

強擬凸領域上の Cauchy-Riemann の 微分方程式

茨城大学 理学部 安達 謙三

3.1. 序

1959 年に Leray は凸領域に対する Cauchy-Gruntz 公式の公式が成立することを証明したが、一方 1964 年に Aizenberg は一般の領域に対して Cauchy-Gruntz 公式が成立することを証明した。1967 年に Koppelman は行列式の理論を駆使して、Aizenberg と別の方法でこの公式を証明したが、証明は全く省いてゐる。1970 年に Lieb は Koppelman の論文に完全な証明を加えると共に、1970 年に Ramirez と Henkin が証明した強擬凸領域に対しては Cauchy-Gruntz 公式は正則な核をもつということを利用して、 $\bar{\partial}$ -Neumann 問題の解の評価と有界な正則函数の芽の層に対するコホモロジーの消滅定理を得てゐる。すなわち f を $\mathbb{C}^n$ の領域 G 上の函数とするとき

$$\|f\|_G = \sup_{x \in G} |f(x)| \text{ と定義する。}$$

2

α を $\alpha_{i_1 \dots i_p}$ を係数とする G 上の $(0, p)$ 形式 とするとき

$$|\alpha| = \max_{i_1 \dots i_p} |\alpha_{i_1 \dots i_p}|_G \quad \text{と定義する。}$$

このとき

定理 G を C^p 級の境界をもつ強擬凸領域とする。すると次の性質をもつ定数 K が存在する。 β を G 上の閉 $C^\infty(0, p+1)$ 形式とすると G 上の $C^\infty(0, p)$ 形式 α が存在して

$$\bar{\partial}\alpha = \beta, \quad |\alpha| \leq K|\beta| \quad \text{となる。}$$

この定理から次の定理が導かれる。

定理 $\mathcal{H}$ を G 上の有界な正則関数の芽の層とすると $p \geq 1$ に対して $H^p(\bar{G}, \mathcal{H}) = 0$ となる。

§2 Cauchy-Fantappiè の積分公式

1. W を $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n = \{(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) : x \in \mathbb{C}^n, y \in \mathbb{C}^n\}$

の開集合とする。 W 上の重微分形式 α は

$$\alpha = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_p \\ j_1 < \dots < j_p \\ k_1 < \dots < k_r \\ l_1 < \dots < l_s}} \alpha_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p k_1 \dots k_r l_1 \dots l_s}(x, y) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ \wedge d\bar{x}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{x}_{j_p} \cdot dy_{k_1} \wedge \dots \wedge dy_{k_r} \wedge d\bar{y}_{l_1} \wedge \dots \wedge d\bar{y}_{l_s}$$

と表わされる。または簡単に

$$\alpha = \sum_{I, J, K, L} \alpha_{I, J, K, L}(x, y) dx_I \wedge d\bar{x}_J \cdot dy_K \wedge d\bar{y}_L$$

と書く。 $\alpha_{I, J, K, L}$ は W 上の函数である。このとき α の

型は $(p, q; r, s)$ であるという。

$\deg_x \alpha = p+q$, $\deg_y \alpha = r+s$, $\deg \alpha = p+q+r+s$ とおく。

$d_x \alpha = \sum d_x \alpha_{i,j,k,l} \wedge dx_i \wedge d\bar{x}_j \wedge dy_k \wedge d\bar{y}_l$ と定義する。

$\alpha^\nu = \begin{pmatrix} \alpha_\nu^1 \\ \vdots \\ \alpha_\nu^n \end{pmatrix}$ $\alpha_\nu^j (j=1,2,\dots,n)$ はすべて同じ型の重微分形式とする。

定義 1

$\bar{\partial}_x \alpha^\nu = \begin{pmatrix} \bar{\partial}_x \alpha_\nu^1 \\ \vdots \\ \bar{\partial}_x \alpha_\nu^n \end{pmatrix}$ と定義する。

定義 2 S_n を $(1,2,\dots,n)$ の置換全体とする。 ε_σ を置換 σ の符号とする。

$D(\alpha^1, \dots, \alpha^n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \alpha_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge \alpha_n^{\sigma_n}$ と定義する。

$D_{k_1, \dots, k_r}(\alpha^1, \dots, \alpha^n) = D(\underbrace{\alpha^1, \dots, \alpha^{k_1}}_{k_1}, \dots, \underbrace{\alpha^{k_r}, \dots, \alpha^n}_{k_r})$
 $k_1 + \dots + k_r = n$ と書く。

これらの定義から以下の補助定理が容易に得られる。

補助定理 1

$$D(\alpha^1, \dots, \alpha^n) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \pm \prod_{\nu=1}^n \left(\sum_{u=1}^n \alpha_\nu^u \wedge dx_u \right)$$

補助定理 2

$$D(\alpha^1, \dots, \alpha^\nu, \alpha^{\nu+1}, \dots, \alpha^n) = \begin{cases} -D(\alpha^1, \dots, \alpha^{\nu+1}, \alpha^\nu, \dots, \alpha^n) \\ +D(\alpha^1, \dots, \alpha^{\nu+1}, \alpha^\nu, \dots, \alpha^n) \end{cases}$$

α^ν と $\alpha^{\nu+1}$ が交換可能かそうでないかに従って成立する。

補助定理 3.

$$\bar{\partial}_x D(\alpha^1, \dots, \alpha^n) = D(\bar{\partial}_x \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n) + (-1)^{\deg_x \alpha^1} D(\alpha^1, \bar{\partial}_x \alpha^2, \dots, \alpha^n) \\ + \dots + (-1)^{\deg_x \alpha^1 + \dots + \deg_x \alpha^{n-1}} D(\alpha^1, \dots, \alpha^{n-1}, \bar{\partial}_x \alpha^n)$$

2. $f_v^\mu(x, y) \in C^2(W)$ とする。
($v, \mu = 1, 2, \dots, n$)

$f_v^*(x, y) = (f_v^1(x, y), \dots, f_v^n(x, y)) \in \mathbb{C}^n$ とおく。

$f_v(x, y) = \sum_{\mu=1}^n f_v^\mu(x, y)(x_\mu - y_\mu)$ とおく。

f_v は W 上に零点をもたないとは定する。

定義 3. $1 \leq j \leq n$ なる自然数 j に対して

$$D_j(f^*) = D\left(\frac{f_1^*}{f_1}, \bar{\partial}_y\left(\frac{f_2^*}{f_2}\right), \dots, \bar{\partial}_y\left(\frac{f_j^*}{f_j}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{f_{j+1}^*}{f_{j+1}}\right), \dots, \bar{\partial}_x\left(\frac{f_n^*}{f_n}\right)\right)$$

を Cauchy-Riantapic の微分形式という。

定理 1 $D_j(f^*)$ は f_1^* に独立である。

証明 $g_v(x, y) = x_v - y_v$ とおく。すると

$$f_v = \sum_{\mu=1}^n f_v^\mu g_\mu, \quad \bar{\partial}_y f_v = \sum_{\mu=1}^n (\bar{\partial}_y f_v^\mu) g_\mu, \quad \bar{\partial}_x f_v = \sum_{\mu=1}^n (\bar{\partial}_x f_v^\mu) g_\mu$$

$$D_j(f^*) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \frac{f_1^{\sigma_1}}{f_1} \wedge \frac{\bar{\partial}_y(f_2^{\sigma_2}) f_2 - f_2^{\sigma_2} \bar{\partial}_y(f_2)}{(f_2)^2} \wedge \dots \wedge \frac{\bar{\partial}_x(f_n^{\sigma_n}) f_n - f_n^{\sigma_n} \bar{\partial}_x f_n}{(f_n)^2}$$

に代入して

$$D_j(f^*) = \frac{1}{f_1(f_2)^2 \dots (f_n)^2} \sum_{\substack{\sigma_1 \dots \sigma_n \\ z_2 \dots z_n}} \varepsilon_\sigma f_1^{\sigma_1} g_{z_2} \dots g_{z_n} (f_2^{\sigma_2} \bar{\partial}_y(f_2^{z_2}) - f_2^{\sigma_2} \bar{\partial}_y(f_2^{z_2})) \\ \wedge \dots \wedge (f_n^{\sigma_n} \bar{\partial}_x f_n^{z_n} - f_n^{\sigma_n} \bar{\partial}_x f_n^{z_n})$$

となる。上の式で

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 \quad \Sigma_1 = z_2, \dots, z_n \text{ の少くとも } -, \text{ が } \sigma_1 \text{ と}$$

なるもの, と分解する。

補助定理 4 $\Sigma_2 = 0$

証明 $f_\nu^{\tau_\nu} \bar{\partial}_y f_\nu^{\sigma_\nu} - f_\nu^{\sigma_\nu} \bar{\partial}_y f_\nu^{\tau_\nu} = A_\nu^{\sigma_\nu \tau_\nu}$
 $f_\nu^{\tau_\nu} \bar{\partial}_x f_\nu^{\sigma_\nu} - f_\nu^{\sigma_\nu} \bar{\partial}_x f_\nu^{\tau_\nu} = A_\nu^{\sigma_\nu \tau_\nu}$ とおく。

すると $A_\nu^{\sigma_\nu \tau_\nu} = -A_\nu^{\tau_\nu \sigma_\nu}$ である。

定義より $\Sigma_2 = \sum_{\sigma_1} \varepsilon_{\sigma_1} f_1^{\sigma_1} \sum_{\substack{\sigma_2 \dots \sigma_n \\ \tau_2 \dots \tau_n}} g_{\tau_2} \dots g_{\tau_n} A_2^{\sigma_2 \tau_2} \dots A_n^{\sigma_n \tau_n}$
 どの τ_ν も σ_1 に等しくない。と表わせる。

