

円管内旋回流の非線形安定計算

航技研 伊藤信毅 (Nobutake Itoh)

電通大院 門田 宏 (Hiroshi Kadota)

1. はじめに

円管内のポアズイユ層流に対して線形安定計算を行なうと、微小攪乱は常に減衰し、流れの安定性を示すことは周知の事実である¹⁻²⁾。そこで、実験的に観測される乱流への遷移は、何らかの原因で流れに有限な振幅を持つ攪乱が導入されて非線形発達するためであろうと考えられ、有限振幅攪乱に対する安定性が種々検討されてきた。しかし、これまでの結果はまだ満足すべき説明を与えていないように思われる³⁻⁴⁾。

一方では、円管がその軸の周りに回転する場合の安定性が研究されており、その場合には非軸対称攪乱に対して線形的に不安定になることが知られている⁵⁻⁶⁾。

本研究では、円管ポアズイユ流および旋回を含む円管流について、フーリエ・チェビシエフ級数展開に基づく安定計算を行なう。旋回のない円管流については、弱い非線形安定理論を拡張した非線形固有値問題を解き、旋回を含む円管流については、線形安定計算によって臨界レイノルズ数を求めるとともに、線形臨界点から出発して非線形中立安定解の振幅に対する変化を調べる。

2. 攪乱方程式

円管の半径と軸方向定常層流の最大流速を基準量として諸量を無次元化する。円柱座標系を (r, θ, x) 、対応する速度成分を $(w, V + v, U + u)$ と書き、 $U = 1 - r^2$, $V = V(r)$ は基本流、 u, v, w は攪乱速度を表わすものとする。非圧縮流の運動方程式にこれら速度成分を代入し、基本流それ自身が基礎式を満たすことを考慮すると攪乱に対する方程式が得られる。圧力項を消去し、さらに攪乱をつぎのようにフーリエ級数に展開する。

$$\mathbf{v}(r, \theta, x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_k(r, t) \exp\{ik(\alpha x + \beta \theta)\} \quad (1)$$

$\beta = 0$ (軸対称) の場合には流れ関数 ψ ($u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$, $w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$) を導入し、非軸対称の場合には v を消去すると、各フーリエ成分を支配する方程式は次のようになる。

非軸対称のとき：

$$\begin{aligned} & \left[- \left(k^2 \alpha^2 + \frac{k^2 \beta^2}{r^2} \right) \left(D^2 + \frac{1}{r} D - k^2 \alpha^2 - \frac{k^2 \beta^2}{r^2} - R \frac{\partial}{\partial t} - ik\alpha RU - \frac{ik\beta R}{r} V \right) - \frac{2k^2 \alpha^2}{r} D \right] u_k \\ & + \left[ik\alpha \left(D^2 + \frac{3}{r} D - k^2 \alpha^2 - \frac{k^2 \beta^2}{r^2} - R \frac{\partial}{\partial t} - ik\alpha RU - \frac{ik\beta R}{r} V \right) \left(D + \frac{1}{r} \right) \right. \\ & \left. + \frac{k^2 \beta^2}{r^3} (2ik\alpha + RrU') - \frac{k\alpha k\beta R}{r} \left(V' + \frac{V}{r} \right) \right] w_k = -k\beta R \left(\frac{k\beta}{r^2} f_k^{(1)} - \frac{k\alpha}{r} f_k^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2ik\alpha}{r} \left[\frac{ik\beta}{r} \left(2D^2 + \frac{2}{r} D - 2k^2 \alpha^2 - \frac{2k^2 \beta^2}{r^2} - R \frac{\partial}{\partial t} - ik\alpha RU - \frac{ik\beta R}{r} V \right) + \left(k^2 \alpha^2 + \frac{k^2 \beta^2}{r^2} \right) RV \right] u_k \\ & + \left[\frac{ik\beta}{r} \left\{ \left(D^2 + \frac{3}{r} D + \frac{1}{r^2} - k^2 \alpha^2 - \frac{k^2 \beta^2}{r^2} - R \frac{\partial}{\partial t} - ik\alpha RU - \frac{ik\beta R}{r} V \right) \left(D^2 + \frac{3}{r} D + \frac{1}{r^2} - k^2 \alpha^2 - \frac{k^2 \beta^2}{r^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + ik\alpha R \left(U'' - \frac{U'}{r} \right) + \frac{ik\beta R}{r} \left(\frac{2V}{r} D + V'' + \frac{V'}{r} + \frac{V}{r^2} \right) \right\} + \frac{2RV}{r} \left(k^2 \alpha^2 + \frac{k^2 \beta^2}{r^2} \right) \left(D + \frac{1}{r} \right) \right] w_k \\ & = -\frac{ik\beta R}{r} \left\{ ik\alpha D f_k^{(1)} + \frac{ik\beta}{r} \left(D + \frac{1}{r} \right) f_k^{(2)} + \left(k^2 \alpha^2 + \frac{k^2 \beta^2}{r^2} \right) f_k^{(3)} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

