさんある。

(ii) $D/\Gamma \cup \{\infty\}$ を調べる。一変数と異って, 多く場合 nonsingular にはならない。nonsingular になる Γ をすべて決定して, ∞ 点での local ring を (z, u) に関するよく知られた (v) の函数で書く。

(iii) シェワルツ微分 ~~微分~~ (織田代によって formulate された $PL(3, \mathbb{C})$ -invariant なもの) をほどこして $\Gamma (D/\Gamma \cup \{\infty\})$

nonsingular なるもの) をモノドロミ一群にもつ微分方程式を作る。方程式の singularity は, もちろん点でなく, Γ によって様々な variety になる。

§ 1. ∞ 点を P と書く。 P をリーマン計量の意味で fix する元全体のなす $\text{Aut}(D)$ の subgroup G は以下の様に書ける。

$$G = \left\{ [\mu, a, r] = \begin{pmatrix} 1 & 2i\mu\bar{a} & r+i|a|^2 \\ 0 & \mu & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \mu, a \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}, |\mu|=1 \right\}$$

また $G_1 = \{ [a, r] = [1, a, r] \in G \}$ とする。

定義 $\Gamma \subset G$ が locally volume finite (l.v.f) とは,

$\{(z, u) \in \mathbb{C}^2 \mid \ln z - |u|^2 > N\} / \Gamma$ が volume finite なること。

Prop. (Hemperly) l.v.f. discrete subgroup Γ of G_1 に対して, lattice L と, 正数 $q = \min_{(0, r) \in \Gamma} |r|$ と $r(\cdot): L \rightarrow \mathbb{R}/q\mathbb{Z}$ なる map があって, $[a, r] \in \Gamma \Leftrightarrow a \in L, r \equiv r(a) \pmod{q}$.

このとき, Γ は, $L, q, r(\cdot)$ で決ると言おう。

Prop. (Hemperly) $L, q, r(\cdot)$ で決っている Γ に対して,

$D/\Gamma \cup \{P\}$ の nonsingular model は $D/\Gamma \cup E$ となる。ここで:

$E \cong \mathbb{C}/L$ なる円曲線。

注意 $L = \mathbb{Z}\eta_1 + \mathbb{Z}\eta_2$ ($\text{Im}\bar{\eta}_1\eta_2 > 0$) とすると。

$$p = \frac{4\text{Im}\bar{\eta}_1\eta_2}{q} \in \mathbb{Z}^+$$

また $r(\cdot)$ は, $r(\eta_1), r(\eta_2)$ で決る。

Prop. $E^2 = -p$.

定理 l.v.f. discrete subgroup Γ of G であり、 G_1 に含まれて
ないものは、以下のうちの1つに conjugate.

$$\text{Type II} \quad \sum_{r=1}^2 \Gamma_1[-1, 0, r]^\vee \quad r = 0, \frac{\delta}{2},$$

ここで、 Γ_1 は、 $L = \mathbb{Z} + \epsilon \mathbb{Z}$, $\delta = \frac{4 \ln \epsilon}{p}$, $r(1), r(\epsilon) = 0, \frac{\delta}{2}$ で決る.

$$\text{Type IV} \quad \sum_{r=1}^4 \Gamma_1[i, 0, r]^\vee \quad r = 0, \frac{\delta}{4}, \frac{2}{4}\delta, \frac{3}{4}\delta,$$

ここで、 Γ_1 は $L = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$, $\delta = \frac{4}{p}$, $r(1) = r(i) = 0, \frac{\delta}{2}$ で決る.

$$\text{Type VI} \quad \sum_{r=1}^6 \Gamma_1[\zeta, 0, r]^\vee, \quad r = 0, \frac{1}{6}\delta, \dots, \frac{5}{6}\delta,$$

ここで、 Γ_1 は $L = \mathbb{Z} + \zeta \mathbb{Z}$ ($\zeta = e^{\frac{2\pi i}{6}}$), $\delta = \frac{2\sqrt{3}}{p}$, $r(1) = r(\zeta) = \sqrt{3}$ で決る.

$$\text{Type III} \quad \sum_{r=1}^3 \Gamma_1[\zeta^2, 0, r]^\vee \quad r = 0, \frac{\delta}{3}, \frac{2}{3}\delta,$$

この Γ_1 は Type IV と同じ.

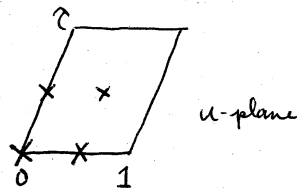
注意 Type II の群は連続なパラメタ $\epsilon \in \mathbb{H}$ が入っているが、それ以外は、パラメタは入っていない。

§ 2. 上で述べた Γ について、 $D/\Gamma \backslash \{P\}$ の nonsingular model を作り、 $D/\Gamma \backslash \{P\}$ 自身 nonsingular なものをえらび、その Γ を monodromy 群にする微分方程式を書く。ここでは、Type II のものを調べよう。

定理 Type II の群 Γ で、 $D/\Gamma \backslash \{P\}$ が nonsingular なるものは、以下の2つで、共に位数2の unitary reflection で生成されている。

$$\Gamma_\epsilon(1) = \langle h(-1, 0), h(-1, \frac{1}{2}), h(-1, \frac{\epsilon}{2}) \rangle,$$

$$\Gamma_\epsilon(2) = \langle \Gamma_\epsilon(1), h(-1, \frac{1+\epsilon}{2}) \rangle.$$

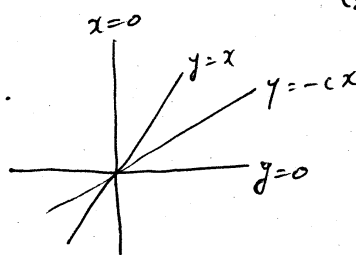
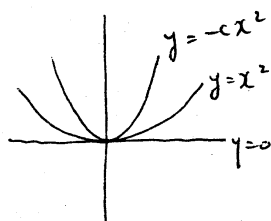


ここで: $h(\mu, u_0) = [\mu, u_0(1-\mu), (u_0)^2 2\ln \mu]$.

定理

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{\alpha} p_{ij}^{\alpha}(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial x_{\alpha}} + p_{ij}^0 \xi \quad \begin{matrix} i, j = 1, 2 \\ x_1 = x, x_2 = y \end{matrix}$$

の型の、 $\mathbb{C}^2$ で定義された、完全積分可能な方程式 $(E_{\Gamma(1)})$, $(E_{\Gamma(2)})$ があって、その singularity は各々 $\{y=0\} \cup \{y=x^2\} \cup \{y=-cx\}$, $\{y=0\} \cup \{y=x\} \cup \{y=-cx\} \cup \{x=0\}$ であり、その monodromy 群は、各々 $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$ なるものがある。(係数はめんどう故省略させていただきます) ここで: $c = \frac{e_1 - e_2}{e_2 - e_3}$, $e_j = \beta(\tau, \omega_j)$.



Type II 以外のすべての subgroup Γ についても同様の定理があるが、省略します

—終—