

汎函数と変分方程式

東大 数理学部 青木和彦

以下の議論は細部にかけて厳密とは言い難い。

§1 [定義1.1] $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ から $\mathbb{R}$ への写像 F (汎函数) が与えられた時 任意の変量 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$(1.1) \quad F(\varphi + \psi) = F(\varphi) + \int_{\mathbb{R}^n} A(x; \varphi) \psi(x) dx + O(\|\psi\|_{m+1}^2)$$

が満たされているものとする。ここに $A(x; \varphi)$ は x の高次 (m)

階超函数を表わし $\|\varphi\|_{m+1}$ は

$$\|\varphi\|_{m+1}^2 = \sum_{p \leq m+1} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\alpha} \left| \frac{\partial^p \varphi}{\partial x_{\alpha_1} \partial x_{\alpha_2} \cdots \partial x_{\alpha_p}} \right|^2 dx$$

を意味する。我々はこの時 $A(x; \varphi)$ のことを F の φ における 偏変分の x 成分 と呼ぶ。

すなわち
$$A(x; \varphi) = \frac{\delta F(\varphi)}{\delta \varphi(x)} \quad \text{とおく。}$$

$A(x; \varphi)$ は Fréchet 微分 従って又 Gateaux 微分 に他ならない^[5]。このような F は 1 階変分可能 と呼ばれる^[2]。さらに $A(x; \varphi)$ が x を固定した時 φ について連続ならば F は

C^1 -級と呼ばれる。同様に

$$\frac{\delta^2 F}{\delta \varphi(x_1) \delta \varphi(x_2)}, \frac{\delta^3 F}{\delta \varphi(x_1) \delta \varphi(x_2) \delta \varphi(x_3)}, \dots$$

が考えられるが、一般に m 階偏変分がすべて連続ならば C^m -級と呼ばれる。こうして有限次元の微分演算の法則がさしたる変更もなく成立する。特に

[命題 1.1]
$$\frac{\delta^2 F}{\delta \varphi(x_1) \delta \varphi(x_2)} = \frac{\delta^2 F}{\delta \varphi(x_2) \delta \varphi(x_1)}$$

が $F \in C^2$ -級で成り立つ。

[命題 1.2] (平均値定理) $F \in C^m$ -級ならば

$$\begin{aligned} F(\varphi + \psi) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} dx \right)^k + \\ &+ \frac{1}{m!} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} dx \right)^m F(\varphi + \theta \psi) \end{aligned}$$

を満たす $0 < \theta < 1$ が存在する。

[系] 特に $\frac{\delta F}{\delta \varphi(x)} = 0$ ならば F は φ に

依存しない。

[定義 1.2] $F(\varphi)$ が

$$F(\varphi + \psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \frac{\delta^k F}{\delta \varphi(x)} dx \right)^k F(\varphi)$$

と無限級数で表される時 F は 実解析的汎函数 と呼ばれる. [命1, 2] から

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m!} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \frac{\delta^m F}{\delta \varphi(x)} dx = 0 \quad \left\{ F(\varphi) = 0 \right.$$

ならば F は実解析的である. 特に次の m -次多項式

$$F(\varphi) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \int_{\mathbb{R}^{nk}} A(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot$$

$$\cdot \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_k) dx_1 \cdots dx_k$$

は実解析的である.

[注意] $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ の代わりに 任意のパラコンパクト多様体 M 上の C^∞ -函数 $C^\infty(M)$ 上の汎函数でも事情は同じである.