軸対称のとき：

$$\left[D^2 + \frac{1}{r} D - \frac{1}{r^2} - k\alpha^2 - R \frac{\partial}{\partial t} - ik\alpha RU \right] v_k + \left[\frac{ik\alpha}{r} \left(V' + \frac{V}{r} \right) \right] \psi_k = R f_k^{(2)} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{2ik\alpha}{r} RV \right] v_k + \frac{1}{r} \left[\left(D^2 - \frac{1}{r} D - k^2 \alpha^2 - \frac{k^2 \beta^2}{r^2} - R \frac{\partial}{\partial t} - ik\alpha RU \right) \left(D^2 - \frac{1}{r} D - k^2 \alpha^2 \right) \right. \\ & \left. + ik\alpha R \left(U'' - \frac{U'}{r} \right) \right] \psi_k = R D f_k^{(1)} - ik\alpha R f_k^{(3)} \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 $D = \frac{\partial}{\partial r}$,

$$\begin{aligned} f_k^{(1)} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(il\alpha u_{k-l} + \frac{il\beta}{r} v_{k-l} + w_{k-l} \cdot D \right) u_l \\ f_k^{(2)} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ il\alpha u_{k-l} + \frac{il\beta}{r} v_{k-l} + w_{k-l} \cdot \left(D + \frac{1}{r} \right) \right\} v_l \\ f_k^{(3)} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(il\alpha u_{k-l} + \frac{il\beta}{r} v_{k-l} + w_{k-l} \cdot D \right) w_l - \frac{v_{k-l}}{r} v_l \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

とし、' は r についての微分を表わすものとする。

また境界条件は次式で与えられる。

$$|v_k(0)| < \infty, \quad v_k(1) = 0 \quad (7)$$

3. 円管ポアズイユ流の安定計算

非線形攪乱方程式をチェビシェフ級数展開と反復法に基づく直接解法によって解く。その際 v_k の時間依存性は、弱い非線形安定理論の Reynolds-Potter 法⁷⁾(R&P 法と略記) と Itoh 法⁴⁾の拡張として

$$\text{R\&P 法: } v_k(r, t) = \hat{v}_k(r) \exp(-ik\omega t)$$

$$\text{Itoh 法: } v_k(r, t) = \hat{v}_k(r) \exp(-ik\omega t) \quad (\text{但し } k \geq 2 \text{ のとき } \omega = \omega_r)$$

と仮定し、非線形固有値問題に置き換える。その結果、一般に複素振動数 ω が α, β, R および攪乱強度の代表値 $E \equiv |\hat{u}'_1(1)|^2$ の関数として定まる。もし攪乱強度 E の大きさを調整して ω が実数値をとるように導くことができれば、そのときの $E^{1/2}$ が平衡振幅を与える。

実際の計算ではフーリエ級数を 4 倍高調波まで、チェビシェフ級数を 50 項まで採った。非線形増幅率 ω_i の攪乱強度 E に対する変化の例を図 1 と 2 に示した。図 1 は軸対称攪乱 ($\beta = 0$) の center モード、図 2 は wall モードに対するものである。ランダウ定数 λ_i は $E = 0$ における曲線の傾きを表わすことになる。図 1(a) では E が 0.006 を越えると発散するが、これは R&P 法の定式化が特異点を持つためである⁴⁾。一方 (b) では E を大きくしていくと ω_i が増加の傾向を示すが、かなり大きな振幅においても $\omega_i = 0$ には到達しない。以上の結果はランダウ定数 λ_i の符号のみで平衡振幅が存在するかしないかを予測することはほとんど無意味であることを示している。結局、今回調べた範囲では平衡振幅を見つけることはできなかった。

