

特異点の解消と Igusa local zeta function の計算

筑波大数学系 木村達雄 (Tatsuo KIMURA)

この小論は、著者が井草先生から教わった事の一部を適当にまとめたものであるが、将来この方面の研究が大切であろうと思われる。特に概均質ベクトル空間の相対不変式に対する Igusa local zeta function が興味あるが、それは別の機会にゆずり、ここではごく特別な場合のみを論ずる。

$K = p$ 進体 $\supset O_K \supset P_K = \pi O_K$, $O_K/P_K = \mathbb{F}_q$ などの記号は通常通りとする。 K の絶対値 $|\cdot|_K$ を $|\pi|_K = q^{-1}$ と正規化しておく。 また $U_K = O_K - P_K$ とおく。

dx を K^n の Haar measure で O_K^n の volume が 1 になるものとする。

$O_K[x_1, \dots, x_n] \ni f(x) \neq 0$, $\operatorname{Re} s > 0$ に對して,
 $|f(x)|_K^s$ は K^n 上の $\mathbb{C}$ -valued continuous function になる。 このとき,

$$Z(s) = \int_{O_K^n} |f(x)|_K^s dx \text{ を Igusa local zeta}$$

function とよぶ (Serre が命名した).

$Z(s)$ は右半平面で holomorphic であるが これは $t = q^{-s}$ の有理関数 になることが知られている.

Proposition 1. $O_K[x_1, \dots, x_n] \ni f(x) = m$ 次齊次式

$$N = \# \{ \xi \bmod \pi ; \xi \in O_K^n, f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi \}$$

$t = q^{-s}$, $f^{-1}(\pi^e U_K) = \{ \xi \in O_K^n - \pi O_K^n ; f(\xi) \in \pi^e U_K \}$ とおくと, $Z(t) =$

$$\int_{O_K^n} |f(x)|_K^s dx = \frac{1}{1 - q^{-n} t^m} \left\{ (1 - q^{-n} N) + \sum_{e=1}^{\infty} t^e \cdot \text{vol}(f^{-1}(\pi^e U_K)) \right\}$$

次の3つの Lemmas を証明すれば Prop 1 が得られる。

Lemma 2. $U_n = O_K^n - \pi O_K^n$ とおくと,

$$Z(t) = \frac{1}{1 - q^{-n} t^m} \int_{U_n} |f(x)|_K^s dx$$

Proof. $x = \pi y$ とおくと, $dx = q^{-n} dy$ 及び

$$f(x) = \pi^m f(y), \text{ 即ち } |f(x)|_K^s = t^m |f(y)|_K^s \quad (t = q^{-s})$$

$$\Rightarrow \int_{\pi O_K^n} |f(x)|_K^s dx = q^{-n} t^m \int_{O_K^n} |f(y)|_K^s dy = q^{-n} t^m Z(t)$$

//

$$Z(t) - \int_{U_n} |f(x)|_K^s dx \Rightarrow Z(t) = \frac{1}{1 - q^{-n} t^m} \int_{U_n} |f(x)|_K^s dx //$$

$$\text{Lemma 3. } \int_{U_n} |f(x)|_K^s dx = \sum_{e=0}^{\infty} \text{vol}(f^{-1}(\pi^e U_K)) \cdot t^e$$

Proof. $f(x) \in O_K[x_1, \dots, x_n]$, $U_n = O_K^n - \pi O_K^n \not\equiv \emptyset$

$$f(U_n) \subset O_K = \bigcup_{e \geq 0} \pi^e U_K \sqcup \{0\}$$

$$\Rightarrow U_n = \bigcup_{e \geq 0} f^{-1}(\pi^e U_K) \sqcup \underbrace{f^{-1}(0)}_{\text{measure } 0}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{U_n} |f(x)|_K^s dx &= \sum_{e \geq 0} \int_{f^{-1}(\pi^e U_K)} |f(x)|_K^s dx = \sum_{e=0}^{\infty} q^{-es} \int_{f^{-1}(\pi^e U_K)} dx \\ &= \sum_{e=0}^{\infty} \text{vol}(f^{-1}(\pi^e U_K)) \cdot t^e \quad // \end{aligned}$$

$$\text{Lemma 4. } \text{vol}(f^{-1}(U_K)) = q^n - N$$

$$\text{但 } N = \# \{ \xi \bmod \pi ; \xi \in O_K^n, f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi \}$$

Proof. $f^{-1}(U_K) = \{ \eta \in U_n = O_K^n - \pi O_K^n \mid f(\eta) \not\equiv 0 \bmod \pi \}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\substack{\xi \bmod \pi \\ \xi \in U_n, f(\xi) \not\equiv 0 \bmod \pi}} (\xi + \pi O_K^n) = \sum_{\substack{\xi \bmod \pi \\ \xi \in O_K^n, f(\xi) \not\equiv 0 \bmod \pi}} (\xi + \pi O_K^n) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad (" \xi \in \pi O_K^n \Rightarrow f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi " \text{ により }) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{一方 } dx \text{ は Haar measure であり } \text{vol}(\xi + \pi O_K^n) = \text{vol}(\pi O_K^n) \\ &= q^{-n}, \text{ 従って } f^{-1}(U_K) = \# \{ \xi \bmod \pi ; \xi \in O_K^n, f(\xi) \not\equiv 0 \bmod \pi \} \cdot q^{-n} \\ &= (q^n - N) q^{-n} = 1 - q^{-n} N \quad // \quad \begin{array}{c} \parallel \\ \# \{ \xi \bmod \pi ; \xi \in O_K^n \} - N \\ q^n - N \end{array} \end{aligned}$$

定義 $f(x) \in O_K[x_1, \dots, x_n]$, $\xi \in O_K^n$ に対して

$$\nabla_{\xi} f \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi) \end{bmatrix}, \quad \text{と置く。}$$

Proposition 5 $\xi \in O_K^n$ が $\nabla_{\xi} f \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ かつ

$f(\xi) \equiv 0 \pmod{\pi^e}$ ($\exists e \geq 1$), を満たすならば,

$$\#\{ \eta \pmod{\pi^{e+1}} ; \eta \in O_K^n, \eta \equiv \xi \pmod{\pi^e}, f(\eta) \equiv 0 \pmod{\pi^{e+1}} \} = q^{n-1}$$

Proof. $\eta = \xi + \pi^e \alpha$ ($\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in O_K^n$) とおくと

$$f(\eta) = f(\xi) + \pi^e \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi) \cdot \alpha_k + \pi^{2e} \beta \quad (\exists \beta \in O_K^n)$$

$$\text{ゆえ } f(\xi) + \pi^e \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi) \cdot \alpha_k \equiv 0 \pmod{\pi^{e+1}}, \text{ R.P. } \zeta$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi) \cdot \alpha_k \equiv -\pi^{-e} f(\xi) \pmod{\pi} \quad (\pi^{-e} f(\xi) \in O_K^n \text{ に}$$

注意) をみたす $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ の個数を $\pmod{\pi}$ で定め

ればよい。仮定から $\nabla_{\xi} f \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ ゆえ, 例えは $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi)$

$\not\equiv 0 \pmod{\pi}$ とすれば, $(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \pmod{\pi} \in (O_K/\pi O_K)^{n-1}$

は任意にとれて, これを与えれば $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi) \cdot \alpha_1 \equiv -\pi^{-e} f(\xi) -$

$\sum_{k=2}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi) \alpha_k \pmod{\pi}$ をみたす α_1 は $\pmod{\pi}$ で unique に定まる。 //

定義 $e \geq 1$, $\xi \in O_K^n$ に対して

$$W_{\xi, e} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \eta \bmod \pi^e ; \eta \in O_K^n, \eta \equiv \xi \bmod \pi, f(\eta) \equiv 0 \bmod \pi^e \}$$