$\varepsilon_{\sigma_1 \dots \sigma_n} = \pm \varepsilon_{\sigma_2 \dots \sigma_n}$ であるから

$$\Sigma_2 = \sum_{\sigma_1} \varepsilon_{\sigma_1} f_1^{\sigma_1} \sum_{\sigma_2 \dots \sigma_n} \varepsilon_{\sigma_2 \dots \sigma_n} g_{\tau_2} \dots g_{\tau_n} A_2^{\sigma_2 \tau_2} \dots A_n^{\sigma_n \tau_n}$$

と書ける。 $\varepsilon_{\sigma_1} f_1^{\sigma_1}$ の係数は 0 になる

$\sigma_1 = 1$ と仮定してよい。

補助定理 5

$$\sum_{\sigma_1, \tau_1=1}^n \varepsilon_{\sigma_1 \dots \sigma_n} g_{\tau_1} \dots g_{\tau_n} A_1^{\sigma_1 \tau_1} \dots A_n^{\sigma_n \tau_n} = 0$$

証明 $A_1^{\sigma_1 \tau_1} \dots A_n^{\sigma_n \tau_n}$ のすべての係数は

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{\sigma_1 \dots \sigma_n} g_{\tau_1} \dots g_{\tau_n} - \sum_{\nu=1}^n \varepsilon_{\sigma_1 \dots \tau_\nu \dots \sigma_n} g_{\tau_1} \dots g_{\sigma_\nu} \dots g_{\tau_n} \\ & + \sum_{1 \leq \nu_1 < \nu_2 \leq n} \varepsilon_{\sigma_1 \dots \tau_{\nu_1} \dots \tau_{\nu_2} \dots \sigma_n} g_{\tau_2} \dots g_{\sigma_{\nu_1}} \dots g_{\sigma_{\nu_2}} \dots g_{\tau_n} + \dots \\ & + (-1)^n \varepsilon_{\tau_1 \dots \tau_n} g_{\sigma_1} \dots g_{\sigma_n} \Big) = S_{\sigma_1 \dots \sigma_n, \tau_1 \dots \tau_n} \end{aligned}$$

となる。故に $S_{\sigma_1 \dots \sigma_n, \tau_1 \dots \tau_n} = 0$ と示せばよい。

補助定理 6

$$S_{\sigma_1 \dots \sigma_n, \tau_1 \dots \tau_n} = 0$$

証明 σ 恒等置換と仮定する。 $S_{\sigma_1 \dots \sigma_n, \tau_1 \dots \tau_n} = S_{\tau_1 \dots \tau_n}$ と表わ

す。 $S_{1, 2, \dots, n} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \sum_{1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_j \leq n} \varepsilon_{1 \dots \nu_1 \dots \nu_j \dots n} g_1 \dots g_{\nu_1} \dots g_{\nu_j} \dots g_n$

6

$$= g_1 \cdots g_n \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} = (1-1)^n = 0$$

$\tau_v = v$, $v \leq k$ なる $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ に対してすでに証明されたことを仮定する。任意の $p \in N^n$, $p_v = v$, $v \leq k-1$ に対して示す。

$$\tau_v = p_v, \quad v \neq k, \quad \tau_k = k \quad \text{とする。}$$

$$\begin{aligned} S_{p_1 \cdots p_n} &= \varepsilon_{1 \cdots n} g_{\tau_1} \cdots g_{\tau_n} \frac{g_{p_k}}{g_{\tau_k}} \\ &- \left\{ \left(\sum_v \varepsilon_{1 \cdots \tau_v \cdots n} g_{\tau_1} \cdots g_{\tau_v} \cdots g_{\tau_n} - \varepsilon_{1 \cdots k \cdots n} g_{\tau_1} \cdots g_{\tau_k} \cdots g_{\tau_n} \right) \frac{g_{p_k}}{g_{\tau_k}} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{1 \cdots p_k \cdots n} g_{p_1} \cdots g_{p_k} \cdots g_{p_n} \right\} \\ &+ \left\{ \left(\sum_{v_1 < v_2} \varepsilon_{1 \cdots \tau_{v_1} \cdots \tau_{v_2} \cdots n} g_{\tau_1} \cdots g_{\tau_{v_1}} \cdots g_{\tau_{v_2}} \cdots g_{\tau_n} \right. \right. \\ &\quad - \sum_{1 \leq v_1 < k} \varepsilon_{1 \cdots \tau_{v_1} \cdots k \cdots n} g_{\tau_1} \cdots g_{\tau_{v_1}} \cdots g_{\tau_k} \cdots g_{\tau_n} \\ &\quad \left. - \sum_{k < v_1 \leq n} \varepsilon_{1 \cdots k \cdots \tau_{v_1} \cdots n} g_{\tau_1} \cdots g_{\tau_k} \cdots g_{\tau_{v_1}} \cdots g_{\tau_n} \right) \frac{g_{p_k}}{g_{\tau_k}} \\ &\quad + \sum_{1 \leq v_1 < k} \varepsilon_{1 \cdots p_{v_1} \cdots p_k \cdots n} g_{p_1} \cdots g_{p_{v_1}} \cdots g_{p_k} \cdots g_{p_n} \\ &\quad \left. + \sum_{k < v_1 \leq n} \varepsilon_{1 \cdots p_k \cdots p_{v_1} \cdots n} g_{p_1} \cdots g_{p_k} \cdots g_{p_{v_1}} \cdots g_{p_n} \right\} \\ &+ \cdots \\ &+ (-1)^j \left\{ \left(\sum_{v_1 < \cdots < v_j} \varepsilon_{1 \cdots \tau_{v_1} \cdots \tau_{v_j} \cdots n} g_{\tau_1} \cdots g_{\tau_{v_1}} \cdots g_{\tau_{v_j}} \cdots g_{\tau_n} \right. \right. \\ &\quad - \sum_{1 \leq v_1 < \cdots < v_{j-1} < k} \varepsilon_{1 \cdots \tau_{v_1} \cdots \tau_{v_{j-1}} \cdots k \cdots n} g_{\tau_1} \cdots g_{\tau_{v_1}} \cdots g_{\tau_{v_{j-1}}} \cdots g_{\tau_k} \cdots g_{\tau_n} \\ &\quad - \sum_{\substack{1 \leq v_1 < \cdots < v_{j-2} < k \\ v_j > k}} \varepsilon_{1 \cdots \tau_{v_1} \cdots \tau_{v_{j-2}} \cdots k \cdots \tau_{v_j} \cdots n} g_{\tau_1} \cdots g_{\tau_{v_1}} \cdots g_{\tau_{v_{j-2}}} \cdots g_{\tau_k} \cdots g_{\tau_{v_j}} \cdots g_{\tau_n} \left. \right) \frac{g_{p_k}}{g_{\tau_k}} \\ &\quad + \sum_{1 \leq v_1 < \cdots < v_{j-1} < k} \varepsilon_{1 \cdots p_{v_1} \cdots p_{v_{j-1}} \cdots p_k \cdots n} g_{p_1} \cdots g_{p_{v_1}} \cdots g_{p_{v_{j-1}}} \cdots g_{p_k} \cdots g_{p_n} \\ &\quad \left. + \sum_{1 \leq v_1 < \cdots < v_{j-2} < k} \varepsilon_{1 \cdots p_{v_1} \cdots p_{v_{j-2}} \cdots p_k \cdots p_{v_j} \cdots n} g_{p_1} \cdots g_{p_{v_1}} \cdots g_{p_{v_{j-2}}} \cdots g_{p_k} \cdots g_{p_{v_j}} \cdots g_{p_n} \right\} \\ &\quad + \cdots \end{aligned}$$

$$+ \dots + (-1)^n \left\{ (\varepsilon_{\tau_1 \dots \tau_n} g_1 \dots g_n - \varepsilon_{\tau_1 \dots \tau_n} g_1 \dots g_n) \frac{g_{p_k}}{g_{\tau_k}} + \varepsilon_{\rho_1 \dots \rho_n} g_1 \dots g_n \right\}$$

これを整理して帰納法の仮定を使えば $= 0$ となる。

故に補助定理6が従って補助定理5が従って補助定理4が証明されたことになる。

$$3. \quad \Sigma_1 = \sum_{\substack{\sigma_1 \dots \sigma_n \\ \tau_2 \dots \tau_n}} \varepsilon_{\sigma} f_1^{\sigma_1} g_{\tau_2} \dots g_{\tau_n} A_2^{\sigma_2 \tau_2} \wedge \dots \wedge A_n^{\sigma_n \tau_n}$$

$\tau_1 = \sigma_1$ 少なくとも1つの ν に対して

と表わせる。 σ_1 を固定する。 $f_1^{\sigma_1}$ の係数を C_{σ_1} とすると

$$C_{\sigma_1} = \sum_{\substack{\sigma_2 \dots \sigma_n \\ \tau_2 \dots \tau_n}} \varepsilon_{\sigma_1 \dots \sigma_n} g_{\tau_2} \dots g_{\tau_n} A_2^{\sigma_2 \tau_2} \wedge \dots \wedge A_n^{\sigma_n \tau_n}$$

$\tau_1 = \sigma_1$ ある ν に対して

補助定理7 $C_{\sigma_1} = g_{\sigma_1} D$ とかける。ここで D は σ_1 に独立である。

証明 C_1 と C_{σ_1} $\sigma_1 \neq 1$ を考察する。

$(\tau_2, \dots, \tau_n)$ と $(\tau'_2, \dots, \tau'_n)$ が同値であるとは; 置換 $(2, 3, \dots, n)$ の

ρ が存在して $\tau'_\nu = \tau_{\rho\nu}$ となることをいう。

$$B_{\tau_2 \dots \tau_n}^1 = \sum_{\sigma} \varepsilon_{1\sigma_2 \dots \sigma_n} g_{\tau_2} \dots g_{\tau_n} A_2^{\sigma_2 \tau_2} \wedge \dots \wedge A_n^{\sigma_n \tau_n}$$