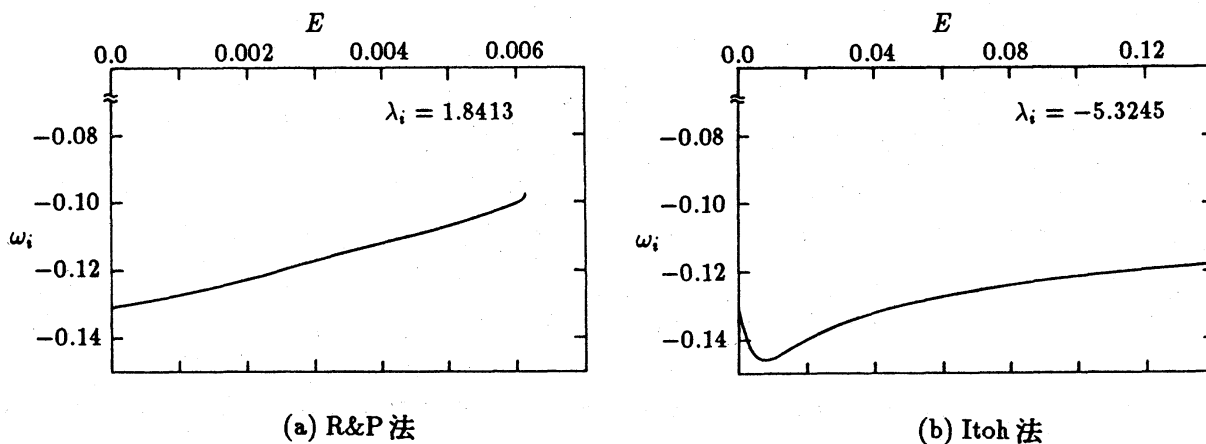


図 1. $R = 1000, \beta = 0$: center モード, $\alpha = 2$ の場合の非線形増幅率 ω_i

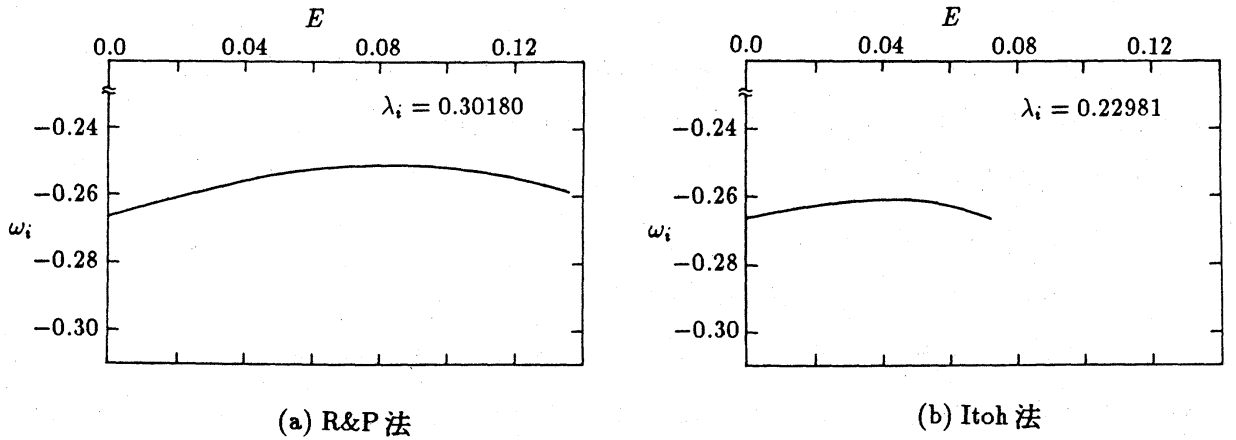


図2. $R = 1000$, $\beta = 0$: wall モード, $\alpha = 2$ の場合の非線形増幅率 ω_i

4. 旋回を含む円管流の安定計算

ここでは、運動方程式の解で軸まわりの旋回流成分を含む流れを考える。速度が x 、 θ に依存せず、圧力勾配が x 方向にだけ存在する場合

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta} = \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad (8)$$

