

カオスのパラドックス
 — 低次元カオスにおける可逆性と不可逆性 —
 九大理 秦 浩起 堀田武彦 小林達治 大内克哉 森 肇

ハミルトン系は一般に時間反転対称性をもち、どちらの運動も同等に実現する。このため、統計量は時間反転に対して不変となる。ところが、軌道不安定性の存在する場合、時間反転対称性の破れが観測される。この時間反転対称性に関わらずカオスの場合に生じる不可逆性というパラドックスの起源を明らかにする事を目的としている。

この不可逆性を端的に示す量は、局所拡大率

$$\Lambda_n(X_0) \equiv (1/n) \log |DF^n(X_0) \cdot U_1(X_0)|$$

(ただし、 DF^n : n 回のヤコビ行列、 $U_1(X_0)$: 不安定方向の単位ベクトル) が Λ をもつ確率 $P(\Lambda; n)$ の指数的減衰率 $\psi(\Lambda)$ である。 Λ は時間反転に対して符号を変化させるが、 $\psi(\Lambda)$ は liapunov 指数 $\Lambda^\infty (> 0)$ で $\psi(\Lambda^\infty) = 0$ となり、 Λ に関して対称性をもっていない。

例えば、標準写像

$$\begin{bmatrix} \theta_{i+1} \\ J_{i+1} \end{bmatrix} = F(X) \begin{bmatrix} \theta_i + J_{i+1}, \pmod{1} \\ J_i - (K/2\pi) \sin(2\pi\theta_i) \end{bmatrix}$$

も、 $X = (\theta, J) \rightarrow \bar{X} = (-\bar{\theta} + \bar{J}, \bar{J})$ の変換を行うと、 $X_{i+1} = F(X_i)$ は逆写像 $F^{-1}(X)$

$$\begin{bmatrix} \theta_i \\ J_i \end{bmatrix} = F^{-1}(X_{i+1}) = \begin{bmatrix} \theta_{i+1} + 1 - J_{i+1}, \pmod{1} \\ J_{i+1} + (K/2\pi) \sin(2\pi\theta_{i+1}) \end{bmatrix},$$

により、 $\bar{X}_{i+1} = F^{-1}(\bar{X}_i)$ に移る。即ち、標準写像は時間反転対称性をもつ。ところが、図1に示すように、 $\psi(\Lambda)$ は非対称になっている。

この原因は以下のように解釈できる。時間反転対称性により、時間の順方向、逆方向に対応する軌道は位相平均をとるときに全て入ってくる。ところが、軌道不安定性により、逆方向に対応する軌道は軌道の安定方向に接しようとするが、その方向からのほんの僅かなズレも拡大して、結局、順方向と同じ不安定方向に接する。そのため、初期の遷移部分を除くと、逆方向のほとんど全ても軌道拡大率に正の寄与しか与えない。このため、時間反転対称性が破れ、不可逆性が現れる。

$$K = 10.053$$

$$N = 10^6$$

$$n = 100(\times),$$

$$500(\Delta),$$

$$1000(\circ)$$

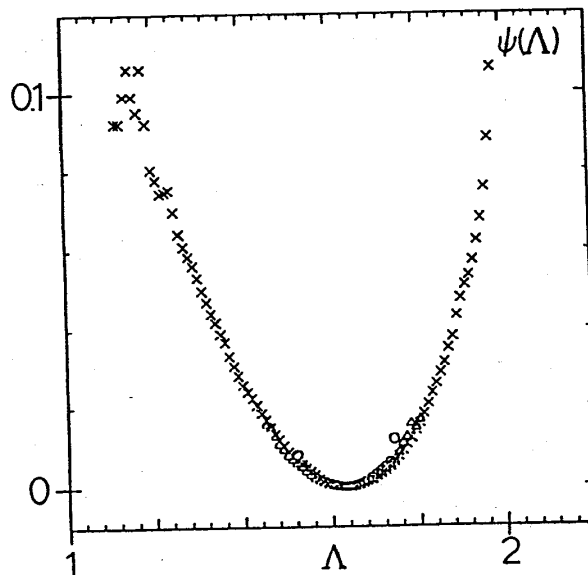


図1