とおく。 $(\tau_2, \dots, \tau_n)$ の同値類を T とする。

$$B_T^1 = \sum_{(\tau_2 \dots \tau_n) \in T} B_{\tau_2 \dots \tau_n}^1 \quad \text{とおく。}$$

$$B_T^1 = g_{\tau_2} \dots g_{\tau_n} C_T^1, \quad C_T^1 = \sum_{(\tau) \in T} C_{\tau_2 \dots \tau_n}^1$$

$$C_{\tau_2 \dots \tau_n}^1 = \sum_{\sigma} \varepsilon_{1\sigma_2 \dots \sigma_n} A_2^{\sigma_2 \tau_2} \wedge \dots \wedge A_n^{\sigma_n \tau_n} \quad \text{となる。}$$

C_T^1 の項において $(\tau_{\nu_1}, \dots, \tau_{\nu_r})$ が $(\sigma_{\nu_1}, \dots, \sigma_{\nu_r})$ の置換でないもの

のみの和を取ればよい。同様にして

$$C_{\mathcal{X}_1} = \sum_T B_T^{\mathcal{X}_1} \quad B_T^{\mathcal{X}_1} = g_{\lambda_2} \cdots g_{\lambda_n} C_T^{\mathcal{X}_1}, \quad C_T^{\mathcal{X}_1} = \sum_{(\lambda) \in T} C_{\lambda_2 \cdots \lambda_n}^{\mathcal{X}_1}$$

$$C_{\lambda_2 \cdots \lambda_n}^{\mathcal{X}_1} = \sum_{\mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n} \varepsilon_{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_n} A_2^{\mathcal{X}_2 \lambda_2} \cdots A_n^{\mathcal{X}_n \lambda_n}$$

となる。 Σ_1 の作り方より少くとも $\tau_\nu = 1$ となる。

$(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$ を $\lambda_\mu = \tau_\mu (\mu \neq \nu)$, $\lambda_\nu = \mathcal{X}_1$ とし $(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$ の同値類を T' とすると T と T' は一対一に対応し $C_T^1 = C_{T'}^{\mathcal{X}_1}$ となる。

なるとなれば $\varepsilon_{1, \sigma_2, \dots, \sigma_n} A_2^{\sigma_2 \tau_2} \cdots A_n^{\sigma_n \tau_n}$ を C_T^1 の項とする。

$\sigma_\nu = \mathcal{X}_1$ となる ν が存在する。 $(\sigma_2, \dots, \sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu, \sigma_{\nu+1}, \dots, \sigma_n)$ が $\{1, \dots, n\} - \{\mathcal{X}_1\}$ の置換であるならば

$$\varepsilon_{1, \sigma_2, \dots, \sigma_n} A_2^{\sigma_2 \tau_2} \cdots A_n^{\sigma_n \tau_n} = \varepsilon_{\mathcal{X}_1, \sigma_2, \dots, \tau_\nu, \dots, \sigma_n} A_2^{\sigma_2 \tau_2} \cdots A_\nu^{\tau_\nu \sigma_\nu} \cdots A_n^{\sigma_n \tau_n}$$

となり左辺の項は $C_{T'}^{\mathcal{X}_1}$ に現われる。 $\tau_\nu \neq 1$ のとき $\sigma_\mu = \tau_\nu$

となるものがある。 $(\sigma_2, \dots, \tau_\mu, \dots, \tau_\nu, \dots, \sigma_n)$ が $\{1, 2, \dots, n\} - \{\mathcal{X}_1\}$

$$\text{の置換のとき } \varepsilon_{1, \sigma_2, \dots, \sigma_n} A_2^{\sigma_2 \tau_2} \cdots A_n^{\sigma_n \tau_n} = \varepsilon_{\mathcal{X}_1, \sigma_2, \dots, \tau_\mu, \dots, \tau_\nu, \dots, \sigma_n} A_2^{\sigma_2 \tau_2} \cdots A_\mu^{\tau_\mu \sigma_\mu} \cdots A_\nu^{\tau_\nu \sigma_\nu} \cdots A_n^{\sigma_n \tau_n}$$

となる。 右辺は $C_{T'}^{\mathcal{X}_1}$

の項に現われる。 以下同様にして $(\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n)$ が

$\{1, \dots, n\} - \{\mathcal{X}_1\}$ の置換でないならば $\tau_2, \dots, \tau_n$ はすべてに等しく

なくなり矛盾である。 故に $\varepsilon_{1, \sigma_2, \dots, \sigma_n} A_2^{\sigma_2 \tau_2} \cdots A_n^{\sigma_n \tau_n}$ は

$C_{T'}^{\mathcal{X}_1}$ の項に含まれる。 故に $C_T^1 = C_{T'}^{\mathcal{X}_1}$

$$g_{\tau_2} \cdots g_{\tau_n} = g_1 h_T, \quad g_{\lambda_2} \cdots g_{\lambda_n} = g_{\mathcal{X}_1} h_{T'} \quad \text{とおくと } h_T = h_{T'}$$

$$C_1 = \sum_T B_T^1 = \sum_T g_{\tau_2} \cdots g_{\tau_n} C_T^1 = \sum_T g_1 h_T C_T^1 = g_1 \sum_T h_T C_T^1$$

$$C_{\mathcal{X}_1} = \sum_{T'} B_{T'}^{\mathcal{X}_1} = \sum_{T'} g_{\tau_2} \cdots g_{\tau_n} C_{T'}^{\mathcal{X}_1} = g_{\mathcal{X}_1} \sum_{T'} h_{T'} C_{T'}^{\mathcal{X}_1}$$

$$D = \sum_T h_T C_T^1 = \sum_{T'} h_{T'} C_{T'}^{\mathcal{X}_1}$$

故に $C_1 = g_1 D$, $C_{\sigma_1} = g_{\sigma_1} D$ となり補助定理は証明された。

$$\begin{aligned} \text{故に } D_g(f) &= \frac{1}{f_1(f_2)^2 \cdots (f_n)^2} \sum_1 = \frac{1}{f_1(f_2)^2 \cdots (f_n)^2} \sum_{\sigma_1=1}^n f_1^{\sigma_1} C_{\sigma_1} \\ &= \frac{1}{f_1(f_2)^2 \cdots (f_n)^2} \sum_{\sigma_1=1}^n f_1^{\sigma_1} g_{\sigma_1} D = \frac{D}{(f_2)^2 \cdots (f_n)^2} \quad \text{となり} \end{aligned}$$

定理 1 は証明された。

4 $f^*, g^* : W \longrightarrow \mathbb{C}^n$ を C^2 級の写像で

$$f^* = (f^1, \dots, f^n), \quad g^* = (g^1, \dots, g^n)$$

$$f(x, y) = \sum_{\nu=1}^n f^\nu(x, y) (x_\nu - y_\nu) \neq 0$$

$$g(x, y) = \sum_{\nu=1}^n g^\nu(x, y) (x_\nu - y_\nu) \neq 0 \quad \text{を満たすものとする。}$$

g^* は y について正則とする。

補助定理 8 $g+r \geq 1$, $g+r+s+1=n$ とすると

$$\begin{aligned} &D_{1,g,r,s} \left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right) \\ &= \frac{g}{r+g} \bar{\partial}_y D_{1,1,g-1,r,s} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right) \\ &\quad + (-1)^g \frac{r}{r+g} \bar{\partial}_x D_{1,1,g,r-1,s} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right) \\ &\quad + \frac{r}{r+g} D_{1,g,r-1,s+1} \left(\frac{f^*}{f}, \bar{\partial}_y \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{f^*}{f} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right) \end{aligned}$$

となる。証明は補助定理 2, 3 と定理 1 を使えば容易である。

補助定理 9 特に $g=0$, $r=n-1$ とすると

$$D_1(f^*) - D_1(g^*) = \bar{\partial}_x A(f^*, g^*)$$

補助定理 10 $g \geq 1$, $g+r+1=n$ に対して重微分形式 $A(f^*, g^*)$,

$C(f^*, g^*)$ が存在して

$$D_{\bar{g}+1}(f^*) = \bar{\partial}_x A(f^*, g^*) + \bar{\partial}_y C(f^*, g^*) \quad \text{となる。}$$

証明は補助定理8を使えば容易である。

定理2 (Cauchy - Fantappie の積分公式)

G を $\mathbb{C}^n$ の有界領域とし, ∂G は区分的に C^1 級とする。

W を $\partial G \times G$ の近傍とする。 $g_1(x, y), \dots, g_n(x, y) \in C^2(W)$ と仮定

する。 $\tilde{g} = (g_1, \dots, g_n)$, $\omega(x) = \bigwedge_{\ell=1}^n dx_\ell$, $\omega'(\tilde{g}) = \sum_{\bar{j}=1}^n (-1)^{\bar{j}-1} g_{\bar{j}} \bigwedge_{k=1, k \neq \bar{j}}^n \bar{\partial}_x g_k$

$$g(x, y) = (\tilde{g}, x - y) = \sum_{\bar{j}=1}^n (x_{\bar{j}} - y_{\bar{j}}) g_{\bar{j}}(x, y) \quad \text{とおく。}$$

$\partial G \times G$ において $g(x, y) \neq 0$ とする。

f が $\bar{G}$ で正則ならば

$$f(y) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial G} f(x) \frac{\omega'(\tilde{g}) \wedge \omega(x)}{(\tilde{g}, x-y)^n} \quad \text{が成立する。}$$

証明 $(n-1)! \tilde{g}^n \omega'(\tilde{g}) = D\left(\frac{\tilde{g}}{\tilde{g}}, \bar{\partial}_x\left(\frac{\tilde{g}}{\tilde{g}}\right), \dots, \bar{\partial}_x\left(\frac{\tilde{g}}{\tilde{g}}\right)\right)$