とおく。これは $\xi \bmod \pi$ で定まる。

Proposition 6. $\xi \in O_K^n$ が $\forall \xi f \not\equiv 0 \bmod \pi$, $f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi$ をみたすとき, $\# W_{\xi, e} = q^{(n-1)(e-1)}$

Proof. Prop. 5 は,

$$W_{\xi, e+1} = \{ \eta \bmod \pi^{e+1} ; \eta \equiv \xi \bmod \pi, f(\eta) \equiv 0 \bmod \pi^{e+1} \} \ni \eta \bmod \pi^{e+1}$$

$\downarrow \bmod \pi^e$ $\downarrow$

$$W_{\xi, e} = \{ \eta' \bmod \pi^e ; \eta' \equiv \xi \bmod \pi, f(\eta') \equiv 0 \bmod \pi^e \} \ni \eta \bmod \pi^e$$

なる map が surjective で, 各 fibre の元の個数が q^{n-1} であることをいっている。

$$W_{\xi, 1} \xleftarrow{\bmod \pi} W_{\xi, 2} \xleftarrow{\bmod \pi^2} \cdots \xleftarrow{\bmod \pi^e} W_{\xi, e} \xleftarrow{\bmod \pi^e} W_{\xi, e+1} \xleftarrow{\bmod \pi^e} \cdots$$

$$\text{で } \# W_{\xi, 1} = \# \{ \eta \bmod \pi ; \eta \equiv \xi \bmod \pi, f(\eta) \equiv 0 \bmod \pi \} = 1,$$

$$\text{かつ } \# W_{\xi, e+1} = q^{n-1} \cdot \# W_{\xi, e} \quad \text{ゆえに 帰納的に}$$

$$\# W_{\xi, e} = (q^{n-1})^{e-1} \cdot \# W_{\xi, 1} = (q^{n-1})^{e-1}. \quad //$$

$$\text{さて } \xi (= \eta_1) \bmod \pi \leftarrow \eta_2 \bmod \pi^2 \leftarrow \cdots \leftarrow \eta_e \bmod \pi^e \leftarrow \cdots$$

とするとき, $\{ \eta_1, \eta_2, \dots \}$ は O_K^n に於ける Cauchy 列をなす。実際 $\forall e \leq e'$ に対して, $\eta_e \equiv \eta_{e'} \bmod \pi^e$, 即ち

$|\eta_e - \eta_{e'}|_K \leq q^{-e}$ for $\forall e' \geq e$ となる。 O_K^n は $||_K$ に関して完備だから、 $\eta = \lim_{e \rightarrow \infty} \eta_e \in O_K^n$ が存在して $\eta \equiv \xi \pmod{\pi}$ かつ $f(\eta) = 0$ (これは $f(\eta) \equiv 0 \pmod{\pi^e}$ の limit をとればこうなる) となる。 以上をまとめて次のいわゆる lifting lemma (これは Hensel's lemma) を得る。

Theorem 7. $f(x) \in O_K[x_1, \dots, x_n]$, $\xi \in O_K^n$ に対して $\nabla_{\xi} f \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, $f(\xi) \equiv 0 \pmod{\pi}$ ならば $\eta \in O_K^n$ で $\eta \equiv \xi \pmod{\pi}$ かつ $f(\eta) = 0$ となるものがある。

これから、次の結果を得る。

Corollary 8. $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ かつ $mO_K = O_K$ ならば、

$$U_K / U_K^m \xrightarrow[\text{mod } \pi]{} \mathbb{F}_q^\times / (\mathbb{F}_q^\times)^m \quad \text{となる。} \quad \text{特に}$$

$$q = \text{odd} \text{ ならば, } U_K / U_K^2 \xrightarrow[\text{mod } \pi]{} \mathbb{F}_q^\times / (\mathbb{F}_q^\times)^2 (= \text{order } 2 \text{ の cyclic 群})$$

Proof. canonical map $O_K \rightarrow O_K / \pi O_K = \mathbb{F}_q$ は、

$U_K \rightarrow \mathbb{F}_q^\times$ なる surjective hom. を induce するから、これより

$U_K \xrightarrow{\varphi} \mathbb{F}_q^\times / (\mathbb{F}_q^\times)^m$ なる surjective hom. が得られる。

よって、 $\text{Ker } \varphi = U_K^m$, 即ち

$$\lceil u \in U_K, \exists \xi \in U_K \text{ s.t. } \xi^m \equiv u \pmod{\pi} \Rightarrow u \in U_K^m \rceil$$

を示せばよい。

$f(x) = x^m - u \in O_K[x]$ とおく。 $\xi \in U_K$ かつ $mO_K = O_K$ より

$\nabla_{\xi} f = m \xi^{m-1} \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, かつ $f(\xi) = \xi^m - u \equiv 0 \pmod{\pi}$ となるから, Theorem 7 より $\exists \eta \in O_K$ s.t. $f(\eta) = \eta^m - u = 0$
 $\Rightarrow u = \eta^m \in U_K^m$ ($\eta \in U_K = O_K - \pi O_K$ は $u \in U_K$ より明らか)
 よって前半が示された。後半は, $g = \text{odd} \Rightarrow 2 \not\equiv 0 \pmod{\mathbb{F}_g}$
 $\Leftrightarrow 2 \not\equiv 0 \pmod{\pi} \Leftrightarrow 2 \in U_K = O_K - \pi O_K \Leftrightarrow 2O_K = O_K$ より. //

さて 我々の次の目標は 特別な場合に Prop 1 で得た結果を 更に詳しく 調べることである。

Theorem 9. $m(\geq 1)$ 次斉次式 $f(x) \in O_K[x_1, \dots, x_n]$ が, 次の条件 $\star$ を満たすと仮定する。

条件 $\star$: $\nabla_{\xi} f \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ for $\forall \xi \in U_n (= O_K^n - \pi O_K^n)$.

このとき, $t = g^{-s}$, $\text{Re } s > -1$ に対して,

$$Z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{O_K^n} |f(x)|_K^s dx = \frac{(1 - g^{-n}N)(1-t) + (1-g^{-1})(1-g^{-n})t}{(1-g^{-1}t)(1-g^{-n}t^m)}$$

ここで N は Prop 1 で定義された整数である。

まず 次の Lemma を示す. $f^{-1}(\pi^e O_K) \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi \in U_n; f(\xi) \in \pi^e O_K\}$

とおくと,

Lemma 10 条件 $\star$ のもとで $e \geq 1$ に対して

(i) $\text{vol}(f^{-1}(\pi^e O_K)) = (N-1)g^{-n-e+1}$

(ii) $\text{vol}(f^{-1}(\pi^e U_K)) = (N-1)(g-1)g^{-n-e}$

Proof. $f^{-1}(\pi^e O_K) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \xi \in U_n ; f(\xi) \in \pi^e O_K \}$

$$= \sum_{\substack{\xi \bmod \pi^e \\ \xi \in U_n \\ f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi^e}} (\xi + \pi^e O_K^n)$$

$$= \sum_{\substack{\xi \bmod \pi \\ \xi \in U_n \\ f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi}} \sum_{\substack{\eta \bmod \pi^e \\ f(\eta) \equiv 0 \bmod \pi^e \\ \eta \equiv \xi \bmod \pi}} (\eta + \pi^e O_K^n)$$

ここで dx は Haar measure かつ $\text{vol}(\eta + \pi^e O_K^n) = \text{vol}(\pi^e O_K^n) = q^{-ne} \text{vol}(O_K^n) = q^{-ne}$ かつ

$$\text{vol}(f^{-1}(\pi^e O_K)) = \# \{ \xi \bmod \pi ; \xi \in U_n, f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi \} \cdot \# W_{\xi, e} \cdot q^{-ne}$$

となるが

$$\# \{ \xi \bmod \pi ; \xi \in U_n, f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi \} \quad (U_n = O_K^n - \pi O_K^n)$$

$$= \# \{ \xi \bmod \pi ; \xi \in O_K^n, f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi \} - 1 = N - 1$$

