

## Duffing 方程式の対称解と非対称解

岩手大教育 中嶋文雄 (Fumio Nakajima)

### §1. まえがき

非線型な電気回路における現象等を記述する方程式として、次の Duffing の方程式が知られている。

$$(1) \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -kv - au - bu^3 + B \cos t \end{cases} \quad (\cdot = \frac{d}{dt})$$

ここで、 $k > 0$ ,  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ ,  $B \geq 0$  は定数である。

これらの parameter の選ぶ方により、(1) は一般に複数個の  $2\pi$ -周期解  $u(t)$  をもつことが知られている。これらの  $2\pi$ -周期解の中で、 $u(t+\pi) \equiv -u(t)$  となるものを *odd harmonic* 解と呼び、これが成立しないものを *non odd harmonic* 解と呼ぶ。即ち、

$$2\pi\text{-周期解} \begin{cases} \text{odd harmonic 解} \\ \text{non odd harmonic 解} \end{cases}$$

と表わされる。

odd harmonic 解は、そのフーリエ級数が奇数次のもののみから成立する。

さて、odd harmonic 解の存在については、 $k=0$  の時無限個の odd harmonic 解が存在することが既に知られており、また、 $k>0$  が十分大ならば、(1) に存在する唯一つの  $2\pi$ -周期解は odd harmonic 解であることは、容易に確かめられる。それでは、一般の  $k>0$  に対し、(1) は odd harmonic 解をもつか？ この問題は、著者の知る限り、これまでに研究されていないようである。本稿の定理 1 において、 $k>0$  では、(1) は常に odd harmonic 解をもつことを示す。そこでは、[3] の不動点定理が用いられている。

次に、 $u(t)$  を odd harmonic 解とすれば、その軌跡  $\{(u(t), v(t)); 0 \leq t \leq 2\pi\}$  は、原点に関し対称となることは、容易に確かめられる。それでは、逆に、原点に関し対称な軌跡をもった  $2\pi$ -周期解は、odd harmonic 解になり得るか？ この問題が、肯定的に解かれることを定理 2 では述べる。そこでは、系 1 の右辺が  $(t, u, v)$  の解析関数であることが用いられている。

定理 2 の結果、

$$\begin{cases} \text{odd harmonic 解} & \longleftrightarrow & \text{対称解} \\ \text{non odd harmonic 解} & \longleftrightarrow & \text{非対称解} \end{cases}$$

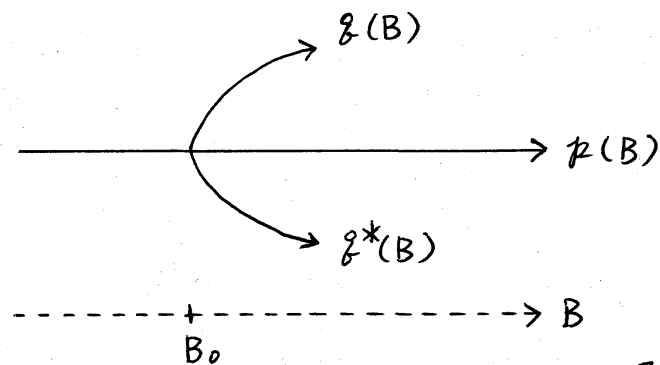
と考えることができる。

次に、*non odd harmonic* 解の存在について考える。

(1)において、 $B$ が十分小ならば、*odd harmonic* 解が唯一存在し、*non odd harmonic* 解は存在しない。

それでは、*non odd harmonic* 解は、いかなる仕組みによって生成し、消滅するか？ これについて、[1]の興味ある物理的結果がある。それによれば、(1)の *parameter*  $B$  がある値  $B_0$  を横切って増加すれば、*odd harmonic* 解から2つの *non odd harmonic* 解が分岐して発生する。

これを図示すれば、



である。

ここで、 $p(B)$ は *odd harmonic* 解の初期値を表わし、 $g(B)$ と  $g^*(B)$  は2つの *non odd harmonic* 解の初期値である。

この時、 $p(B)$ は  $B < B_0$  で *completely stable* で、 $B > B_0$  で *directly unstable* であること、即ち、 $p(B)$ は  $B_0$  でその安定性を変えることが知られている。

(1)において、 $k=0$  の場合、ある仮定の下で、W.S.