であり $D\left(\frac{\tilde{g}}{\tilde{g}}, \bar{\partial}_x\left(\frac{\tilde{g}}{\tilde{g}}\right), \dots, \bar{\partial}_x\left(\frac{\tilde{g}}{\tilde{g}}\right)\right) = D\left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}, \bar{\partial}_x\left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}\right), \dots, \bar{\partial}_x\left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}\right)\right)$
 $= \bar{\partial}_x \beta \quad \text{となる。}$

故に $\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial G} f(x) \frac{\omega'(\tilde{g}) \wedge \omega(x)}{(\tilde{g}, x-y)^n} = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial G} f(x) \frac{\omega'(\bar{x}-\bar{y}) \wedge \omega(x)}{|x-y|^{2n}}$
 $= f(y)$

5 $W = \{(x, y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n; x \neq y\}$ とする。

すると W 上で

$$B_{n\bar{g}}(x, y) = (-1)^{\bar{g}} \binom{n-1}{\bar{g}} D_{\bar{g}+1}(\bar{x}-\bar{y})$$

$$= (-1)^{\bar{g}} \binom{n-1}{\bar{g}} D_{1, \bar{g}, n-\bar{g}-1}\left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}, \bar{\partial}_y\left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}\right), \bar{\partial}_x\left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}\right)\right)$$

が定義される。

定義 4 $B_{n,g}(x,y)$ を $(0,g)$ 形式に対する Bochner-Martinelli の核という。

補助定理 11 $\bar{\partial} B_{n,g}(x,y) = (-1)^g \bar{\partial}_y B_{n,g-1}(x,y)$ が成立する。

ここで $B_{n,-1} = B_{n,n} = 0$ とおく。

証明 補助定理 5 より

$$D_{1,g,n-g-1} \left(\bar{\partial}_x \left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2} \right), \bar{\partial}_y \left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2} \right) \right) = 0$$

$$D_{g+1,n-g-1} \left(\bar{\partial}_y \left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2} \right) \right) = 0$$

に注意すれば証明は容易である。

補助定理 12 γ を G 上の $C^\infty(0,g+1)$ 形式とし有界な係数をもつ

とする。すると $\alpha(y) = \int_G \gamma(x) \wedge B_{n,g}(x,y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda$

は G において無限回連続微分可能である。

証明 積分の存在は被積分形式の係数が $O\left(\frac{1}{|x-y|^{2n-1}}\right)$ で

あることから従う。 $y_0 \in G$ とする。 f を $\text{supp}(\gamma) \subset G$,

$0 \leq f \leq 1$, y_0 の近傍で $f \equiv 1$ となる $C^\infty(\mathbb{C}^n)$ 函数とする。

すると $\gamma = f\gamma + (1-f)\gamma$ となる。 $(1-f)\gamma$ の積分は y_0 で C^∞ で

ある。故に γ を全空間で定義された C^∞ 形式で $\text{supp}(\gamma)$ が G に含まれ

ると仮定してよい。すると

$$\frac{\partial \alpha(y_0)}{\partial y_j} = \int_G \frac{\partial \gamma(x)}{\partial x_j} \wedge B_{n,g}(x,y_0) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda \quad \text{とより } \alpha \text{ は } C^\infty \text{ 級}$$

である。

定理3 $\gamma \in \bar{G}$ 上の $\mathcal{C}^\infty(0, g)$ 形式とする。すると各 $y \in G$ に対し

$$1^\circ, \quad \gamma(y) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \left[\int_{\partial G} \gamma(x) \wedge B_{ng}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda \right. \\ \left. - \int_G \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge B_{ng}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda - \bar{\partial}_y \int_G \gamma(x) \wedge B_{n, g-1}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda \right]$$

が成立する。

$$\text{証明} \quad d_x(\gamma(x) \wedge B_{ng}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda) = \bar{\partial}_x(\gamma(x) \wedge B_{ng}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda)$$

$$= \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge B_{ng}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda + \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_y B_{n, g-1}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda$$

となる。まず $g=0$ のときに成立することを証明する。

$y \in G$ に対し $K_\varepsilon = \{x, |x-y| < \varepsilon\} \subset G$ となるように ε を選ぶ。 $G_\varepsilon = G - K_\varepsilon$ とおく。ストークスの定理によって

$$\int_{G_\varepsilon} \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge B_{n0}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda = \int_{\partial G} \gamma(x) \wedge B_{n0}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda \\ - \int_{\partial K_\varepsilon} \gamma(x) \wedge B_{n0}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda \quad \text{となる。}$$

$$\int_{\partial K_\varepsilon} \gamma(x) \wedge B_{n0}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda = \int_{\partial K_\varepsilon} [\gamma(x) - \gamma(y)] \wedge B_{n0}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda$$

右辺の

$$+ \int_{\partial K_\varepsilon} \gamma(y) \wedge B_{n0}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda$$

が1積分は0に収束する。が2積分は $x-y = \varepsilon t$ とおいて

$$\text{計算すると} \quad \int_{\partial K_\varepsilon} \gamma(y) \wedge B_{n0}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (2\pi i)^n \gamma(y)$$

となる。故に

$$\int_G \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge B_{n0}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda = \int_{\partial G} \gamma(x) \wedge B_{n0}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda \\ - (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (2\pi i)^n \gamma(y) \quad \text{となる。}$$

次に g は任意とし, $y_0 \in G$ とする。 K は y_0 の近傍とする。

$0 \leq f \leq 1$, $f \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$, $\text{supp}(f) \subset G$, K で " $f \equiv 1$ " となる函数 f を選ぶ。 $y \in K$ に対して ストークスの定理を適用して

$$\begin{aligned} \int_G \bar{\partial}_x \left((1-f(x)) \gamma(x) \wedge B_{n,g}(x,y) \wedge \bigwedge_{\lambda} dx_{\lambda} \right) + \bar{\partial}_y \int_G (1-f(x)) \gamma(x) \wedge B_{n,g-1}(x,y) \wedge \bigwedge_{\lambda} dx_{\lambda} \\ = \int_{\partial G} (1-f(x)) \gamma(x) \wedge B_{n,g}(x,y) \wedge \bigwedge_{\lambda} dx_{\lambda} \end{aligned} \quad \text{となる。}$$

最後に δ も台が G に含まれる $C^\infty(\mathbb{C}^n)$ 形式とした場合に

$$\begin{aligned} \gamma(y) = - \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \left[\int_G \bar{\partial}_x \delta(x) \wedge B_{n,g}(x,y) \wedge \bigwedge_{\lambda} dx_{\lambda} \right. \\ \left. + \bar{\partial}_y \int_G \delta(x) \wedge B_{n,g-1}(x,y) \wedge \bigwedge_{\lambda} dx_{\lambda} \right] \end{aligned}$$

が証明できればよい。 [] 内の $d\bar{y}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{y}_{i_g}$ の

係数は $\int_G \bar{\partial}_x \delta_{i_1 \cdots i_g}(x) \wedge B_{n,0}(x,y) \wedge \bigwedge_{\lambda} dx_{\lambda}$ となる。

これは $-\frac{(2\pi i)^n}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}} \delta_{i_1 \cdots i_g}(y)$ に等しい。 故に定理は成立する。

定義 5 定理 3 を一般化された Bochner-Martinelli の公式という。

§3 Cauchy-Riemann の微分方程式の解

1. 以下 G を C^5 級の境界 ∂G をもつ有界な強擬凸領域とする。

すると ∂G の近傍 U において定義された強多重劣調和函数 ϕ で U で $d\phi \neq 0$, $G \cap U = \{x \in U, \phi(x) < 0\}$, $\phi \in C^5(U)$ となるものが存在する。

$G_\nu \subset\subset G_{\nu+1} \subset\subset G$, $\bigcup_{\nu=1}^\infty G_\nu = G$ となる

C^5 級の境界 ∂G_ν をもつ強擬凸領域 $\{G_\nu\}$ が存在する。

Ramirez は次の定理に述べる函数 $g(x, y)$ が存在することを証明した。ここで $g(x, y)$ が C^3 級であることは ∂G が C^5 級であることから出る。

定理4 $\partial G \times \overline{G}$ の近傍 W' と W' 上の C^3 級函数 $g(x, y)$ で次の条件を満たすものが存在する。

- 1) $g(x, y)$ は y について正則
- 2) すべての y に対して $g(y, y) = 0$
- 3) $x \neq y, (x, y) \in \partial G \times \overline{G}$ に対して $\operatorname{Re} g(x, y) > 0$

更に Ramirez は

$$g(x, y) = \sum_{v=1}^n g_v(x, y)(x_v - y_v) \quad , \quad g_v(x, y) \in C^3(W')$$

$g_v(x, y)$ は y について正則,

と書けることを証明した。

2.