また, Prop 6 より $\# W_{\xi, e} = q^{(n-1)(e-1)}$, 従って

$$\text{vol}(f^{-1}(\pi^e O_K)) = (N-1) q^{(n-1)(e-1)} \cdot q^{-ne} = (N-1) q^{-n-e+1}$$

となり (i) を得る。

(ii) は, $\text{vol}(f^{-1}(\pi^e U_K)) = \text{vol}(f^{-1}(\pi^e O_K)) - \text{vol}(f^{-1}(\pi^{e+1} O_K))$

$$= (N-1) q^{-n-e+1} - (N-1) q^{-n-(e+1)+1}$$

$$= (N-1)(q-1) q^{-n-e}.$$

//

Theorem 9 の証明) Prop 1 と Lemma 10 より

$$(1 - q^{-n}t^m) \int_{O_K^n} |f(x)|_K^s dx = (1 - q^{-n}N) + \sum_{e=1}^{\infty} \text{vol}(f^{-1}(\pi^e U_K)) \cdot t^e$$

$$= (1 - q^{-n}N) + (N-1)(q-1)q^{-n} \sum_{e=1}^{\infty} (q^{-1}t)^e$$

$$|q^{-1}t| = |q^{-s-1}| = q^{-\text{Re } s - 1} < 1 \iff \text{Re } s > -1$$

ゆえ, $\text{Re } s > -1$ のとき

$$\sum_{e=1}^{\infty} (q^{-1}t)^e = \frac{q^{-1}t}{1 - q^{-1}t} \quad \text{となり,}$$

$$\begin{aligned} (1 - q^{-n}t^m) \int_{O_K^n} |f(x)|_K^s dx &= (1 - q^{-n}N) + (N-1)(q-1)q^{-n} \cdot \frac{q^{-1}t}{1 - q^{-1}t} \\ &= \frac{(1 - q^{-n}N)(1 - q^{-1}t) + (1 - q^{-1})(N-1)q^{-n}t}{1 - q^{-1}t} \quad \text{とある.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{分子} &= (1 - q^{-n}N) \{ (1-t) + t(1 - q^{-1}) \} + (1 - q^{-1})(N-1)q^{-n}t \\ &= (1 - q^{-n}N)(1-t) + (1 - q^{-1})t \underbrace{\{ 1 - q^{-n}N + (N-1)q^{-n} \}}_{1 - q^{-n}} \\ &= (1 - q^{-n}N)(1-t) + (1 - q^{-1})(1 - q^{-n})t, \end{aligned}$$

即ち

$$\int_{O_K^n} |f(x)|_K^s dx = \frac{1}{1 - q^{-n}t^m} \cdot \frac{(1 - q^{-n}N)(1-t) + (1 - q^{-1})(1 - q^{-n})t}{1 - q^{-1}t} \quad (\text{Re } s > -1)$$

// Th 9.

さて我々は Th 9 の結果を別の方法, 即ち *singularity* の *resolution* を用いて 証明してみよう。その *key point* となるのは 1986 年の Denef の定理である。著者が 1986 年 1 月にアメリカの Johns Hopkins 大学へ *visiting associate professor* として訪ねて 最初に井草先生と大学で食事をしたときに, Igusa *local zeta function* の "Igusa 予想" の重要性について色々伺ったのであるが, その一週間後に Denef (ベルギーの人) が 7 頁程の *preprint* を井草先生のもとに送ってきたが, その中で Igusa 予想は完全に解かれていた。この論文は 井草先生によると 予想を解いたこと以上に もっと大事なことが含まれているが Denef 自身も気付いてはいないのではないか と色々説明して下さり 深い感銘を受けた。そこで, その Denef の定理を述べる。その応用である Igusa 予想の解決については省略する。

$k = \text{数体}$, $k[x_1, \dots, x_n] \ni f(x) \neq 0$ に対し A_k^n 内の f の zeros $V(f)$ の *singularity* の *embedding resolution* が "広中の定理" により存在する。即ち

k 上定義された *non-singular absolutely irreducible variety* Y と k 上定義された *regular map* $h: Y \rightarrow A_k^n$ で 次の 3 条件をみたすものがある。

(1) h は $Y - h^{-1}(V(f))$ 上では *biregular*.

- (2) h は k 上定義された non-singular center をもつ blowing up の有限回の合成である。
- (3) $h^{-1}(V(f))$ の k -既約成分は non-singular であり transversal に交わる (即ち $h^{-1}(V(f))$ に associate する reduced k -scheme は normal crossing のみをもつ)

$C_i (i \in T)$ を $h^{-1}(V(f))$ の k -既約成分 として

$$\left\{ \begin{array}{l} (f \circ h) = \sum_{i \in T} N_i C_i \\ (h^* \bigwedge_{i=1}^n dx_i) = \sum_{i \in T} (\nu_i - 1) C_i \end{array} \right. \quad \text{とする。} \quad (() \text{ は divisor})$$

(2) より Y は $A_k^n \times P_k^l$ ($\exists l$) の subvariety としてよく,
 h を 第一因子への projection map としてよい。 P_k^l を standard な方法で $(l+1)$ 個の affine open sets で cover する。 U_0 を その1つの affine open set として
 $Y_0 = Y \cap (A_k^n \times U_0) \subset A_k^{n+l}$ とおく。
 A_k^{n+l} の affine 座標系を $(x, z) = (x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_l)$ と記すと $h: (x, z) \mapsto x$, となる。

k の 殆どすべての finite place v に対して
 $f(x) \in O_v[x]$ である。

$P_0 = \{ \beta \in O_v[x, z] : \beta = 0 \text{ on } Y_0 \}$ は $O_v[x, z]$ の

ideal である。 $O_u/\pi O_u = \mathbb{F}_q$ として, π の reduction を $\bar{\cdot}$ で表す。

Y_0 の reduction $\bar{Y}_0$ を $\bar{Y}_0 = V(\bar{P}_0) \subset A_{\mathbb{F}_q}^{n+l}$ によって定義する。

但し $\bar{P}_0 = \{\bar{\beta} ; \beta \in P_0\} \subset \mathbb{F}_q[x, z]$ である。

$(l+1)$ の affine open sets U_0 に対し, 我々は reduction $\bar{Y}_0$ をもつが, これらをつなげて reduction $\bar{Y} \subset A_{\mathbb{F}_q}^n \times \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^l$ が得られる。

同様に C_i の reduction を $\bar{C}_i$, $\bar{h}: \bar{Y} \rightarrow A_{\mathbb{F}_q}^n$ で projection map を表す。

Theorem 11 (Denef 1986) $\mathbb{K}$ の殆どすべての finite place v に対して 次のことが成り立つ。

$O_v^n \supset W$ s.t. $W + \pi O_v^n \subset W$ に対して

$$Z_W(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_W |f(x)|_v^s \cdot |dx| \quad \text{とおくと,}$$

$$Z_W(s) = q^{-n} \sum_{I \subset T} C_I \cdot \prod_{i \in I} \frac{(q-1)q^{-N_i s - v_i}}{1 - q^{-N_i s - v_i}} \left(= q^{-n} \sum_{I \subset T} C_I \cdot \prod_{i \in I} \frac{(q-1)q^{-v_i} t^{N_i}}{1 - q^{-v_i} t^{N_i}} \right)$$

但し, $C_I = \#\{\bar{a} \in \bar{Y}(\mathbb{F}_q) \mid \bar{a} \in \bar{C}_i \Leftrightarrow i \in I, \bar{h}(\bar{a}) \in \bar{W}\}$

$$\bar{W} = \{\bar{x} ; x \in W\}$$

この Denef's formula を使って Th 9 を証明してみよう。

$X = \text{Aff}^n$ ($n \geq 2$) の quadratic transformation を考える。

$$X \times \text{Proj}^{n-1} \ni (x_1, \dots, x_n; \underbrace{z_1, \dots, z_n}_{\text{homogeneous coordinate}}) (= (x, z))$$