[例 1] $\frac{\delta \varphi(x)}{\delta \varphi(y)} = \delta(y-x)$

[例 2] $F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} A(x) \varphi(x)^2 dx$

ならば

$$\frac{\delta F(\varphi)}{\delta \varphi(x)} = 2 A(x) \varphi(x)$$

$$\frac{\delta^2 F(\varphi)}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} = 2 A(x) \delta(x-y)$$

一般に $C^0(\mathbb{R}^n)$ 上の実函数 F が

$$\frac{\delta^2 F(\varphi)}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} = 2 A(x; \varphi) \delta(x-y) + K(x, y; \varphi)$$

と書いて $K(x, y; \varphi)$ が x, y について連続ならば
 $\int_{\mathbb{R}^n} A(x; \varphi) dx$ のことを Leng の ラプラスアン

と云う。すなわち

$$\Delta F = \int_{\mathbb{R}^n} A(x; \varphi) dx$$

§2. 偏変分方程式 (線型)

定義 1 $F, \frac{\delta F}{\delta \varphi(x)}, \frac{\delta^2 F}{\delta \varphi(x_1) \delta \varphi(x_2)}, \dots$

の間に次のような等式

$$(2.1) \sum_{\nu=0}^m \int_{\mathbb{R}^{m_\nu}} \frac{\delta^\nu F(\varphi)}{\delta \varphi(x_1) \delta \varphi(x_2) \cdots \delta \varphi(x_\nu)} \cdot A_\nu(x_1, \dots, x_\nu; \varphi) dx_1 \cdots dx_\nu$$

がみたされる時 $F(\varphi)$ は 線型の偏変分方程式 をみたすことをいう。ここで $A_\nu(x_1, \dots, x_\nu; \varphi)$ は $x_1, \dots, x_\nu$ に依存する φ の関数である。

[定義 2.2] $F(\varphi)$ が与えられた時 適当な自然数

N があって $\nu \geq N+1$ ならば

$$(2.2) \quad \frac{\delta^\nu F(\varphi)}{\delta\varphi(x_1) \cdots \delta\varphi(x_\nu)} = \sum_{k=0}^N K(x_1, \dots, x_\nu; y_1, \dots, y_k; \varphi) \cdot \frac{\delta^k F(\varphi)}{\delta\varphi(y_1) \cdots \delta\varphi(y_k)} dy_1 \cdots dy_k$$

と書ける時 $F(\varphi)$ は 極大過剰決定系 をみたすことをいう。このような N の最小値を この方程式系の 階数 とする。

以下 以下の例を列挙する。

[例 2.1] $F(\varphi)$ が φ に依存しない場合。

$$(2.3) \quad \frac{\delta F}{\delta\varphi(x)} = 0$$

逆も成立する。一般に

$$(2.4) \quad \frac{\delta^\nu F}{\delta\varphi(x_1) \cdots \delta\varphi(x_\nu)} = 0 \quad \text{を満足する方程式}$$

系の解は φ の $(\nu-1)$ 次多項式である。

[例] 2.2] Hermite 多項式 [7°]

$$F(\varphi) = e^{-\frac{1}{2}\|\varphi\|_0^2}$$

$$\|\varphi\|_0^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)^2 dx$$

(2,5) を考えると $\frac{\delta F}{\delta \varphi(x)} = F(\varphi) \cdot (-\varphi(x))$

を満たす. $\frac{\delta^v F}{\delta \varphi(x_1) \cdots \delta \varphi(x_v)}$ ($v \geq 2$) はこの方程式

を繰り返し適用することにより

$$(2,6) \quad \frac{\delta^v F}{\delta \varphi(x_1) \cdots \delta \varphi(x_v)} = F(\varphi) \cdot H_v(x_1, \dots, x_v; \varphi)$$

と書ける. ここに $H_v(x_1, \dots, x_v; \varphi)$ は $x_1, \dots, x_v$ の多項式でこれを v -次エルミート多項式と云う.

$$(2,7) \quad \langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \psi(x) dx$$

とおくと

$$(2,8) \quad e^{-\frac{\|\varphi\|_0^2}{2}} \langle \psi, \varphi \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \int \frac{H_m(x_1, \dots, x_m; \varphi)}{m!} \psi(x_1) \cdots \psi(x_m) \cdot dx_1 \cdots dx_m$$

故に $e^{-\frac{\|\varphi\|^2}{2}} \langle \varphi, \varphi \rangle$ は エルミート多項式
列 $\{H_m(\alpha_1, \dots, \alpha_m; \varphi)\}$ の 母汎函数 である.