$P = \sum_{v=1}^n \frac{g_v(x, y)}{g(x, y)} dx_v$ に対して正則一次変換を行うと

P は $\widehat{P} = \sum_{v=1}^n \frac{\widehat{g}_v(\widehat{x}, \widehat{y})}{\widehat{g}(\widehat{x}, \widehat{y})} d\widehat{x}_v$ に移り g は $\widehat{g}$ に移ったとすると

$$\widehat{g}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \sum_{v=1}^n \widehat{g}_v(\widehat{x}, \widehat{y})(\widehat{x}_v - \widehat{y}_v) \quad \text{が成立する。}$$

定義6 $P(x, y) = \sum_{v=1}^n \frac{g_v(x, y)}{g(x, y)} dx_v$ を $g^* = (g_1, \dots, g_n)$ に対する

Ramirez-Henkin の微分形式という。

$$\begin{aligned} \Omega_{ng}(x, y) &= (-1)^g \binom{n-1}{g} D_{g+1}(g^*) \\ &= (-1)^g \binom{n-1}{g} D_{1, g, n-g-1} \left(\frac{g^*}{g}, \bar{\partial}_g \left(\frac{g^*}{g} \right), \bar{\partial}_n \left(\frac{g^*}{g} \right) \right) \quad \text{とおく。} \end{aligned}$$

$g \geq 1$ に対しては $\Omega_{ng} = 0$ である。

$g=0$ に対しては Ω_{ng} は $W = W' - \{(x, y) \in W'; g(x, y) = 0\}$ 上で定義される。

定理5 W 上の C^3 級の重微分形式 $A_{ng}(x, y)$ と $C_{ng}(x, y)$ が存在して $B_{ng}(x, y) = \Omega_{ng}(x, y) + \bar{\partial}_x A_{ng}(x, y) + \bar{\partial}_y C_{ng}(x, y)$ とかけらる。ここで

$$A_{n0} = D_{1,1,n-2} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}, \bar{\partial}_x \left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2} \right) \right) + D_{1,1,n-3,1} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}, \bar{\partial}_x \left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right) + \dots + D_{1,1,1,n-3} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}, \bar{\partial}_x \left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right) + D_{1,1,n-2} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}, \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right)$$

$$A_{ng} = C'_1 D_{1,1,g,n-g-2} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}, \bar{\partial}_y \left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right) + C'_2 D_{1,1,g,n-g-3,1} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}, \bar{\partial}_y \left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right) + \dots + C'_{r-1} D_{1,1,g,1,n-g-3} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}, \bar{\partial}_y \left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right) + C'_r D_{1,1,g,n-g-2} \left(\frac{g^*}{g}, \frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2}, \bar{\partial}_y \left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{|x-y|^2} \right), \bar{\partial}_x \left(\frac{g^*}{g} \right) \right)$$

$C'_j \in \mathbb{C}$ と表わせる。証明は補助定理9と10より明らかである。

補助定理1より A_{ng} と Ω_{ng} に現われてくる項は正則一次変換によって同じ型に移る。よって積分する場合にも正則一次変換を行って差し支えない。

定理6 C^3 級の境界をもつ強擬凸領域 $G \subset \mathbb{C}^n$ に対して

$\partial G \times G$ を含む開集合 W 上の重微分形式 $\Omega_{ng}(x, y)$ と $A_{ng}(x, y)$ が

存在して, γ を G 上の $C^\infty(0, g)$ 形式とすると $y \in G$ に対して

$$\gamma(y) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \left[\int_{\partial G} \gamma(x) \wedge \Omega_{ng}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda + (-1)^{\delta+1} \int_{\partial G} \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{ng}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda \right. \\ \left. - \int_G \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge B_{ng}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda + \bar{\partial}_y P(y) \right]$$

となる。

証明 定理5より $\int_{\partial G} \gamma(x) \wedge B_{ng}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda = \int_{\partial G} \gamma(x) \wedge \Omega_{ng}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda$ \\ $+ \int_{\partial G} \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_x A_{ng}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda + \int_{\partial G} \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_y C_{ng}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda$ \\ である。 ∂G はコンパクトだから $\int_{\partial G} d_x (\gamma(x) \wedge A_{ng}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda) = 0$ \\ を使えば $0 = \int_{\partial G} \bar{\partial}_x \gamma(x) \wedge A_{ng}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda + (-1)^{\delta} \int_{\partial G} \gamma(x) \wedge \bar{\partial}_x A_{ng}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda$ \\ を得る。これを定理3に代入すると求める公式を得る。

3. β を有界な係数をもつ G 上の閉 $C^\infty(0, g+1)$ 形式とする。

$$\gamma_\nu(y) = - \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \int_{G_\nu} \beta(x) \wedge B_{ng}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda$$

$$\gamma_\nu(y) = (-1)^{\delta+1} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \int_{\partial G_\nu} \beta(x) \wedge A_{ng}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda$$

とおく。

補助定理13

$\gamma_\nu(y)$ は $\gamma(y) = - \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \int_G \beta(x) \wedge B_{ng}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda$ に G 上広義一様収束する。また $\gamma_\nu(y)$ の各導函数は $\gamma(y)$ の対応する導函数に G 上広義一様収束する。

証明 $G' \subset G$, $G' \subset G_{\nu_0}$ とする。 $y \in G'$, $\nu \geq \nu_0$ に対して

$$\gamma(y) - \gamma_\nu(y) = - \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \int_{G-G_\nu} \beta(x) \wedge B_{ng}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^n dx_\lambda$$

となる。 $|\gamma(y) - \gamma_\nu(y)| \leq K \cdot \text{mes}(G - G_\nu) \rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow \infty)$

となることより従う。

導函数の収束は補助定理12より積分記号下の微分ができることより明らかである。

補助定理14

S_ν は G においてすべての導函数までこめて広義一様収束する。

証明 $G' \subset G_{\nu_0}$, $\nu \geq \mu \geq \nu_0$ とする。

すると $y \in G'$ に対して

$$\begin{aligned} S_\nu(y) - S_\mu(y) &= \int_{\partial G_\nu} \beta(x) \wedge A_{ng}(x, y) \wedge \wedge d\chi_\lambda - \int_{\partial G_\mu} \beta(x) \wedge A_{ng}(x, y) \wedge \wedge d\chi_\lambda \\ &= \int_{\partial(G_\nu - G_\mu)} \beta(x) \wedge A_{ng}(x, y) \wedge \wedge d\chi_\lambda = \int_{G_\nu - G_\mu} dx (\beta(x) \wedge A_{ng}(x, y)) \wedge \wedge d\chi_\lambda \\ &= \pm \int_{G_\nu - G_\mu} \beta(x) \wedge \bar{\partial}_x A_{ng}(x, y) \wedge \wedge d\chi_\lambda \end{aligned}$$

故に $|S_\nu(y) - S_\mu(y)| \leq K M_{\text{es}}(G_\nu - G_\mu) \rightarrow 0 \quad (\nu, \mu \rightarrow \infty)$

故に S_ν は G 上広義一様収束する。導函数の広義一様収束も明らかである。

以上の準備の下に

定理7 $\alpha = \gamma + \zeta$, $(\zeta = \lim_{\nu \rightarrow \infty} S_\nu)$ は $\bar{\partial}\alpha = \beta$ を満たす。

証明 G は擬凸領域であるから $\bar{\partial}\gamma = \beta$ を満たす G 上の C^∞

$(0, g)$ 形式 η が存在する。すると定理6より $y \in G_{\nu_0}$, $\nu > \nu_0$

に対して, $\eta(y) = S_\nu(y) + \gamma_\nu(y) + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \left[\int_{\partial G_\nu} \eta(x) \wedge \Omega_{ng}(x, y) \wedge \wedge d\chi_\lambda + \bar{\partial}_y \Gamma_\nu(y) \right]$ と表わせる。すると

$\beta(y) = \bar{\partial}\eta(y) = \bar{\partial}S_\nu(y) + \bar{\partial}\gamma_\nu(y)$ となる。 $\nu \rightarrow \infty$ とすると

$\beta(y) = \bar{\partial}\zeta(y) + \bar{\partial}\eta(y) = \bar{\partial}\alpha(y)$ となり 結局 G 全体

で $\alpha = \beta$ が成立する。

§ 4 Cauchy-Riemann の微分方程式の解の評価

1. 補助定理 15 ∂G の近傍 U' において強多重調和関数 ϕ で
 $d\phi \neq 0$, $G \cap U' = \{x \in U', \phi(x) < 0\}$ となるものが存在する。

更に $\angle$ を ∂G 上の点 x_0 における ∂G の鉛直線とすると $\angle$ は x_0 の近傍において等曲面 $\{x; \phi(x) = c\}$ を垂直に切る。

証明 $x \in \mathbb{C}^n$ に対し, $\delta(x)$ を x と ∂G との最小距離とする。

$$\tau(x) = \begin{cases} -\delta(x) & x \in G \text{ のとき} \\ \delta(x) & x \notin G \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく。 ∂G の近傍で $\tau(x)$ は C^∞ 級で ∂G で強多重調和である。十分大きな $A > 0$ に対し $\phi(x) = \tau(x)e^{A\tau(x)}$ は ∂G の近傍で強多重調和である。かってと同じ等曲面をもつ。故に ϕ はおめる関数である。

2. $U = \{x \in U' : |\phi(x)| < \delta_0\} \subset U'$ となるように U を選ぶ。
 $y \in \overline{U \cap G}$ とする。

$$y = (x'_1 = -\rho_0, x''_1 = 0, \dots, x''_n = 0) \quad \rho_0 \geq 0$$

$0 \in \partial G$, $\{x'_1 = 0\}$ は 0 において ∂G に接する, ように座標系をえらぶ。 $0 \leq \rho \leq \rho_0$ に対し,

$$F_\rho = \{x \in \overline{U} : \phi(x) = \phi(\rho - \rho_0, 0, \dots, 0)\} \quad \text{とおく。}$$

この $\phi(x)$ に対し, $y \in U(\partial G)$ に対して Ramirez の証明によると,

$$(1) \quad g(x, y) = 2 \sum_{i,j} (x_i - y_i) \phi_i(x) - \sum_{i,j} (x_i - y_i)(x_j - y_j) \phi_{ij}(x)$$

$$+ C \sum_{i,j} (x_i - y_i)(x_j - y_j) \phi_i(x) \phi_j(x) + O(\|x - y\|^3)$$

となる。ここで $\phi_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$, $\phi_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}$, $\phi_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial \bar{x}_j}$ とする。

$\phi(y)$ を x においてテイラー展開し, (1) を代入すると,

$$(2) \quad \operatorname{Re} g(x, y) = \phi(x) - \phi(y) + \operatorname{Re} \left(C \sum_{i,j} (x_i - y_i)(x_j - y_j) \phi_i(x) \phi_j(x) \right)$$

$$+ \sum_{i,j} (x_i - y_i)(\bar{x}_j - \bar{y}_j) \phi_{i\bar{j}}(x) + O(\|x - y\|^3)$$