を仮定すると、連続の式より $W = 0$ が得られ、基本流の支配方程式は

$$\frac{1}{R}(D + \frac{1}{r})DU = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (D^2 + \frac{1}{r}D - \frac{1}{r^2})V = 0, \quad \frac{V^2}{r} = DP \quad (9)$$

となる。一般的に、半径 r_o の外筒とともに中心部に半径 r_i の内筒が存在する場合の境界条件

$$U(1) = 0, \quad U(r_i) = U_i, \quad V(1) = V_o, \quad V(r_i) = V_i \quad (10)$$

のもとに (7) 式を解くと、基本流は次のような形に得られる。

$$U = 1 - r^2 + \frac{U_i - 1 + r_i^2}{\log r_i} \log r \quad (11)$$

$$V = \frac{1}{1 - r_i^2} [r_i V_i (\frac{1}{r} - r) + V_o (-\frac{r_i^2}{r} + r)] \quad (12)$$

ここでは、 x 方向の速度がポアズイユ流型分布にそのまま保たれるように、 $U_i = 1 - r_i^2$ に選ぶ。一方 θ 方向の速度については、 $V_i = 0$ および $r_i = 0$ に選べば、外筒を回転させる場合

に相当し、速度分布は

$$\text{外筒回転流} : V = V_o r \quad (13)$$

で与えられる。逆に、外筒を静止 ($V_o = 0$) し、中心に渦糸があるような仮想的な流れを考えて、 $r_i V_i = \text{一定}$ の条件のもとに $r_i \rightarrow 0$ の極限を取れば、速度分布

$$\text{内核回転流} : V = r_i V_i \left(\frac{1}{r} - r \right) \quad (14)$$

が得られる。

図3は外筒回転流の臨界レイノルズ数 R_c を臨界波数および振動数とともに、外筒回転速度 V_o に対して描いたものである。臨界曲線 R_c はほぼ双曲線の形を取り、曲線の下側で流れは安定、上側で流れは非軸対称なスパイラル攪乱に対して不安定となり、 $\beta = 1$ の場合が最も不安定である。内核回転の場合には横座標に $r_i V_i$ を取るとき、同じように双曲線形の臨界曲線が得られ、やはり $\beta = 1$ の非軸対称攪乱に対して最初に不安定になることが示される。

旋回を含む流れでは、線形中立解が存在するので、円管ポアズイユ流の場合のように false method に頼る必要はなく、線形中立解から平衡状態を厳密に追っかけていく計算が可能となる。図4は外筒回転速度 V_o に対する攪乱強度 E の変化を、波数および振動数とともに示したものである。図中の K はフーリエ展開の打ち切り次数であり、図に示した範囲では $K = 7$ までとれば、精密な計算が可能であることを示している。また内核回転流に対しても同様な図が得られている。計算結果は、攪乱振幅強度 E を増しながら中立を維持するためには回転を増さなければならないことを示しており、外筒回転流も内核回転流も超臨界安定平衡型の解であることがわかる。

以上では、外筒が回転する場合と内核が回転する場合について円管流の安定性を調べてきたが、旋回流の速度分布が全く異なるにもかかわらず、両者の線形および非線形安定特性が極めて似ている点は特記すべきである。旋回速度の分布形の違いよりも旋回流成分の存在すること自体が流れの不安定化に大きく影響しているように思われる。そこで、実際に円管入り口から旋回成分を含む外乱が入ってきたらどうなるかを考えてみる。外乱が x 、 θ に依存しないものと仮定すると、 v 方向の攪乱方程式は

$$\left\{ \frac{1}{R} \left(D^2 + \frac{1}{r} D - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \right\} v = 0 \quad (15)$$