[例2.3] 1次元 Ising 模型 [8]

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ とし その Fourier 変換を

$$\tilde{\varphi}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{i p x} \varphi(x) dx \quad \text{とおく.}$$

今 自然数 n によって決まる 超函数列

$$\frac{1}{p_1 + m + i0} \frac{1}{p_1 + p_2 + i0} \cdots \frac{1}{p_1 + \cdots + p_{2n-1} + m + i0} \frac{1}{p_1 + \cdots + p_{2n} + i0}$$

($m > 0$ 質量) $n = 1, 2, 3, \dots$

に対して母汎函数 $F(\varphi)$ を

$$(2.9) \quad F(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{1}{p_1 + m + i0} \frac{1}{p_1 + p_2 + i0} \cdots$$

$$\cdots \frac{1}{p_1 + \cdots + p_{2n-1} + m + i0} \frac{1}{p_1 + \cdots + p_{2n} + i0} \tilde{\varphi}(p_1) \cdots \tilde{\varphi}(p_{2n}).$$

$\cdot dp_1 \cdots dp_{2n}$ によって定義すると

Havisiide 函数 $\Upsilon(x)$ を用いて

$$Y(x) = \int e^{-\sqrt{t} p x} \frac{1}{p_1 + i0} dp_1$$

$$\frac{i}{p_1 + i0} = \int Y(x) e^{i x p_1} dx$$

を用いて

$$(2.10) \quad F(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{1}{p_1 + m + i0} \frac{1}{p_1 + p_2 + i0} \cdots$$

$$\cdots \frac{1}{p_1 + \cdots + p_{2n} + m + i0} \frac{1}{p_1 + \cdots + p_{2n} + i0} \cdot dp_1 \cdots dp_{2n}$$

$$\cdot e^{\sqrt{t}(p_1 x_1 + \cdots + p_{2n} x_{2n})} \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_{2n}) dx_1 \cdots dx_{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2, x_2 \geq x_1} e^{i m (x_2 - x_1)} \varphi(x_1) \varphi(x_2) dx_1 dx_2 \right\}^n$$

$$= \frac{K(\varphi)}{1 - K(\varphi)}$$

$$\therefore K(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2, x_2 \geq x_1} e^{i m (x_2 - x_1)} \varphi(x_1) \varphi(x_2) dx_1 dx_2$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i m (x_2 - x_1)} Y(x_2 - x_1) \varphi(x_1) \varphi(x_2) dx_1 dx_2$$

でこれは 2 次の多項式である。だから $F(\varphi)$ が有理汎函数である。(2,10)より

$$(2,11) \quad (1-K(\varphi))F(\varphi) = K(\varphi)$$

$$(2,12) \quad \frac{\delta^3 \{ (1-K(\varphi))F(\varphi) \}}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)\delta\varphi(x_3)} = 0$$

これは 多項式を係数とする 3 階の 極大決定系。

[例 2,4] 流体模型 [8°]

$A(x, y) = e^{-\beta U(x, y)}$ を $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上の函数として

$$A_\nu(x_1, \dots, x_\nu) = \prod_{1 \leq i < j \leq \nu} A(x_i, x_j)$$

とあく。 $\xi_\nu(x_1, \dots, x_\nu, t)$, $\tau_\nu(x_1, \dots, x_\nu, t)$ を各々次のように定義する：

$$(2,13) \quad \begin{aligned} \xi_\nu(x_1, \dots, x_\nu, t) &= A_\nu(x_1, \dots, x_\nu) + \frac{t}{1!} \int A_{\nu+1}(x_1, \dots, x_\nu, y) dy_1 \\ &+ \frac{t^2}{2!} \iint A_{\nu+2}(x_1, \dots, x_\nu, y_1, y_2) dy_1 dy_2 + \dots \end{aligned}$$

$$(2,14) \quad \tau_\nu(x_1, \dots, x_\nu, t) = \frac{\xi_\nu(x_1, \dots, x_\nu, t)}{\xi_0(x_1, \dots, x_\nu, t)}$$