となる。 $\phi_i(x) = \phi_i(y) + O(\|x - y\|)$, $\phi_i(y) = 0$, $i \neq 1$ に注意して

であるから, (2) より

$$(3) \quad \operatorname{Re} g(x, y) = \phi(x) - \phi(y) + \operatorname{Re} \left(C \phi_1(y)^2 (x_1 - y_1)^2 \right)$$

$$+ \sum_{i,j} (x_i - y_i)(\bar{x}_j - \bar{y}_j) \phi_{i\bar{j}}(x) + O(\|x - y\|^3)$$

となる。定数 $A_1, A_2, \dots > 0$ が存在して $\bar{U}$ 上で

$$(4) \quad A_1 \leq \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right| \leq A_2 \quad \text{となる。}$$

$x \in \bar{U}$, $t \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$(5) \quad \sum_{i,j} \phi_{i\bar{j}}(x) t_i \bar{t}_j \geq A_3 \|t\|^2 \quad \text{となる。}$$

$$(6) \quad |O(\|x - y\|^3)| \leq A_4 \|x - y\|^3 \quad \text{となる。}$$

$x \in F_\sigma$ のとき $\rho(x) = \sigma$ と定義する。すると

$$\rho(x) = x'_1 - y'_1 + O(\|x - y\|^2)$$

$$(7) \quad |O(\|x - y\|^2)| \leq A_5 \|x - y\|^2$$

$x \in F_\rho$, $\rho \geq 0$ とする。すると $\phi(x) = \phi(\rho - \rho_0, 0, \dots, 0)$

$$\phi(x) - \phi(y) = \phi(\rho - \rho_0, 0, \dots, 0) - \phi(-\rho_0, 0, \dots, 0) \geq A_1 \rho$$

(5) より

$$(8) \quad \overline{\sum_{i,j}} \phi_{i,j}(x)(x_i - y_i)(\bar{x}_j - \bar{y}_j) \geq A_3 R^2$$

$$\text{更に } |x_i - y_i|^2 = |x'_i - y'_i|^2 + |x''_i|^2$$

$$|x'_i - y'_i|^2 = |\rho(x) + O(\|x - y\|^2)|^2 \leq 2\rho^2(x) + 2A_5^2 R^4$$

すると

$$(9) \quad |c| |\operatorname{Re}(\phi_1^2(y))(x_i - y_i)^2| \leq |c| |\phi_1(y)|^2 (|x''_i|^2 + 2\rho^2 + 2A_5^2 R^4)$$

$$\leq \frac{1}{4}|c|A_2^2 |x''_i|^2 + \frac{1}{2}|c|A_2^2 \rho^2 + \frac{1}{2}|c|A_2^2 A_5^2 R^4$$

$$|\operatorname{Re} g(x, y)| \geq A_1 \rho + A_3 R^2 - \frac{1}{4}|c|A_2^2 |x''_i|^2 - \frac{1}{2}|c|A_2^2 \rho^2$$

となり $\rho \leq \rho_1$, $R \leq R_1$, R_1, ρ_1 を十分小にとると, 正の定

数 B_1, B_2 が存在して

$$(10) \quad |\operatorname{Re} g(x, y)| \geq B_1 R^2 - B_2 |x''_i|^2$$

となる。(1) とテーラー展開から

$$(11) \quad \operatorname{Im} g(x, y) = \frac{\partial \phi(y)}{\partial x'_i} x''_i + O(\|x - y\|^2)$$

となる。(11) の剰余項に対して

$$O(\|x - y\|^2) \leq A_6 \|x - y\|^2 \text{ が成り立つ. (4) を考慮して.}$$

$$(12) \quad |\operatorname{Im} g(x, y)| \geq A_1 |x''_i| - A_6 R^2$$

となる。(10) と (12) より

$$(13) \quad |g(x, y)| \geq \max(|\operatorname{Re} g(x, y)|, |\operatorname{Im} g(x, y)|)$$

$$\geq \max(B_1 R^2 - B_2 |x''_i|^2, A_1 |x''_i| - A_6 R^2)$$

$$\geq \max(B_1 R^2, A_1 |x''_i| - A_6 R^2) - B_2 |x''_i|^2$$

となる。

補助定理16

$\alpha, \beta, \gamma > 0$ に対して

$$\max(\alpha, \beta - \gamma) \geq \frac{1}{2 + \frac{\gamma}{\alpha}} (\alpha + \beta)$$

が成立する。

証明 $\alpha \geq \beta - \gamma$ とする。すると

$$\alpha = \frac{\alpha}{2\alpha + \gamma} (2\alpha + \gamma) = \frac{1}{2 + \frac{\gamma}{\alpha}} (\alpha + \alpha + \gamma) \geq \frac{1}{2 + \frac{\gamma}{\alpha}} (\alpha + \beta)$$

$\beta - \gamma \geq \alpha$ とする。すると

$$(\alpha + \gamma)^2 \leq \beta (\alpha + \gamma), \text{ 故に } \alpha^2 + \alpha\beta \leq 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - \gamma^2 + \beta\gamma$$

$$\alpha(\alpha + \beta) \leq (\beta - \gamma)(2\alpha + \gamma)$$

$$\text{よって } \frac{\alpha}{2\alpha + \gamma} (\alpha + \beta) \leq \beta - \gamma, \text{ 故に } \frac{1}{2 + \frac{\gamma}{\alpha}} (\alpha + \beta) \leq \beta - \gamma$$

となり 補助定理は証明された。

$$\text{故に } \max(B_1 R^2, A_1 |x_1''| - A_6 R^2) \geq \frac{1}{2 + \frac{A_6}{B_1}} (A_1 |x_1''| + B_1 R^2)$$

$R = 0$ または $x_1'' = 0$ に対しても成立する。

(13) より 正の定数 C_1, C_2 が存在して

$$|g(x, y)| \geq C_1 |x_1''| + C_2 R^2 - B_2 |x_1''|^2 \text{ となる。}$$

R_1 を十分小さく選ぶと, $C_1 - B_2 |x_1''| > 0$ とできる。

故に定数 $C_3 > 0$ が存在して

$$|g(x, y)| \geq C_3 |x_1''| + C_2 R^2 \text{ となる。}$$

補助定理17

δ_0 を十分小と仮定し, $U = \{x; |\phi(x)| < \delta_0\}$ とする。

すると定数 R_1, A が存在し, $y \in \overline{U \cap \Gamma}$, $\|x - y\| \neq R < R_1$

$$\phi(x) > \phi(y) \text{ に対し, } |g(x, y)| \geq A(R^2 + |x_1''|)$$

が成立する。

補助定理18 $\nu_0 \geq 1$ と定数 $K > 0$ が存在して $\nu \geq \nu_0$, $y \in G_\nu$, $x \in \partial G_\nu$, $|x-y| \geq R_0$ なる ν, x, y に対して $|g(x, y)| \geq K$ となる。

証明 定理は成立しないとする。すると任意の $\nu_0, K > 0$ に対し, $\nu \geq \nu_0$ が存在して $x_\nu \in \partial G_\nu$, $y_\nu \in G_\nu$, $|x_\nu - y_\nu| \geq R_0$, $|g(x_\nu, y_\nu)| < K$ となる x_ν, y_ν が存在する。

$K_\mu > 0, K_\mu \rightarrow 0, \nu_\mu \rightarrow \infty (\mu \rightarrow \infty)$ を選んで,

$x_{\nu_\mu} \in \partial G_{\nu_\mu}, y_{\nu_\mu} \in G_{\nu_\mu}, |x_{\nu_\mu} - y_{\nu_\mu}| \geq R_0, |g(x_{\nu_\mu}, y_{\nu_\mu})| < K_\mu$ とできる。 $x_{\nu_\mu} \rightarrow x_0, y_{\nu_\mu} \rightarrow y_0 \in \bar{G}$ としてよい。

$$x_0 \in \partial G, |g(x_0, y_0)| \leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} K_\mu = 0$$

故に $x_0 = y_0$, 他方 $|x_0 - y_0| \geq R_0$. これは矛盾である。

3. $\nu_0 = 1$ としてよい。

$$y \in \bar{G}_0.$$

$\nu \geq \nu_0$ に対して $\partial G_\nu \cap \{x; |x-y| \leq R_0\}$ は

$x'_i = f_{\nu_i}(x''_1, \dots, x''_n, x''_n)$ で与えられる。

$$\zeta_\nu(y) = \int_{\partial G_\nu} \beta(x) \wedge A_{ng}(x, y) \wedge \wedge dx_\lambda$$

$$= \int_{H_\nu} \beta(x) \wedge A_{ng}(x, y) \wedge \wedge dx_\lambda + \int_{\partial G_\nu - H_\nu} \beta(x) \wedge A_{ng}(x, y) \wedge \wedge dx_\lambda$$

ここで $H_\nu = \partial G_\nu \cap \{x; |x-y| \leq R_0\}$ とおく。和積分で

補助定理18より A_{ng} の係数は ν と y に独立に有界である。

故に $K > 0$ が存在して

$$\left| \int_{\partial G_v - H_v} \beta(x) \wedge A_{h, g}(x, y) \wedge \bigwedge_{\lambda} d x_{\lambda} \right| \leq K |\beta|$$

となる。

★1 積分を考へる。★1 積分は

$$\int_{H_v} \beta(x) \frac{g_{\sigma_1}}{g} \frac{\bar{x}_{\sigma_2} - \bar{y}_{\sigma_2}}{|x-y|^2} \wedge \bigwedge_{p=3}^{j+2} \bar{\partial}_y \left(\frac{\bar{x}_p - \bar{y}_p}{|x-y|^2} \right) \wedge \bigwedge_{\alpha=j+3}^{j+r+2} \left(\frac{\bar{x}_{\sigma_{\alpha}} - \bar{y}_{\sigma_{\alpha}}}{|x-y|^2} \right) \wedge \bigwedge_{\mu=j+r+3}^n$$

$$\bar{\partial}_x \left(\frac{g_{\sigma_{\mu}}}{g} \right) \wedge \bigwedge_{\lambda} d x_{\lambda}$$