Loud は、上述の分岐現象が起ることを数学的に証明した。

本稿では、(1)において  $k > 0$  の場合を考える。

先づ、定理3では、ある条件下で、*directly unstable odd harmonic* 解の存在は、上述の安定性の変化を意味することを示す。定理4では、ある条件下で、*odd harmonic* 解の安定性の変化は、上述の *non odd harmonic* 解の分岐現象の存在を意味することを示す。

定理1～4の結果は(1)のみならず、これを含むある2次元周期系に対しても成立するものである。

(1)の解で、 $t=0$  で  $p \in \mathbb{R}^2$  を通るものを  $(u(t, p), v(t, p))$  と書く。

### [定義1]

- (イ)  $(u(t, p), v(t, p))$  が *odd harmonic* 解であれば、 $p$  を *odd harmonic* 点という。
- (ロ)  $(u(t, p), v(t, p))$  が *non odd harmonic* 解であれば、 $p$  を *non odd harmonic* 点という。

## §2. *odd harmonic* 解の存在について

### 定理1.

(1)において、 $k > 0$  とする。この時、少なくとも1つの *odd harmonic* 解が存在する。

証明.  $p$  が odd harmonic 点であることは.

$$(-u(t+\pi, p), -v(t+\pi, p)) = (u(t, p), v(t, p))$$

となることである。解の初期値に対する唯一性より、これは、

$$(-u(\pi, p), -v(\pi, p)) = p \quad \text{と同値である。}$$

そこで、写像  $S(p) : p \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$S(p) = (-u(\pi, p), -v(\pi, p)) \quad \text{で定義する。}$$

$S$  は  $\mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}^2$  への  $1:1$ 、連続な写像である。

(1) は  $k > 0$  の時、dissipative であることが知られている。

即ち、ある定数  $H_0 > 0$  が存在して、

$$D_{H_0} = \{p \in \mathbb{R}^2 ; |p| \leq H_0\}$$

(ここで、 $||$  は  $\mathbb{R}^2$  のあるノルムとする) と置くと、

任意の解  $p \in \mathbb{R}^2$  に対し、

$$(u(t, p), v(t, p)) \in D_{H_0} \quad (t: \text{十分大})$$

である。よって、

$$S^n(p) \in D_{H_0} \quad (n: \text{十分大})$$

である。[3] の不動点定理を用いると、 $S$  は

$D_{H_0}$  の中に不動点  $p$  をもつ。即ち

$$S(p) = p$$

である。この  $p$  は odd harmonic 点である。

(i) の  $2\pi$ -周期解  $(u(t), v(t))$  に対し、その軌跡  $L$ ;

$$L = \{ (u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq t \leq 2\pi \}$$

は、閉曲線となる。次にこの曲線の形状について考察する。

### 定理 2.

(i) ii) の *odd harmonic* 解  $(u(t), v(t))$  の軌跡  $L$  は、

原点に関し対称となる。

iii)  $2\pi$ -周期解で、その軌跡が原点に関し対称ならば、

この解は *odd harmonic* である。

証明 (i) を示す。iii) は省略する。

$$L = \{ (u(t), v(t)) ; 0 \leq t \leq \pi \} \cup \{ (u(t), v(t)) ; \pi \leq t \leq 2\pi \}$$