今 汎函数 $\mathcal{O}(\varphi)$, $F(\varphi)$ を

$$(2,15) \quad \mathcal{A}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{nv}} A_n(x_1, \dots, x_n, t) \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

$$(2,16) \quad F(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{nv}} \tau_n(x_1, \dots, x_n, t) \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

によって定義すれば

$$(2,17) \quad F(\varphi) = \frac{\mathcal{A}(\varphi+t)}{\mathcal{A}(t)}$$

が成立する。ここで $\mathcal{A}(\varphi)$ の収束性については不明。さらに $\mathcal{A}(\varphi)$ が φ について適当な極大系を満たすであろうか？ これは有限次元の ϑ -函数に類似していると思われる。

§3. 場の理論の変分的特徴づけについての考察, Tomonaga-Schwinger 方程式 [10]
 M を 4次元 Minkowski 空間としその座標を $x = (x^0, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ とする。

を満たす. こに $H(x; \varphi)$ は エルミート 作用素 で

$$(3.1) \quad H(x; \varphi) = H_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int H_n(x, x_1, \dots, x_n) \cdot$$

$$\cdot \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

$$(3.2) \quad H_0(x) = -\mathcal{L}_{int}(\varphi)$$

さて $S(\varphi)$ の 公理系 と呼ばれるものは

$$1^\circ \text{ 正値性 } S(\varphi) S(\varphi)^+ = 1$$

$$2^\circ \text{ 共変性 } S(L\varphi) = U_L S(\varphi) U_L^+$$

こに L は Lorentz 変換.

$$3^\circ \text{ 因果律 } \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \left(\frac{\delta S(\varphi)}{\delta \varphi(y)} S(\varphi)^+ \right) = 0$$

$$\text{こに } x^0 < y^0 \text{ 又は } (x^0 - y^0)^2 - (x^1 - y^1)^2 - \dots - (x^3 - y^3)^2 < 0$$

なる x, y にかたゝ, 或は $x \preceq y$.

$$4^\circ \quad S(\varphi + \psi) = S(\varphi) S(\psi)$$

こに $\text{supp } \varphi > \text{supp } \psi$ 或は $\forall x \in \text{supp } \varphi$
 $\forall y \in \text{supp } \psi$ に対して $x^0 > y^0$ をみたす.

$L_0(x)$, $L_{int}(x)$ を各々 真空及び相互作用の Lagrangean とする. すると 作用 A は

$$(3,3) \quad A = \int_M L_0(x) dx + \int_M L_{int}(x) \varphi(x) dx$$

$\varphi \in C_0^\infty(M)$ において与えられる. 一方 Schrödinger 方程式は あるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の 自己共役作用素 H_0 , H_1 を用いて

$$(3,4) \quad i \frac{d\Phi}{dt} = (H_0 + H_1) \Phi$$

において与えられるものとするは $H_1(t, x) = e^{-\frac{H_0 t}{i}} H_1 e^{\frac{H_0 t}{i}}$ とおくことにより

$$(3,5) \quad H_1(t, x) = -L_{int}(x)$$

が成立する. 対応する S 行列は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への ユニタリー作用素であって

$$(3,6) \quad S(\varphi) = T \left(\exp \left(i \int_{-\infty}^{\infty} L_{int}(x) \varphi(x) dx \right) \right)$$

(T は年代順積) で与えられる.