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, z); x_i z_j - x_j z_i = 0 \text{ for } \forall i, j\}$$

$$\begin{array}{ccc} Y \subset X \times \text{Proj}^{n-1} & & h \stackrel{\text{def}}{=} \text{pr}_1|_Y \text{ により} \\ \downarrow h & \supset \downarrow \text{pr}_1 & \downarrow \text{pr}_1 \\ X & = & X \ni x \end{array} \quad \begin{array}{l} h: Y \rightarrow X \text{ を定義} \\ \text{すると,} \end{array}$$

$$h^{-1}(0) = \{0\} \times \text{Proj}^{n-1} \text{ となる。}$$

一方, $x = (x_1, \dots, x_n) \neq 0$ ならば, $\exists x_i \neq 0$ で

$$x_i z_j - x_j z_i = 0 \text{ により, } z_j = \left(\frac{z_i}{x_i}\right) x_j \text{ for } \forall j$$

$$\text{即ち } (z_1, \dots, z_n) = \lambda (x_1, \dots, x_n) \quad (\lambda = \frac{z_i}{x_i} \neq 0)$$

$$\text{となり } h: Y - h^{-1}(0) \xrightarrow{\sim} X - \{0\} \text{ となる。}$$

さて, $k = \text{数体}$, $f(x) \in k[x_1, \dots, x_n]$ を $m(\geq 1)$ 次
齊次多項式で

$$(\text{仮定} \star) \quad \nabla_{\mathbf{x}} f \neq 0 \text{ for } \forall \mathbf{x} \in X - \{0\},$$

をみたすものとする。これは *critical point* が原点のみ
ということであるから 大変強い条件である。

$$\text{Proj}^{n-1} \supset Z_1 = \{ (z_1, \dots, z_n) ; z_1 \neq 0 \} \text{ とおくと,}$$

$$Z_1 \text{ では } y_i = \frac{z_i}{z_1} \ (i \neq 1) \text{ に対して,}$$

$(y_2, \dots, y_n)$ が Z_1 の *affine local coordinate* になる。

$$Y_1 = Y \cap (X \times Z_1), \dots \text{ とおけば,}$$

$Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_n$ が *affine open covering* になる。

$$Y_1 \text{ のところで考えて, } y_1 = x_1 \text{ とおくと}$$

$$x_1 z_j = x_j z_1 \ (j=2, \dots, n) \Rightarrow x_j = x_1 y_j = y_1 y_j \ (j=2, \dots, n)$$

$$\Rightarrow k[x_1, \dots, x_n][y_2, \dots, y_n] = k[y_1, y_2, \dots, y_n]$$

即ち, $y_1, \dots, y_n$ が Y_1 に於ける局所座標であり,

$$Y_1 \text{ で } f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = x_1^m \cdot f(1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}) \\ = y_1^m \cdot f(1, y_2, \dots, y_n),$$

$$\text{即ち, } f \circ h(y_1, \dots, y_n) = y_1^m \cdot f(1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\Rightarrow (f \circ h) = \underbrace{\{ f(1, y_2, \dots, y_n) = 0 \}}_{(E_1)} + m \underbrace{\{ y_1 = 0 \}}_{(E_2)}$$

但し

$$E_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{Zariski-closure of } h^{-1} \{ x \neq 0, f(x) = 0 \}$$

$$E_2 \stackrel{\text{def}}{=} h^{-1}(0) (= \{0\} \times \text{Proj}^{n-1})$$

$df(x) \neq 0$ for $\forall x \neq 0$ なる仮定があるから E_1 は既約,
 E_2 も勿論既約である。

$$(\ y_1=0 \Rightarrow x_1=0 \Rightarrow x_j = x_1 y_j = 0 \ (2 \leq j \leq n) \Rightarrow x = (x_1, \dots, x_n) = 0$$

より $\{y_1=0\} \subset h^{-1}(0) \cap Y_1 (= \{y_1(x)=0\})$ がわかる。)

$$\text{次に } dx_1 = dy_1, \quad dx_j = d(y_1 y_j) = y_1 dy_j (+ y_j dy_1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) &= dy_1 \wedge (y_1 dy_2) \wedge \dots \wedge (y_1 dy_n) \\ &= y_1^{n-1} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (h^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)) = (n-1) \{y_1=0\} = (n-1) E_2$$

即ち $df(x) \neq 0$ for $\forall x \neq 0$ の仮定のもとでは

$$(1) \quad (f \circ h) = E_1 + m E_2 \quad (\Rightarrow N_1=1, N_2=m)$$

$$(2) \quad (h^*(\bigwedge_{i=1}^n dx_i)) = (n-1) E_2 \quad (\Rightarrow \nu_1=1, \nu_2=n)$$

となる。この場合の Denef's formula (Th 11) は,

Theorem 12 $df(x) \neq 0$ for $\forall x \neq 0$ とする。数体 K の環とす $\mathbb{A}^n$ の finite place v に対して

$$\begin{aligned} Z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{O_v^n} |f(x)|_v^s dx_v &= q^{-n} \left\{ \#Y^0(\mathbb{F}_q) + \#E_1^0(\mathbb{F}_q) \cdot \frac{(q-1)q^{-1}t}{1-q^{-1}t} \right. \\ &\quad \left. + \#E_2^0(\mathbb{F}_q) \frac{(q-1)q^{-n}t^m}{1-q^{-n}t^m} + \#E_{12}(\mathbb{F}_q) \cdot \frac{(q-1)q^{-1}t}{1-q^{-1}t} \cdot \frac{(q-1)q^{-n}t^m}{1-q^{-n}t^m} \right\} \end{aligned}$$

但し $E_{12} = E_1 \cap E_2$, $Y^0 = Y - E_1 \cup E_2$, $E_i^0 = E_i - E_1 \cap E_2$ ($i=1,2$) である. (殆どすべての finite place v に対して $f(x) \in O_v[x_1, \dots, x_n]$ となる)

Theorem 12 を使って Theorem 9 の別証を与えよう (これは井草先生の The Johns Hopkins 大学に於ける 1986 年 2 月 19 日 (水) 午後 1:00 ~ 1:50 の講義で Exercise として出された問題である. この小論では私自身によるのはこの部分だけである. 翌週井草先生に会ったとき「あの Exercise はできましたか?」「ハイ」「それはおめでとう」...)

$x = (x_1, \dots, x_n) \neq 0$ かつ $x_i z_j - x_j z_i = 0$ ($\forall i, j$) のとき, $x_k \neq 0$ とすると, $z_j = \left(\frac{z_k}{x_k}\right) x_j$ for $\forall j$ で $(z_1, \dots, z_n) \neq 0$ ゆえ $z_k \neq 0$, よって $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ なる $f(z_1, \dots, z_n) = 0$, 逆もいえる. Rpt

$x \neq 0$ のとき, $f(x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow f(z_1, \dots, z_n) = 0$

$$\Rightarrow E_1 = \overline{h^{-1}\{x; x \neq 0, f(x) = 0\}}$$

$$= \overline{\left\{ (x_1, \dots, x_n; \underbrace{z_1, \dots, z_n}_{\text{homog. coordinate}}); x_i z_j - x_j z_i = 0, f(z_1, \dots, z_n) = 0, x \neq 0 \right\}}$$

$$= \left\{ (x_1, \dots, x_n; \underbrace{z_1, \dots, z_n}_{\text{homog. coord.}}); x_i z_j - x_j z_i = 0, f(z_1, \dots, z_n) = 0 \right\}$$

$$E_2 = h^{-1}(0) = \left\{ (0, \underbrace{z_1, \dots, z_n}_{\text{homog. coord.}}) \right\} \Rightarrow \#E_2(\mathbb{F}_q) = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$E_{12} = E_1 \cap E_2 = \{ (0, \underbrace{z_1, \dots, z_n}_{\text{homog. coordinate}}) ; f(z_1, \dots, z_n) = 0 \}$$