の一次系結合で"ある。

$$\bar{\partial}_y \left(\frac{\bar{x}_{\mu} - \bar{y}_{\mu}}{|x-y|^2} \right) = - \frac{d \bar{y}_{\mu}}{|x-y|^2} + \frac{\bar{x}_{\mu} - \bar{y}_{\mu}}{|x-y|^4} \sum_{\lambda=1}^n (x_{\lambda} - y_{\lambda}) d \bar{y}_{\lambda}$$

$$\bar{\partial}_x \left(\frac{\bar{x}_{\mu} - \bar{y}_{\mu}}{|x-y|^2} \right) = \frac{d \bar{x}_{\mu}}{|x-y|^2} - \frac{\bar{x}_{\mu} - \bar{y}_{\mu}}{|x-y|^4} \sum_{\lambda=1}^n (x_{\lambda} - y_{\lambda}) d \bar{x}_{\lambda}$$

$$\bar{\partial}_x \left(\frac{g_{\mu}}{g} \right) = \frac{\bar{\partial}_x g_{\mu}}{g} - \frac{g_{\mu}}{g^2} \sum_{\lambda=1}^n (x_{\lambda} - y_{\lambda}) \bar{\partial}_x g_{\lambda}$$

であるから $d \bar{y}_{i_1} \wedge \dots \wedge d \bar{y}_{i_r}$ の係数として

$$\int_{H_v} \beta(x) \wedge \frac{g_{\sigma_1}}{g} \frac{\bar{x}_{\sigma_2} - \bar{y}_{\sigma_2}}{|x-y|^2} \prod_{p=3}^{j+2} h_{\sigma_p} \prod_{\alpha=j+3}^{j+r+2} h_{\sigma_{\alpha}} \wedge \bigwedge_{\mu=j+r+3}^n \frac{\bar{\partial}_x g_{\sigma_{\mu}}}{g} \wedge \bigwedge_{\lambda} d x_{\lambda} \wedge d \bar{x}_{\lambda}$$

か又は

$$\int_{H_v} \beta(x) \wedge \frac{g_{\sigma_1}}{g} \frac{\bar{x}_{\sigma_2} - \bar{y}_{\sigma_2}}{|x-y|^2} \prod_{p=3}^{j+2} h_{\sigma_p} \prod_{\alpha=j+3}^{j+r+2} h_{\sigma_{\alpha}} \wedge \bigwedge_{\mu=j+r+3}^n \frac{\bar{\partial}_x g_{\sigma_{\mu}}}{g} \wedge g_{\sigma_2} \bar{\partial}_x \left(\frac{1}{g} \right) \wedge \bigwedge_{\lambda} d x_{\lambda} \wedge d \bar{x}_{\lambda}$$

という形で"ある。

$$\text{ここで } h_{\sigma_p}(x, y) \text{ は } \pm \frac{1}{|x-y|^2} \text{ か または } \pm \frac{(\bar{x}_{\mu} - \bar{y}_{\mu})(x_{\lambda} - y_{\lambda})}{|x-y|^4}$$

である。 g_{μ} の偏微分を g'_{μ} , β の係数を b とする。

★1 積分について, $x'_i = f_v(x'_1, \dots, x'_n, x''_i)$ を代入して,

$$\int_{H'_v} b(x) \frac{g_{\sigma_1}}{g} \frac{\bar{x}_{\sigma_2} - \bar{y}_{\sigma_2}}{|x-y|^2} \prod_{p=3}^{j+r+2} h_{\sigma_p} \prod_{\mu=j+r+3}^n \frac{g'_{\sigma_{\mu}}}{g} f'_v d x'_1 \dots d x'_n d x''_i$$

となる, ここで H'_v は点 $(-y_v, 0, \dots, 0)$ における ∂G_v の接平面

上への H^2 の射影を表わし、 f'_ν は f_ν の偏導函数を表わす。

f'_ν は x と y に独立に有界である。

$$\text{更に } \frac{|\bar{x}_{\sigma_2} - \bar{y}_{\sigma_2}|}{|x - y|^2} \leq \frac{1}{r}, \quad |h_{\sigma_p}(x, y)| \leq \frac{1}{r^2}$$

となる。ここで r は接平面におけるユークリッドの距離である。

補助定理 17 より

$$\frac{1}{|g|} \leq C \frac{1}{r^2 + |x''|}$$

となる。故に σ_1 積分の絶対値は

$$K|\beta| \int_{r \leq R_0} \frac{1}{r^{2n-1} + r^{2n-3}|x''|} dx''_1 \dots dx''_n dx''_n$$

より小さい。 $x''_1 = r \sin \alpha$ と極座標変換すると、結局

$$\int_0^{R_0} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \alpha}{r + r \sin \alpha} d\alpha \text{ の存在を示せばよいが、}$$

これは $\log(1+R_0) + R_0 \log(1+\frac{1}{R_0})$ となり存在する。

σ_2 積分を考察する。(1)より

$$g_\mu(y, y) = 2\phi_\mu(y) = 0 \quad \mu \neq 1 \quad \text{となる。 故に } \mu > 1 \text{ に}$$

$$\text{対して } |g_\mu(x, y)| \leq DR \quad \mu > 1$$

となる。 σ_p は $(1, 2, \dots, n)$ の置換とする。

$\sigma_1 \neq 1$ か又は $\sigma_2 \neq 1$ である。

$$\sigma_1 \neq 1 \text{ のとき } \left| \frac{g_{\sigma_1}}{g} \right| \leq \frac{DR}{R^2} \leq C' \frac{1}{r}$$

$$\left| \frac{g_{\sigma_2} g'_{\sigma_2}(x_{\sigma_2} - y_{\sigma_2})}{g^2} \right| \leq \frac{CR}{(R^2 + |x''|)^2} \leq \frac{C''}{r^3 + r|x''|}$$

$\sigma_2 \neq 1$ のとき

$$\left| \frac{g_{\sigma_2}}{g} \right| \leq C \frac{1}{r^2}, \quad \left| \frac{g_{\sigma_2} g'_{\sigma_2}(x_{\sigma_2} - y_{\sigma_2})}{g^2} \right| \leq \frac{CDR^2}{(R^2 + |x''|)^2} \equiv C'' \frac{1}{r^2 + |x''|}$$

いづれの場合も二つの積は

$$\leq \frac{C}{r^4 + r^2 |x''|} \quad \text{となる。}$$

残りの項は $\frac{C}{r^{2n-5}}$ で押さえられる。

故にオ2積分の絶対値は

$$C|\beta| \int_{r \leq R_0} \frac{1}{r^{2n-1} + r^{2n-3} |x''|} dx''_1 \cdots dx''_n dx''_n \quad \text{より小さい。}$$

この積分は存在する。

故に $|S| \leq K|\beta|$ を得る。

γ に対しては

$$|\gamma| \leq |\beta| \left| \int_G B_{ng}(x, \gamma) \wedge \wedge dx_\lambda \right| \leq K|\beta|$$

となる。従って次の定理を得る。

定理8 G を C^5 級の境界をもつ強擬凸領域とすると任意の G 上の可閉 $C^\infty(0, g+1)$ 形式 β に対して G 上の $C^\infty(0, g)$ 形式 α と正の定数 K が存在して $\bar{\partial}\alpha = \beta$, $|\alpha| \leq K|\beta|$ となる。

§5 コホモロジーの消滅定理

補助定理19 G は C^5 級の境界をもつ強擬凸領域とする。

$K'_1 \ll K_1, \dots, K'_r \ll K_r$ は $2r$ 個の超球とする。

$$D = \bigcap_p K_p \cap G, \quad D' = \bigcap_p K'_p \cap G \quad \text{とおく。}$$

すると次の性質を満たす定数 L が存在する。

$$D \text{ 上の各可閉 } C^\infty(0, g+1) \text{ 形式 } \beta \text{ に対して } D' \text{ 上の } C^\infty(0, g) \text{ 形式 } \alpha \text{ で}$$

$$\bar{\partial}\alpha = \beta|_{D'}, \quad |\alpha|_{D'} \leq L|\beta|_D$$

となるものが存在する。

証明 G と K_f に対してそれぞれ定理4の条件をみたす g_v と g_v^f が存在する。次の性質をもつ $h_v(x, y)$ をつくる。

1) $h_v(x, y)$ は $U(\partial D) \times V(\overline{D'})$ で3回連続微分可能かつ y について正則。

2) $h(x, y) = \sum_{v=1}^n h_v(x, y)(x_v - y_v)$ は $y \in \overline{D'}$ と $x \in \partial D - \{y\}$ に対して $\operatorname{Re} h(x, y) > 0$

3) $y \in \overline{D'}$, $x \in \partial D \cap V(\overline{D'})$ に対して $h_v(x, y) = g_v(x, y)$ 。

$U(\partial D) \times D'$ においてこの $h_v(x, y)$ を使って $\Omega_{n, g}(x, y)$ と $\operatorname{Ang}(x, y)$ を定義する。定理6は $y \in D'$ について成立する。

$G_v \subset G_{v+1} \subset G$, $K_{fv} \subset K_{fv+1} \subset K_f$, $\bigcup_{v=1}^{\infty} G_v = G$, $\bigcup_{v=1}^{\infty} K_{fv} = K_f$

となる G_v , K_{fv} を作る。 $D_v = G_v \cap \bigcap_f K_{fv}$ とおく。 β の G_v をすべて D_v で置きかえる。すると $\bar{\omega}\alpha = \beta|D'$ となる解を得る。

言平価式も同様に成り立つ。

定義7 $\mathcal{O}$ を G 上の正則函数の芽の層とする。

$\mathcal{O}_{0, g}$ を G 上の $C^\infty(0, g)$ 形式の芽の層とする。

$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{0, 0}$ とする。 $\mathcal{U}$ は G の開被覆とする。

定義7 $C = \{C_i, \dots, C_p\} \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{0, g})$ に対して