この時 $S(\varphi)$ は

$$(3,7) \quad i \frac{\delta S(\varphi)}{\delta \varphi(x)} = H_0(x, \varphi) S(\varphi) \quad 1)$$

3° は $x \lesssim y$ の時

$$\frac{\delta}{\delta \varphi(x)} (H(y; \varphi)) = 0$$

とも云い換えられる. 方程式 (3.7) は $S(\varphi)$ の代わりに ベクトル $\Phi(\varphi)$ についての方程式

$$(3.8) \quad i \frac{\delta \Phi}{\delta \varphi(x)} = H(x; \varphi) \Phi$$

と同等であり 此が 積分可能 であるための必要十分条件は

$$(3.9) \quad i \frac{\delta H(x; \varphi)}{\delta \varphi(y)} = i \frac{\delta H(y; \varphi)}{\delta \varphi(x)} + [H(x; \varphi), H(y; \varphi)] \quad 2)$$

である^[19] 故に 1°, 2°, 3° の代わりに次の公理系を考える :

1° $H(x; \varphi)$ は エルミート 的

2° $H(x; \varphi)$ は 共変

3° 因果律 $\frac{\delta}{\delta \varphi(x)} (H(y; \varphi)) = 0$

が $x \lesssim y$ で成り立つ.

4° $H(x; 0) = -\mathcal{L}_{\text{int}}(x)$

すると

[命題3.1] $1^0, 2^0, 3^0, 4^0$ をみたす実解析的汎函数 $H(x; \varphi)$ が一意に存在する。
それは $(3, 1)$ の形に書ける。

[命題3.2] $H(x; \varphi)$ が $1^0, 2^0, 3^0, 4^0$ を満たす時 方程式 $(3, 6)$ 又は $(3, 7)$ は 各々 $S(\cdot, 0)H, \Phi(\cdot, 0)$ を与えることにより一意に存在し それは公理 $1^0, 2^0, 3^0, 4^0$ を満たす。
 φ について実解析的である。

証明は 有限次元の Frobenius の定理を拡張すればよい。
[6]

方程式 $(3, 6)$ 又は $(3, 7)$ は 係数 $H(x; \varphi)$ の極大過剰決定系であり $S(\varphi)$ の性質を $H(x; \varphi)$ のそれからも導き出すことが出来ると思われる。もっと 具体的に わかるためには これは物理の問題である。

§4 結論

無限次元解析は筆者の知るかぎりでは数学では Volterra, Hadamard, Gateaux, Levy [27] 等により始まり 変分法と結びついて 多くの成果が得られている。場の理論は変分法

か持ち込まれ定式化が行われているか。これが単なる形式ではなく、実体としてとらえることを筆者は期待したいところである。³⁾

文献

- 1° N.N. Bogolubov and D.V. Shirkov, Introduction to the theory of quantized fields, ³⁷
- 2° P. Levy, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle
- 3° V. Volterra, - Theory of functionals and of integral and integro-differential equations
- 4° N. Wiener, - Differential space, quantum systems and prediction '66, M.I.T.
- 5° M.A. Zorn, Derivatives and Fréchet differentials, Bull. Amer. Math. Soc. Vol 52, 246
- 6° J. Dieudonné, Foundation of modern analysis
- 7° T. Hida, Complex white noise and infinite dimensional unitary group, Nagoya Math. J. '71
- 8° 佐藤, 柏原 and 三輪 Microlocal study of

infinite systems, '74

9° J. Hadamard Oeuvres complètes II

註 1) は 微分幾何では 積分可能な接続
と呼ばれている

2) は 接続の積分可能性の条件,
類似の例は $[9^\circ], [2^\circ]$ にも見出される.

3) 物理学における Bose 粒子の第2量子化
はこのよつ例である. 対応 $q \rightarrow \varphi$, $p = \frac{d}{dq} \rightarrow$
 $\frac{\delta}{\delta \varphi(x)}$ によつて 自然に 無限次元の Lagrange 多様

体が定義される. それが Fock 空間に他ならぬ.