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \# \{ \xi \bmod \pi ; \xi \in O_K^n, f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi \} = \# \{ \xi \in \mathbb{F}_q^n ; f(\xi) = 0 \}$$

に注意すると

$$\# E_{12}(\mathbb{F}_q) = \frac{N-1}{q-1}$$

$$\# E_{12}^0(\mathbb{F}_q) = \# E_2(\mathbb{F}_q) - \# E_{12}(\mathbb{F}_q) = \frac{q^n - 1}{q - 1} - \frac{N - 1}{q - 1} = \frac{q^n - N}{q - 1}$$

即ち

$$\# E_2^0(\mathbb{F}_q) = \frac{q^n - N}{q - 1}$$

$$E_1^0 = E_1 - E_{12} = \{ (x, z) ; x \cdot z_j - x_j \cdot z_i = 0, f(z_1, \dots, z_n) = 0 \} - \{ (0, z) ; f(z_1, \dots, z_n) = 0 \}$$

$$= 0 \} = \{ (x, z) ; x \neq 0, x \cdot z_j - x_j \cdot z_i = 0, f(z_1, \dots, z_n) = 0 \}$$

$$= \{ (x_1, \dots, x_n ; \underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{homog. coordinate}}) ; x \neq 0, f(x_1, \dots, x_n) = 0 \}$$

homog. coordinate

$$\Rightarrow \# E_1^0(\mathbb{F}_q) = \# \{ x \in \mathbb{F}_q^n ; x \neq 0, f(x) = 0 \} = N - 1, \text{ 即ち}$$

$$\# E_1^0(\mathbb{F}_q) = N - 1$$

さて 集合としては, $Y = (X - \{0\}) \sqcup \text{Proj}^{n-1}$ かつ

$$E_1 \cup E_2 = \{ x ; x \neq 0, f(x) = 0 \} \sqcup \text{Proj}^{n-1} \text{ であり}$$

$$\# Y^0(\mathbb{F}_q) = \# \{ x \in \mathbb{F}_q^n ; f(x) \neq 0 \} = q^n - N, \text{ 即ち}$$

$$\# Y^0(\mathbb{F}_q) = q^n - N$$

これ等の結果を Theorem 12 に代入すると,

$$Z(t) = q^{-n} \left\{ (q^n - N) + (N-1) \frac{(q-1)q^{-1}t}{1-q^{-1}t} + \frac{(q^n - N)q^{-n}t^m}{1-q^{-n}t^m} \right. \\ \left. + \frac{(N-1)q^{-1}t}{1-q^{-1}t} \cdot \frac{(q-1)q^{-n}t^m}{1-q^{-n}t^m} \right\} = \frac{A}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^m)}$$

と おく と,

$$A = (1-q^{-n}N)(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^m) \quad \dots \quad (1)$$

$$+ q^{-n}(N-1)(q-1)q^{-1}t(1-q^{-n}t^m) \quad \dots \quad (2)$$

$$+ (1-q^{-n}N)q^{-n}t^m(1-q^{-1}t) \quad \dots \quad (3)$$

$$+ q^{-n}(N-1)q^{-1}t(q-1)q^{-n}t^m \quad \dots \quad (4)$$

$$= (1-q^{-n}N)(1-q^{-1}t) \{ (1-q^{-n}t^m) + q^{-n}t^m \} \quad \dots \quad (1) + (3)$$

$$+ q^{-n}(N-1)(1-q^{-1})t \{ (1-q^{-n}t^m) + q^{-n}t^m \} \quad \dots \quad (2) + (4)$$

$$= (1-q^{-n}N) \{ (1-t) + (t-q^{-1}t) \} + q^{-n}(N-1)(1-q^{-1})t$$

$$= (1-q^{-n}N)(1-t) + t(1-q^{-1}) \{ (1-q^{-n}N) + q^{-n}(N-1) \}$$

$$= (1-q^{-n}N)(1-t) + (1-q^{-1})(1-q^{-n})t$$

$$\Rightarrow Z(t) = \frac{(1-q^{-n}N)(1-t) + (1-q^{-1})(1-q^{-n})t}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^m)}$$

となり, 再び Theorem 9 を得る. //

以上のことからわかるように, singularity の resolution が具体的にわかる場合には, Igusa local zeta 関数をその方法で計算する可能性がでてくる。

$f(x) = 2$ 次形式 の場合に Th 9 の結果を精密化しよう。できるだけ self-contained に記述する。まず一般論の復習。

$\mathbb{K}$ = 任意の体, $X = \mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間,
 $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ が 2 次形式 (quadratic form) であるとは,
 $\Leftrightarrow \begin{cases} (1) f(cx) = c^2 f(x) \text{ for } \forall c \in \mathbb{K}, \forall x \in X \\ (2) f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x+y) - f(x) - f(y) \text{ は } \mathbb{K}\text{-bilinear} \end{cases}$
 が成り立つこと ($\Rightarrow f(x, x) = 2f(x)$).

$X \supset E = \forall \text{ subset}$, に対して, $\langle E \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{K}\text{-span of } E$,
 $E^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X; x \perp y \text{ (i.e. } f(x, y) = 0) \text{ for } \forall y \in E\}$
 とおくと, $\langle E \rangle, E^\perp$ は X の $\mathbb{K}$ -subspace である。

$X^\perp = \{0\}$ のとき, $f(x) = \text{non-degenerate}$ といふが,
 以下ではこれを仮定する。然るば $X \xrightarrow{\Phi} X^* (= X \text{ の dual})$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $x \mapsto f_x$

$\left(\begin{array}{ccc} f_x: X & \rightarrow & \mathbb{K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & \mapsto & f(x, y) \end{array} \right)$ は ($X^\perp = \{0\}$ より) injection である。

$\dim X = \dim X^*$ ゆえ これは surjection 即ち bijection.

(i) $X \supset E = \text{subspace}$ のときは, Φ は $E^\perp \xrightarrow{\sim} (X/E)^*$
 $\cong \{x^* \in X^*; x^*(E) = 0\}$ を induce する。とくに,

$$\dim E^\perp = \dim(X/E) = \dim X - \dim E$$

(ii) $(E^\perp)^\perp = E$. $\therefore (E^\perp)^\perp \supset E$ は定義より明らか.

一方 (i) より $\dim(E^\perp)^\perp = \dim X - \dim E^\perp = \dim E$ より両者は一致する.

(iii) $f|_E = \text{non-deg.} \Leftrightarrow f|_{E^\perp} = \text{non-deg.}$

$\therefore f|_E = \text{non-deg.} \Leftrightarrow E \cap E^\perp = \{0\} \stackrel{(ii)}{\Leftrightarrow} (E^\perp)^\perp \cap E^\perp = \{0\}$

$\Leftrightarrow f|_{E^\perp} = \text{non-deg.}$ このとき $(E \cap E^\perp = \{0\}, \dim E +$

$\dim E^\perp = \dim X$ より) $X = E \oplus E^\perp$.

定義: (1) $X \ni x$ が isotropic (アイソトロピック) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x)=0$

(本によれば, $x \neq 0$ としているが, ここでは $x=0$ も isotropic)

(2) $X \supset E = \text{subspace}$ が isotropic $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} E \ni \exists x \neq 0$ s.t.

$f(x)=0$. (3) isotropic でないとき anisotropic

(アンアイソトロピック) という。即ち

$X \supset E$ が anisotropic $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x) \neq 0$ for $\forall x \in E - \{0\}$

Lemma 13. $X \ni x \neq 0$ s.t. $f(x)=0$

$\Rightarrow \exists y \in X$ s.t. $f(y)=0$ かつ $f(x, y)=1$

$\therefore X \xrightarrow{\Phi} \mathbb{K}$
 $y \mapsto f(x, y)$ は $\mathbb{K}$ -linear form だが $\Phi=0$ ならば

$f(x, x)=0$ (かつ $f = \text{non-degenerate}$) $\Rightarrow x=0$ 矛盾.