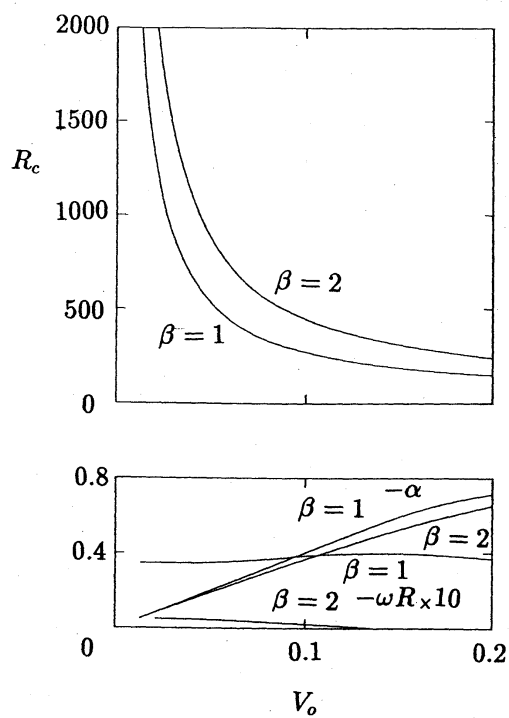


図3. 外筒回転流の臨界曲線

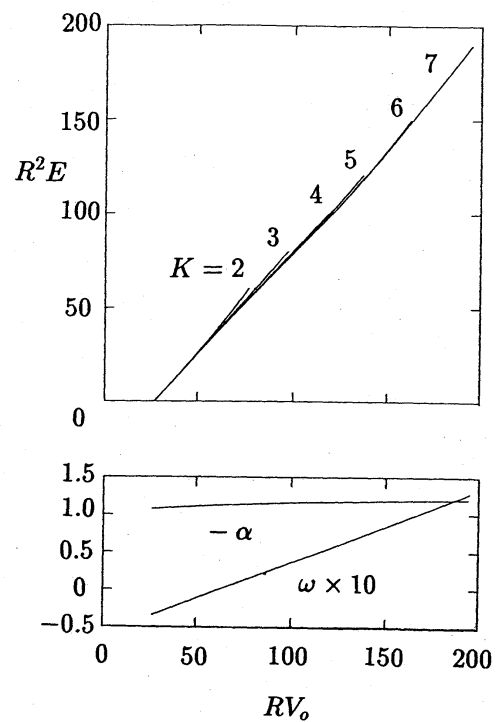
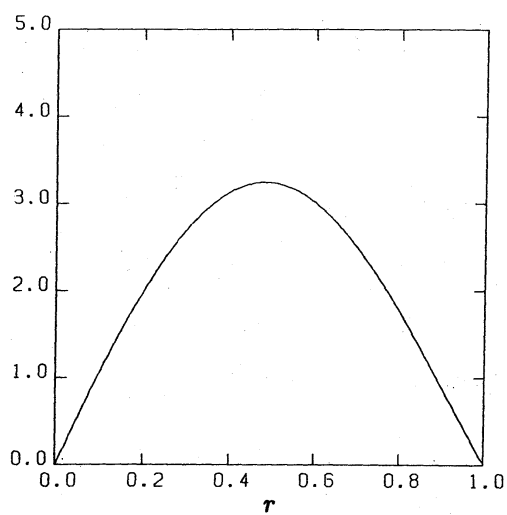
図4. 外筒回転流の平衡振幅 ($R = 1000$, $\beta = 1$)

図5. 固有解の分布

のような線形方程式となるから変数分離

$$v = \hat{v}(r)e^{\sigma t} \quad (16)$$

が許されて、結局次のような固有値問題に帰着する。

$$(D^2 + \frac{1}{r}D - \frac{1}{r^2} - \sigma R)\hat{v} = 0, \quad |\hat{v}(0)| < \infty, \quad \hat{v}(1) = 0 \quad (17)$$

この方程式の固有解はベッセル関数、固有値はベッセル関数の零点で与えられる。固有解は全て減衰解であり、減衰率が最も小さい解は

$$\hat{v} = cJ_1(\sqrt{-\sigma R} r), \quad \sqrt{-\sigma R} = 3.832 \quad (18)$$

で与えられる。任意の分布形の旋回流外乱が与えられたとき、それは(17)の固有関数列に分離され、それぞれの減衰率で減衰する。そうすると最後まで影響を残す旋回流成分は(18)で与えられるはずであるから、この固有解を旋回流として加えた場合の安定性を調べるのが最も重要と考えられる。適当に正規化された旋回流(18)の分布を図5に示す。

図6は臨界レイノルズ数 R_c を臨界波数および振動数とともに、旋回流の強さ V_e に対して描いたもので、外筒回転、内核回転の場合とよく似た傾向を示している。レイノルズ数が大きいと不安定になるために必要な旋回の強さ V_e は小さくなり、例えば $R = 1000$ のときは旋回流速の最大値で約1.6%である。