$|C| = \sup_{i_1, \dots, i_p} |C_{i_1, \dots, i_p}|_{U_{i_1, \dots, i_p} \cap G}$ とおく。

定義8 $\mathcal{U} = \{K_i, i \in I\}$ を G の有限開被覆とする。

$\mathcal{U}$ が許容的であるというのは K_i が球であって $K_i \cap G$ が区分

的になめらかな境界をもつことである。

$$\mathcal{U}_1 = \{K_i^1; i \in I_1\}, \mathcal{U}_2 = \{K_i^2; i \in I_2\}, \dots$$

と互の許容的被覆の列で次の条件を満たすとする。

1) $\mathcal{U}_r$ は $\mathcal{U}_{r-1}$ より細かい。

2) 互の各開被覆に対してこの列の中に細分が存在する。

3) 細分写像 $\tau_r: I_r \rightarrow I_{r-1}$ が存在して $K_i^r \subset K_{\tau_r(i)}^{r-1}$ となる。

このような列の存在は容易に解る。

$$(\tau_r f)_{i_0 \dots i_p} = f(K_{i_0 \dots i_p}^r, K_{\tau_r(i_0), \dots, \tau_r(i_p)}^{r-1}) f_{\tau_r(i_0) \dots \tau_r(i_p)}$$

$$\text{よって } \tau_r: C^p(\mathcal{U}_{r-1}, \mathcal{D}_0 g) \longrightarrow C^p(\mathcal{U}_r, \mathcal{D}_0 g)$$

を定義する。 $s \geq r$ に対して

$$\tau_{rs} = \tau_s \circ \tau_{s-1} \circ \dots \circ \tau_{r+1} \circ \tau_r \text{ とすると、}$$

$$\tau_{rs}: C^p(\mathcal{U}_{r-1}, \mathcal{D}_0 g) \longrightarrow C^p(\mathcal{U}_s, \mathcal{D}_0 g) \text{ となる。}$$

$\tau_{r,r-1}$ は恒等写像とする。

任意の r に対して 1 の C^∞ 分割 $\{\rho_i^r; i \in I_r\}$ を作る。

補助定理 20 $r \geq 1$ と $1 \leq g \leq n$ に対して次の性質をもつ

実数 M_{rg} が存在する。任意のコサイクル $C \in C^g(\mathcal{U}_r, \mathcal{D})$ に対し

で $\delta C \in C^{g-1}(\mathcal{U}_{r+g-1}, \mathcal{D})$ が存在して

$$\delta C = \tau_{r+1, r+g-1} C, \quad |C| \leq M_{rg} |C| \text{ となる。}$$

証明 $\mathcal{Z}_{0,p}$ を $\mathbb{R}$ 閉 $C^\infty(0,p)$ 形式の芽の層とする。

$C^g(\mathcal{U}_r, \mathcal{Z}_{0,p})$ に対して定理が成立することを示す。

a) $g=1$ のとき,

$C \in C^1(\mathcal{U}_r, \mathbb{Z}_{0,p})$ $\delta C = 0$ とする。

$C'_{i_0} = \sum_i g_i^r C_{i i_0}$ と定義する。すると $\delta C' = C$ となる。

$|C'| \leq |C|$ となる。 $C^2 = \overline{\delta C'}$ で定義すると

$C^2 \in C^0(\mathcal{U}_r, \mathbb{Z}_{0,p+1})$ であり, $|\overline{\delta C'}| \leq M_r$ となる M_r が存在するから, $|C^2| \leq M_r |C|$ となる。 $\delta C^2 = 0$ となることから

$C^2 \in \Gamma(\mathcal{G}, \mathbb{Z}_{0,p+1})$ となる。故に定理 8 より $b' \in \Gamma(\mathcal{G}, \mathcal{D}_{0,p})$ が存在して $\overline{\delta b'} = C^2$, $|b'| \leq K M_r |C|$ となる。

$b = C' - b'$ とおくと $b \in C^0(\mathcal{U}_r, \mathcal{D}_{0,p})$ であり

$$|b| \leq |C'| + |b'| \leq (1 + K M_r) |C|, \quad \delta b = C$$

$\overline{\delta b} = 0$ となる。故に $b \in C^0(\mathcal{U}_r, \mathbb{Z}_{0,p})$ となり $\delta = 1$ のときは証明された。

b) $\delta > 1$ のとき

すべての $\delta' < \delta$ とすべての p に対して証明されたとする。

$C \in C^\delta(\mathcal{U}_r, \mathbb{Z}_{0,p})$, $\delta C = 0$ とする。

$C'_{i_0 \dots i_{\delta-1}} = \sum_i g_i^r C_{i i_0 \dots i_{\delta-1}}$ と定義すると

$C' \in C^{\delta-1}(\mathcal{U}_r, \mathcal{D}_{0,p})$, $\delta C' = C$, $|C'| \leq |C|$

となる。 $C^2 = \overline{\delta C'}$ とおくと $C^2 \in C^{\delta-1}(\mathcal{U}_r, \mathbb{Z}_{0,p+1})$

$\delta C^2 = 0$, $|C^2| \leq M_r |C|$ となる。

帰納法の仮定より

$b' \in C^{\delta-2}(\mathcal{U}_{r+\delta-2}, \mathbb{Z}_{0,p+1})$ が存在して, $\delta b' = \overline{\delta C^2}$

$|b'| \leq M_{r,\delta-1} |C^2| \leq M_{r,\delta-1} M_r |C|$ となる。

任意の $(i_0, \dots, i_{g-2}) \in I_{r+g-1}^{g-1}$ に対して

$$\overline{K_{i_0}^{r+g-1}} \subset K_{\tau_{r+g-1} i_0}^{r+g-2} = K_{j_0}^{r+g-2} \quad \text{となる。}$$

$K_{j_0 \dots j_{g-2}}^{r+g-2}$ 上で $b_{j_0 \dots j_{g-2}}$ は定義される。補助定理 19 より $K_{i_0 \dots i_{g-2}}^{r+g-1}$ 上の $C^\infty(0, p)$ 形式 $b_{i_0 \dots i_{g-2}}^2$ が存在して $\bar{\partial} b_{i_0 \dots i_{g-2}}^2 = b_{j_0 \dots j_{g-2}}^1 |K_{i_0 \dots i_{g-2}}^{r+g-1}$

$$|b_{i_0 \dots i_{g-2}}^2|_{K_{i_0 \dots i_{g-2}}^{r+g-1}} \leq L |b_{j_0 \dots j_{g-2}}^1|_{K_{j_0 \dots j_{g-2}}^{r+g-2}}$$

を満たす。

$$b^2 \in C^{g-2}(\mathcal{U}_{r+g-1}, \mathcal{O}_{\mathcal{O}P}), \quad \bar{\partial} b^2 = \tau_{r+g-1} b^1, \quad |b^2| \leq L M_{r,g-1} M_r |C|$$

となる。 $b = \tau_{r+1, r+g-1} C' - \delta b^2$ とおくと,

$$b \in C^{g-1}(\mathcal{U}_{r+g-1}, \mathcal{O}_{\mathcal{O}P}), \quad |b| \leq |C| (1 + \delta L M_{r,g-1} M_r)$$

$$\delta b = \tau_{r+1, r+g-1} C, \quad \bar{\partial} b = 0$$

となる。故に $b \in C^{g-1}(\mathcal{U}_{r+g-1}, \mathcal{O}_{\mathcal{O}P})$ となり定理は証明された。

定理 9 $\mathcal{U}$ を $\bar{G}$ 上の有界正則函数の芽の層とする。

すると $g \geq 1$ に対して $H^g(\bar{G}, \mathcal{U}) = 0$ となる。

証明 $g \geq 1$, $\xi \in H^g(\bar{G}, \mathcal{U})$ とする。 $\bar{G}$ の開被覆 $\mathcal{U}$ が存在して ξ は γ サイクル $C \in C^g(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ で定義される。

十分細かい許容的被覆 $\mathcal{U}_r$ を取って $C \in C^g(\mathcal{U}_r, \mathcal{O})$, $|C| < \infty$ と

$$1 \text{ であり。補助定理 20 より } \tau_{r+1, r+g-1} C = \delta b$$

$$b \in C^{g-1}(\mathcal{U}_{r+g-1}, \mathcal{O}) \quad |b| < \infty \quad \text{となるものが存在する。}$$

故に $b \in C^{g-1}(\mathcal{U}_{r+g-1}, \mathcal{U})$ となり $\xi = 0$ となる。

故に定理は証明された。

引用文献

1. Aizenberg L. A : Integral representations of holomorphic functions of several complex variables. Soviet Math. Doklady 5, 307-311 (1964)
2. Grauert, H ; Lieb, I ; Das Ramirezsche Integral und die Gleichung $\bar{\partial}f = \alpha$ im Bereich der beschränkten Formen, Rice Univ. Studies.
3. Gunning R. C. ; Rossi, H : Analytic functions of several complex variables. Englewood Cliffs. New Jersey: Prentice Hall 1965.
4. Henkin G. M : Integral Representations of functions holomorphic in strictly pseudo-convex domains and some applications. Matem. Sb. 78 (120), 611-632 (1969).
5. Hörmander, L. An Introduction to complex analysis in several variables. Princeton van Nostrand 1966.
6. Koppelman, W ; The Cauchy integral for functions of several complex variables. Bull. Am. Math. Soc. 73, 373-377 (1967)
7. ———. The Cauchy integral for differential

forms. Bull. Am. Math. Soc. 73 554-556 (1967)

8. Leray. J.; Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe. (problème de Cauchy, III). Bull. Soc. math. France. 87, 1959, 81-180

9. Lieb. I.; Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf streng pseudokonvergen Gebieten.

10. Ramirez de A.E.; Ein Divisionsproblem und Randintegraldarstellungen in der komplexen Analysis. Math. Ann. 184, 172-187 (1970).