よって $\Phi \neq 0$, よって $\Phi = \text{surjection}$. 故に $\exists y_0 \in X$ s.t.

$f(x, y_0)=1$. $c \in \mathbb{K}$ に對して $f(cx + y_0) =$

$c^2 f(x) + c f(x, y_0) + f(y_0) = c + f(y_0)$ ゆえ,

$$c = -f(y_0), \text{ 即ち } y = -f(y_0)x + y_0 \text{ とおけば,}$$

$$f(y) = 0 \text{ かつ } f(x, y) = f(x, -f(y_0)x) + f(x, y_0) = 1$$

$$(-f(y_0)f(x, x) = -2f(y_0)f(x) = 0) //$$

このとき, $f|_{\langle x, y \rangle} = \text{non-degenerate}$. $\therefore \langle x, y \rangle \ni z_0 = c_0x + d_0y$ かつ $\forall z = cx + dy$ に對し $f(z_0, z) = c_0d + d_0c = 0$
 $\Rightarrow c_0 = d_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 0 //$

よって (iii) より $X = \langle x, y \rangle \oplus \langle x, y \rangle^\perp$ (一般に
 $X = E \oplus E^\perp \ni x = (x_1, x_2) \Rightarrow f(x) = f(x_1) + f(x_2)$)
 もし $\langle x, y \rangle^\perp \ni \exists z \text{ s.t. } z \neq 0, f(z) = 0$ なる Lemma 13 より
 $X = \langle x, y \rangle \hat{\oplus} \langle z, w \rangle \hat{\oplus} (\langle x, y \rangle \oplus \langle z, w \rangle)^\perp$ ($\hat{\oplus}$ は
 直交する直和のイミテーション) 以下 $\langle \rangle$ として

$X = X_0 \hat{\oplus} H$, $X_0 = \text{anisotropic}$, $H = \text{hyperbolic}$,
 即ち $H = \langle e_1, e_{r+1} \rangle \hat{\oplus} \cdots \hat{\oplus} \langle e_r, e_{2r} \rangle$, $f(e_i) = 0 (\forall i)$,
 $f(e_i, e_{r+i}) = 1 (1 \leq i \leq r)$ 即ち $f(\sum_{i=1}^{2r} x_i e_i) = \sum_{i=1}^r x_i x_{i+r}$
 と表わせる。

Lemma 14. $ch(k) \neq 2$ ならば, $X = \langle e_1 \rangle \hat{\oplus} \cdots \hat{\oplus} \langle e_n \rangle$ と
 表わせる。即ち $f(\sum x_i e_i) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2$ ($\forall a_i = f(e_i) \neq 0$)

$\therefore f(x) \neq 0 \Rightarrow f(x, x) = 2f(x) \neq 0 \Rightarrow f|_{\langle x \rangle} = \text{non-deg.}$
 $\Rightarrow X = \langle x \rangle \hat{\oplus} \langle x \rangle^\perp$ かつ $f|_{\langle x \rangle^\perp} = \text{non-deg.}$ よし $\langle x \rangle^\perp \neq (0)$
 なる $\exists y \in \langle x \rangle^\perp$ s.t. $f(y) \neq 0$ 以下 $\langle \rangle$ としてよい。 //

以下 体 K は $\text{ch}(K) \neq 2$ とする. $f(x, x) = 2f(x)$ より, $f(x) = \frac{1}{2}f(x, x)$ が成り立つ.

$$e_1, \dots, e_n \text{ が } X \text{ の } K\text{-basis のとき, } f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \frac{1}{2} f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \frac{1}{2} {}^t x T x \quad \left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right),$$

$$T = (f(e_i, e_j)) \in M_n \quad \text{このとき,}$$

$$d(f) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \det T \quad \text{を } f \text{ の判別式 (discriminant) と}$$

$$\text{い.} \quad \text{他の basis } (e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)P \quad (P \in GL_n(K))$$

$$\Rightarrow T' = {}^t P T P \Rightarrow \det T' = (\det T) \cdot (\det P)^2$$

よて, $d(f) \cdot (K^\times)^2$ は K -basis $e_1, \dots, e_n$ の 選び方によらぬ. 時として, $d(f) \cdot (K^\times)^2$ を f の discriminant とよぶ.

$K = \mathbb{F}_q$ (有限体) の場合を考慮しよう. $\text{ch}(K) \neq 2 \Leftrightarrow q = \text{odd}$, に注意しよう.

Theorem 15. $n \geq 3$ なる non-deg. な 2 次形式 $f(x)$ ($= f(x_1, \dots, x_n)$) は isotropic である. 即ち $\exists x \neq 0 \text{ s.t. } f(x) = 0$

(この Th 自身は $q=2$ 中でも正しい)

$\therefore n \geq 3$ 中 $\exists$ Lemma 4 より $X = \langle e_1 \rangle \hat{\oplus} \langle e_2 \rangle \hat{\oplus} X'$ と表

わせて, $X \ni x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x'$ に対して,

$$f(x) = f(x_1 e_1) + f(x_2 e_2) + f(x') = x_1^2 f(e_1) + x_2^2 f(e_2) + f(x')$$

$$= c(x_1^2 - dx_2^2) + f(x') \quad (c = f(e_1), d = -\frac{f(e_2)}{c} \in \mathbb{K}^\times)$$

(i) $d = d'^2 \in (\mathbb{K}^\times)^2$ の場合, $x = d'e_1 + e_2 \neq 0$ に
 対して, $f(x) = c((d')^2 - d(1)^2) = 0$ となり 0. K.

(ii) $d \notin (\mathbb{K}^\times)^2$ の場合, $\sqrt{d} \notin \mathbb{K} = \mathbb{F}_q \Rightarrow \mathbb{K}(\sqrt{d})$ は
 $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ の 2 次拡大 $\Rightarrow \mathbb{K}(\sqrt{d}) = \mathbb{F}_{q^2}$, とする.

さて, $\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q = 2$ 次 cyclic 拡大, で $\text{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$
 $= \{1, \sigma\}$, $\sigma(x) = x^q$ であり,

ノルム写像 $N: \mathbb{F}_{q^2} \rightarrow \mathbb{F}_q$ は $N(\xi) = \xi^{1+\sigma} = \xi^{1+q}$ で
 あるが, これは surjection. 実際 ($N(0) = 0$ であり),

$$\begin{array}{ccc} 1 \rightarrow \text{Ker } N \rightarrow \mathbb{F}_{q^2}^\times & \xrightarrow{N} & \mathbb{F}_q^\times \quad (\text{exact}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \xi & \mapsto & \xi^{1+q} \end{array}$$

$$\text{とすると, } \text{Ker } N = \{ \xi \in \mathbb{F}_{q^2}^\times ; \xi^{1+q} - 1 = 0 \}$$

$$\Rightarrow \# \text{Ker } N \leq q+1, \text{ 且つ } \mathbb{F}_q^\times \supset N(\mathbb{F}_{q^2}^\times) = \mathbb{F}_{q^2}^\times / \text{Ker } N$$

$$\Rightarrow q-1 \geq \# N(\mathbb{F}_{q^2}^\times) = \frac{q^2-1}{\# \text{Ker } N} \geq \frac{q^2-1}{q+1} = q-1$$

$$\Rightarrow \# N(\mathbb{F}_{q^2}^\times) = q-1 = \# \mathbb{F}_q^\times \Rightarrow N = \text{surjective} /$$

$$\text{さて } \mathbb{F}_{q^2} = \mathbb{K}(\sqrt{d}) \ni x = x_1 + \sqrt{d}x_2 \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{K} = \mathbb{F}_q)$$

$$\text{と表わされて, } N(x) = (x_1 + \sqrt{d}x_2)(x_1 - \sqrt{d}x_2) = x_1^2 - dx_2^2.$$

今, $f(x') \neq 0$ なる $x' \in X'$ を 1 つ fix すると N は全射ゆえ

$$N(x_1 + \sqrt{d}x_2) = -\frac{f(x')}{c} = -\frac{f(x')}{f(e_1)} \in \mathbb{F}_q^\times \text{ なる } x_1, x_2 \text{ が存在}$$

するが, このとき, $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x' \neq 0$ かつ $f(x) = 0$ // Pr 15.