図7には旋回流の強さ V_e に対する攪乱強度 E の変化を、波数および振動数とともに示した。非線形安定特性についても外筒回転流や内核回転流とほとんど類似の性質であり、やはり超臨界安定平衡型の解になっていることがわかる。図8は攪乱振幅の強さに対して基本波成分の分布形が変化していく様子を描いたものである。 $R^2 E = 80$ のときは基本波の最大振幅 $|u_{1max}|$ = 約8%に相当するが、振幅の大きさが変化しても、分布形はほとんど変わらない。 u_1 は内核回転、 w_1 は外筒回転の場合に近く、 v_1 はその中間の形をしている。図9は平均流の歪み成分の分布形が変化する様子を描いたものである。軸方向の歪みは負であり、 $R^2 E = 80$ のとき $|u_{0max}|$ = 約33% という非常に大きな値になっている。またこのとき、回転方向の歪み v_0 ($|v_{0max}|$ = 2% 弱) も負であり、外からの回転を打ち消すように歪みが発生しており、超臨界安定平衡型の解であることに対応している。

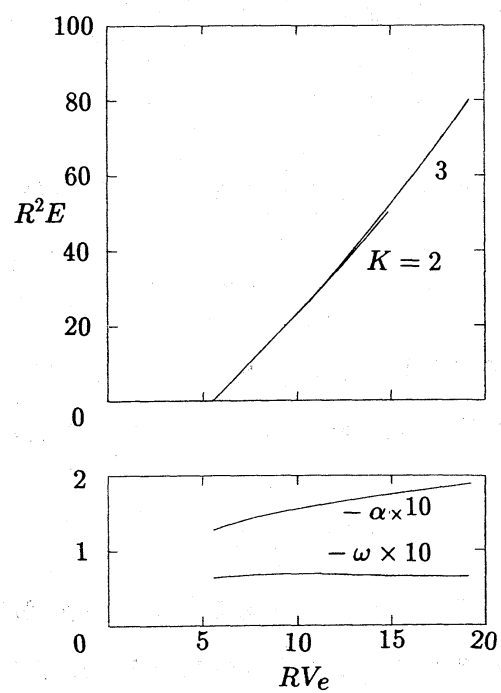
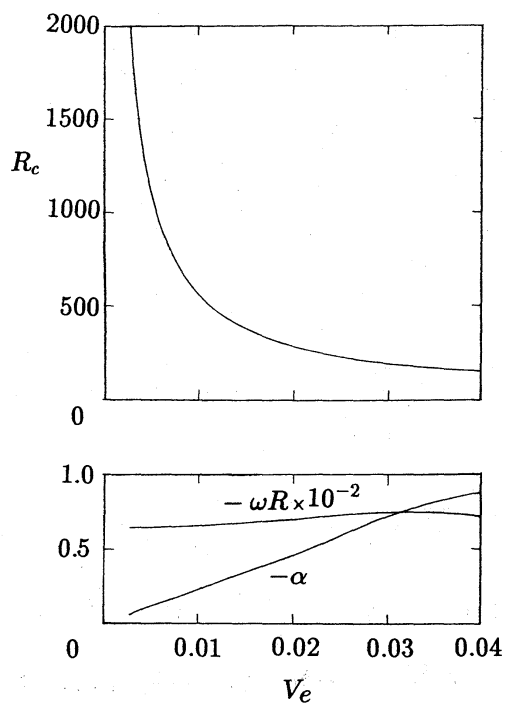


図6. 固有解分布旋回流の臨界曲線 ($\beta = 1$) 図7. 固有解分布旋回流の平衡振幅 ($R = 1000$, $\beta = 1$)