Corollary 16. $K = \mathbb{F}_q$ ($q = \text{odd}$) 上の non-deg. 2次形式 $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ ($n \geq 3$) に対して, ある K -basis が存在して $X \xrightarrow{\sim} K^n$ s.t.

$$f(x) = \begin{cases} cx_1^2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n & (n = \text{odd}) \\ c(x_1^2 - dx_2^2) + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n & (n = \text{even}) \end{cases}$$

このとき $(c, d \in K^\times)$

$$d(f) = 2c \ (n = \text{odd}), \quad d(f) = (2c)^2 d \ (n = \text{even})$$

$\therefore$ 前半は Lemma 14 (及びその前に述べたこと) と Pr 15 より 明か.

$$n = \text{odd} \text{ なら } f(x) = \frac{1}{2} {}^t x T x, \quad T = \begin{pmatrix} 2c & & 0 \\ & \boxed{1} & \\ 0 & & \ddots & \frac{n-1}{2} \\ & & & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det T = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2c$$

$$\Rightarrow d(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2c = 2c \quad (n = \text{odd} \Rightarrow \frac{n^2-1}{2} = \text{even})$$

$n = \text{even}$ なら

$$f(x) = \frac{1}{2} {}^t x T x, \quad T = \begin{pmatrix} 2c & & 0 \\ -2cd & & \\ & \boxed{1} & \\ 0 & & \ddots & \frac{n-2}{2} \\ & & & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det T = (-(2c)^2 d) (-1)^{\frac{n-2}{2}}$$

$$= (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot (2c)^2 d \Rightarrow d(f) = (-1)^{\frac{n}{2}(n-1)} \det T = (-1)^{\frac{n}{2}} (2c)^2 d$$

$$= (2c)^2 d \quad //$$

$\bar{c} \in K = \mathbb{F}_q$, 及び K^n 上の non-deg. 2次形式 $f(x)$ に対して

$N_n(\bar{c}) \stackrel{\text{def}}{=} \# \{ \xi \in K^n ; f(\xi) = \bar{c} \}$ とおく. この数は

$\mathbb{F}^n$ の base のとり方によらないから Cor 16 の標準形として一般性を失わない。

Lemma 17. $n \geq 3$ のとき, $N_n(0) = q^{n-2}(q-1) + N_{n-2}(0) \cdot q$

$\therefore n \geq 3$ とき $\xi = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ に対して,

$$f(\xi) = f(x_1 e_1 + \cdots + x_{n-2} e_{n-2}) + x_{n-1} x_n, \quad \text{従って}$$

$$\{ \xi = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in \mathbb{F}^n ; f(\xi) = 0 \}$$

$$= \{ \xi = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in \mathbb{F}^n ; f(x_1 e_1 + \cdots + x_{n-2} e_{n-2}) = -x_{n-1} x_n \}$$

$$= \bigcup_{i \in \mathbb{F}^\times} \left\{ \xi = x_1 e_1 + \cdots + x_{n-2} e_{n-2} - \frac{i}{x_n} e_{n-1} + x_n e_n ; f(x_1 e_1 + \cdots + x_{n-2} e_{n-2}) = i, x_n \neq 0 \right\}$$

$$\cup \left\{ \xi = x_1 e_1 + \cdots + x_{n-2} e_{n-2} + x_{n-1} e_{n-1} + x_n e_n ; f(x_1 e_1 + \cdots + x_{n-2} e_{n-2}) = 0, x_{n-1} x_n = 0 \right\}$$

$$\text{さて, } \# \{ x_n ; x_n \neq 0 \} = q-1, \quad \# \{ (x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{F}^2 ; x_{n-1} x_n = 0 \}$$

$$= 2q-1 \quad ((0,0) \text{ は } 2 \text{ 回 } \text{入るから } 2q \text{ から } 1 \text{ を引く}), \quad \text{ゆえ}$$

$$N_n(0) = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{F}^\times} N_{(n-2)}(i) \right\} (q-1) + N_{n-2}(0) \cdot \underbrace{(2q-1)}_{(q-1)+q}$$

$$= \underbrace{\left\{ \sum_{i \in \mathbb{F}} N_{(n-2)}(i) \right\}}_{\substack{\parallel \\ \# \mathbb{F}^{n-2} \\ \parallel \\ q^{n-2}}} (q-1) + N_{n-2}(0) \cdot q$$

$$= q^{n-2}(q-1) + N_{n-2}(0)q$$

定義: $\mathbb{F}_q^\times$ は order $(q-1)$ の cyclic 群 $\Rightarrow \mathbb{F}_q^\times = \langle \rho \rangle$

$2 \mid (q-1) \Rightarrow (\mathbb{F}_q^\times)^2 = \langle \rho^2 \rangle$ は index 2 の subgroup.

$\Rightarrow \mathbb{F}_q^\times / (\mathbb{F}_q^\times)^2$ は order 2 の cyclic 群, $= \{1, \sigma\}$

$\chi \in \mathbb{F}_q^\times / (\mathbb{F}_q^\times)^2$ の non-trivial character とする。即ち

$\chi: \mathbb{F}_q^\times / (\mathbb{F}_q^\times)^2 = \{1, \sigma\} \rightarrow \{\pm 1\}$ s.t. $\chi(\sigma) = -1, \chi(1) = 1$.

non-deg. 2次形式 $f(x)$ の判別式 $d(f)$ は $\text{mod}(\mathbb{F}_q^\times)^2$ で定まるから, $\chi(d(f))$ は base のとり方によらず定まる。

Theorem 18. $n \geq 1, k = \mathbb{F}_q, \text{ch}(k) \neq 2$ とし, $f(x)$ を k^n 上の non-degenerate な 2次形式 とする。然るば

$$N_n(0) \stackrel{\text{def}}{=} \# \{ \xi \in k^n ; f(\xi) = 0 \}$$

$$= \begin{cases} q^{n-1} & (n = \text{odd}) \\ q^{n-1} \{ 1 + \chi(d)(q-1)q^{-\frac{n}{2}} \} & (n = \text{even}) \end{cases}$$

Proof. Cor. 16 の標準形で計算すればよい。

$n = \text{odd}$ の場合) $n=1$ とすると, $N_1(0) = \# \{ \xi \in k ; c\xi^2 = 0 \} = \# \{ 0 \} = 1 = q^{n-1} (n=1)$ で O.K. $n \geq 3$ とし, $n-2$ では成立つと仮定する。即ち $N_{n-2}(0) = q^{n-3}$. Lemma 17 より $N_n(0) = q^{n-2}(q-1) + q^{n-3} \cdot q = q^{n-1}$ とちり O.K.