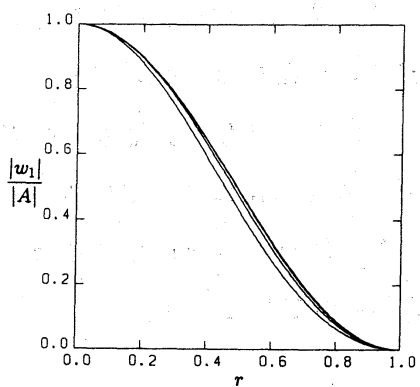
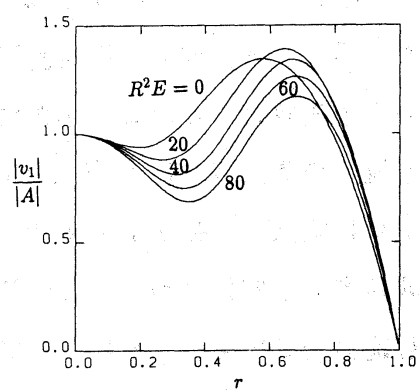
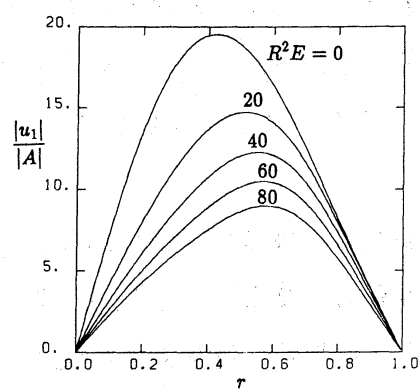


図8. 固有解分布旋回流の
基本波成分の分布
($R = 1000$, $\beta = 1$)

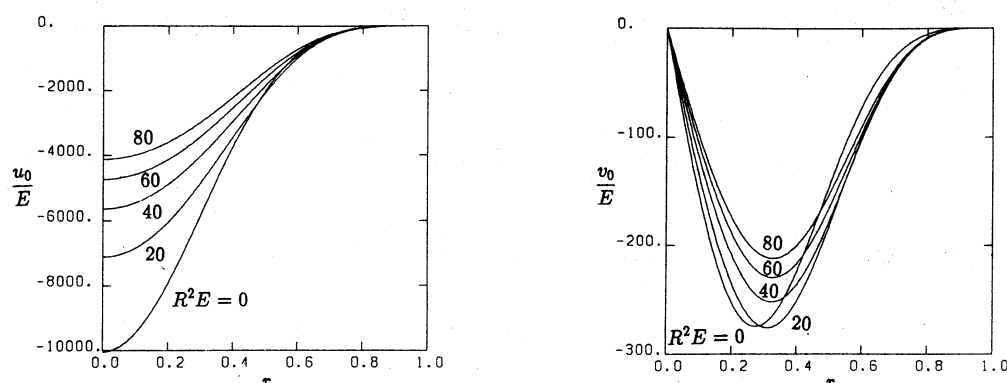


図9. 固有解分布旋回流の平均流の歪み成分の分布 ($R = 1000$, $\beta = 1$)

5. まとめ

フーリエ・チェビシェフ級数展開を用いて、円管内流れの軸対称及び非軸対称攪乱に対する非線形固有値計算を行った。その結果、円管ポアズイユ流の非線形安定計算から得られた増幅率は全て負となり、弱い非線形解析の予測がほとんど意味のないことを示した。調べた範囲では平衡振幅を見つけることはできなかった。旋回成分を含む円管流については、線形安定計算を行ない臨界レイノルズ数を求めるとともに、線形臨界点から出発して、厳密に非線形中立安定解を計算したが、中立状態を維持する回転速度は攪乱振幅と共に増加することがわかった。円管流入部での旋回流成分がある大きさ（例えば $R = 1000$ のとき約 1.6%）を持つと、非軸対称の有限振幅攪乱が発生し、次の不安定のための環境をつくる可能性がある。今後は、このような二次不安定の研究が望まれる。

参考文献

- 1) Davey, A. & Drazin, P. G. (1969) J. Fluid Mech. 36, 209-218.
- 2) Salwen, H., Cotton, F. W. & Grosch, C. E. (1980) J. Fluid Mech. 98, 273-284.
- 3) Davey, A. & Nguyen, H. P. F. (1971) J. Fluid Mech. 45, 701-720.
- 4) Itoh, N. (1977) J. Fluid Mech. 82, 469-479.
- 5) Mackrodt, P. -A. (1976) J. Fluid Mech. 73, 153-164.
- 6) Cotton, F. W. & Salwen, H. (1981) J. Fluid Mech. 108, 101-125.
- 7) Reynolds, W. C. & Potter, M. C. (1967) J. Fluid Mech. 27, 465-492.