$n = \text{even}$ の場合) まず $n=2$ のとき, 定義から,

$$N_2(0) = \# \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{F}^2 ; x_1^2 - dx_2^2 = 0 \} \quad \text{とある。}$$

$$x_1^2 - dx_2^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ \text{または} \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{F}^{\times 2} \Rightarrow d = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 \in (\mathbb{F}_q^\times)^2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\chi(d) = 1$$

$$\text{従って, } \chi(d) = -1 \Rightarrow N_2(0) = 1.$$

$$\chi(d) = 1 \quad \text{即ち, } d = d'^2 \quad (d' \in \mathbb{F}) \quad \text{のときは, } x_1^2 - dx_2^2 = (x_1 + d'x_2)(x_1 - d'x_2) = 0.$$

$$\text{さて } y_1 = x_1 + d'x_2, \quad y_2 = x_1 - d'x_2 \quad \text{とおくと,}$$

$$\text{ch}(\mathbb{F}) \neq 2 \quad \text{ゆえ, } x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad x_2 = \frac{1}{2d'}(y_1 - y_2)$$

$$\Rightarrow N_2(0) = \# \{ (y_1, y_2) \in \mathbb{F}^2 ; y_1 y_2 = 0 \} = 2q - 1$$

$$\Rightarrow N_2(0) = \begin{cases} 2q - 1 & (\chi(d) = 1) \\ 1 & (\chi(d) = -1) \end{cases} = q + \chi(d)(q - 1)$$

$$= q^{n-2} \{ 1 + \chi(d)(q - 1) q^{-\frac{n}{2}} \} \Big|_{n=2} \quad \text{で成り立ち、なる。}$$

$$n \geq 4 \quad \text{とすると, } (n-2) \text{ で成り立つとすると。即ち,}$$

$$N_{n-2}(0) = q^{n-3} \{ 1 + \chi(d)(q - 1) q^{-\frac{n}{2} + 1} \} \quad \text{とある。Lem 17}$$

$$\text{より, } N_n(0) = q^{n-2}(q - 1) + N_{n-2}(0) \cdot q$$

$$= q^{n-2}(q - 1) + q^{n-2} \{ 1 + \chi(d)(q - 1) q^{-\frac{n}{2} + 1} \}$$

$$= q^{n-1} \{ 1 + \chi(d)(q - 1) q^{-\frac{n}{2}} \} \quad \text{となり O.K.}$$

// FR 18.

Proposition 19. $f(x) \in O_K[x_1, \dots, x_n]$ を non-deg. な 2次形式 とする。このとき、次の2条件は同値。

(1) $\nabla_{\xi} f \neq 0 \pmod{\pi}$ for $\forall \xi \in U_n = O_K^n - \pi O_K^n$

(2) $d = d(f)$ を f の 判別式 とするとき、

$d = d(f) \in U_K = O_K - \pi O_K$.

Proof. $O_K/\pi O_K = \mathbb{F}_q$ で 考えると、

(1) $\Leftrightarrow$ (1)' $\nabla_{\xi} f \neq 0$ for $\forall \xi \in \mathbb{F}_q^n$, $\xi \neq 0$.

(2) $\Leftrightarrow$ (2)' $d(f) \in \mathbb{F}_q^\times$ 即ち $d(f) \neq 0$,

ゆえ (1)' $\Leftrightarrow$ (2)' を 示せばよい。(1)', (2)' とは base のとり方によらない性質だから, Cor. 16 の標準形で考えればよい。

$n = \text{odd}$, $f(x) = c'x_1^2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$ の場合は

$\nabla_{\xi} f = (2c'\xi_1, \xi_3, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_{n-1})$ で、 $d = d(f) = 2c'$.

次に、 $n = \text{even}$, $f(x) = c'(x_1^2 - d'x_2^2) + x_3x_4 + \dots + x_{n-1}x_n$ の

場合は、 $\nabla_{\xi} f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi))$

$= (2c'\xi_1, -2c'd'\xi_2, \xi_4, \xi_3, \dots, \xi_n, \xi_{n-1})$ で $d = d(f) = (2c')^2 d'$

いずれの場合も $\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \neq 0$ には $\nabla_{\xi} f \neq 0$

となる条件は $d = d(f) \neq 0$ となることかわかる。 //

従って $d(f) \in U_K$ なる non-deg. 2次形式 $f(x)$ の Igusa local

zeta function の計算に Th 9 (と Th 18) が使える。

即ち,

Theorem 20. $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \in O_K[x_1, \dots, x_n]$ を non-deg. 2次形式, π の判別式 $d = d(f) \in U_K (= O_K - \pi O_K)$ なるものとする。このとき, $t = q^{-s}$, $\operatorname{Re} s > -1$ に對して,

$$(1) Z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{O_K^n} |f(x)|_K^s dx = \frac{(1-q^{-1})(1-q^{-n}t)}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^2)} \quad (n=\text{odd})$$

$$(2) Z(t) = \int_{O_K^n} |f(x)|_K^s dx = \frac{(1-q^{-1})(1-\chi(d)q^{-\frac{n}{2}})}{(1-q^{-1}t)(1-\chi(d)q^{-\frac{n}{2}}t)} \quad (n=\text{even})$$

但し $O_K/\pi O_K = \mathbb{F}_q$, $q = \text{odd}$ とし, $\chi: U_K \rightarrow \{\pm 1\}$ は

$U_K/U_K^2 \cong \mathbb{F}_q^\times/\mathbb{F}_q^{\times 2}$ (Cor 8 参照) によつて引きおこされる

non-trivial character とする。

Proof. Th 9 に於ける N は,

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \#\{ \xi \bmod \pi; \xi \in O_K^n, f(\xi) \equiv 0 \bmod \pi \}$$

$$= \#\{ \xi \in \mathbb{F}_q^n; f(\xi) = 0 \}$$

$$= \begin{cases} q^{n-1} & (n=\text{odd}) \\ q^{n-1}(1+\chi(d)(q-1)q^{-\frac{n}{2}}) & (n=\text{even}) \end{cases}, \quad \text{となる。}$$

$n=\text{odd}$)

$N = q^{n-1}$ を Th 9 の結果に代入して,

$$Z(t) = \frac{(1-q^{-n} \cdot q^{n-1})(1-t) + (1-q^{-1})(1-q^{-n})t}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^2)}$$

$$= \frac{(1-q^{-1})\{1-t+t-q^{-n}t\}}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^2)} = \frac{(1-q^{-1})(1-q^{-n}t)}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^2)}$$

$n = \text{even}$ の場合) $\chi(d)^2 = 1$ かつ

$$\begin{cases} 1 - q^{-n} = (1 - \chi(d)q^{-\frac{n}{2}})(1 + \chi(d)q^{-\frac{n}{2}}) \\ 1 - q^{-n}t^2 = (1 - \chi(d)q^{-\frac{n}{2}}t)(1 + \chi(d)q^{-\frac{n}{2}}t) \end{cases} \quad \text{である。}$$

$N = q^{n-1}(1 + \chi(d)(q-1)q^{-\frac{n}{2}}) \in \mathbb{F}_q$ に代入すると,

$$Z(t) = \frac{\{1 - q^{-n} \cdot q^{n-1}(1 + \chi(d)(q-1)q^{-\frac{n}{2}})\}(1-t) + (1-q^{-1})(1-q^{-n})t}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^2)}$$

ここで, 分子 $= \{1 - q^{-1} - \chi(d)(1-q^{-1})q^{-\frac{n}{2}}\}(1-t) + (1-q^{-1})(1-q^{-n})t$

$$= (1-q^{-1}) \left[(1 - \chi(d)q^{-\frac{n}{2}})(1-t) + (1-q^{-n})t \right]$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$(1 - \chi(d)q^{-\frac{n}{2}})(1 + \chi(d)q^{-\frac{n}{2}})$$

$$= (1-q^{-1})(1 - \chi(d)q^{-\frac{n}{2}}) \left[1-t + (1 + \chi(d)q^{-\frac{n}{2}})t \right]$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$1 + \chi(d)q^{-\frac{n}{2}}t$$

$$\Rightarrow Z(t) = \frac{(1-q^{-1})(1 - \chi(d)q^{-\frac{n}{2}})(1 + \chi(d)q^{-\frac{n}{2}}t)}{(1-q^{-1}t)(1 - \chi(d)q^{-\frac{n}{2}}t)(1 + \chi(d)q^{-\frac{n}{2}}t)}$$

$$= \frac{(1-q^{-1})(1 - \chi(d)q^{-\frac{n}{2}})}{(1-q^{-1}t)(1 - \chi(d)q^{-\frac{n}{2}}t)}$$

// Th 20.