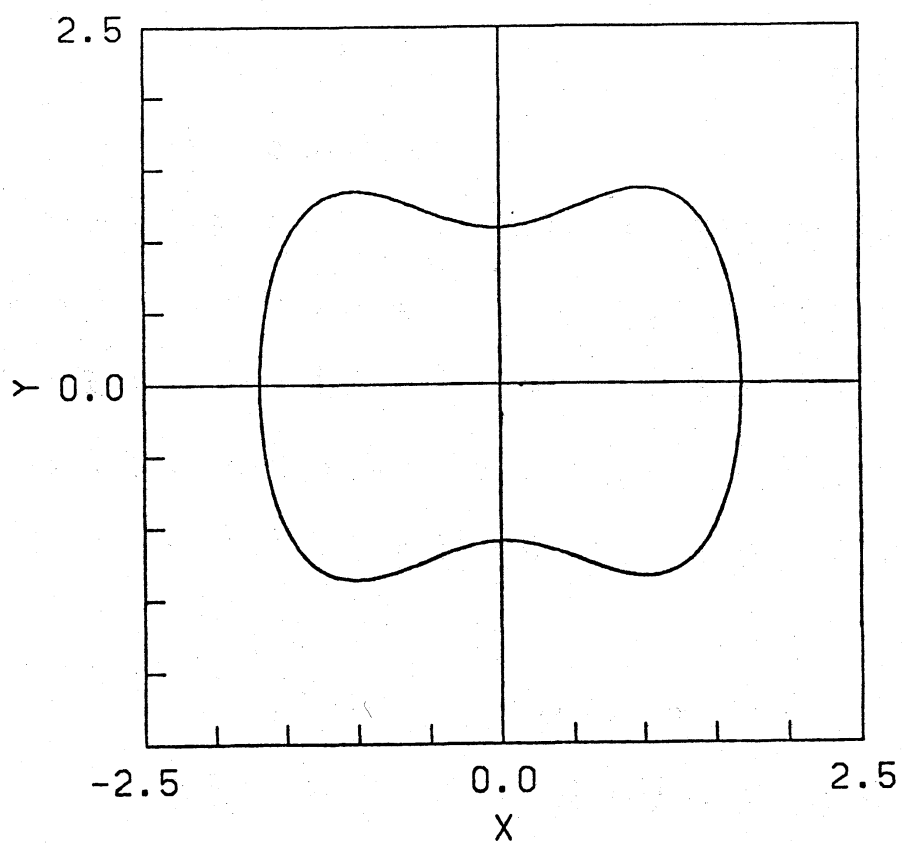
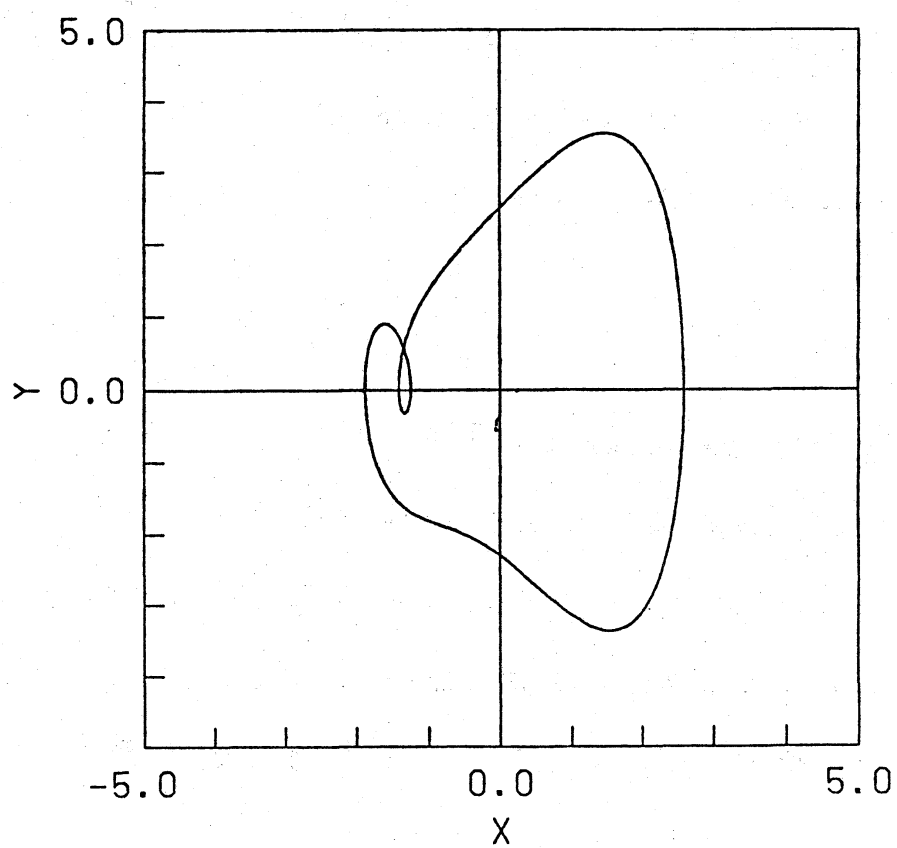
と書ける。

$$u(t+\pi) = -u(t), \quad v(t+\pi) = -v(t) \quad \text{より}$$

$$L = \{ (u(t), v(t)) ; 0 \leq t \leq \pi \} \cup \{ -(u(t), v(t)) ; 0 \leq t \leq \pi \}$$

ゆえに、 $L$  は原点に関し対称となる。

図 1. は、[7] より引用した対称な解軌道の例、及び非対称な例である。そこでは、ii) において、 $a=0$ ,  $b=1$  の場合が扱われている。

$K = 0.050 \quad B = 1.400$  $K = 0.200 \quad B = 4.000$ 

## §3. 安定性の変化

定理 1 によって、(1) においていかなる  $B$  に対しても、  
odd harmonic 解  $p(B)$  が存在する。  $B$  が連続的に変化する時、 $p(B)$  が連続的に変化しても、 $p(B)$  が安定から不安定に変化することがある。ここでは、この事について述べる。

$p \in (1)$  の odd harmonic 点とし、 $(u(t, p), v(t, p))$  を odd harmonic 解とすると、対応する変分方程式は、

$$(2) \quad \dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a - 3bu^2(t, p) & -b \end{pmatrix} y$$

$\pi$ -周期的となる。この基本解行列を  $Y(t)$  とすると、

$$Y(2\pi) = Y^2(\pi)$$

となり、 $Y(\pi)$  の固有値を  $\mu_1, \mu_2$  とすれば、 $Y(2\pi)$  の固有値、即ち、 $(u(t, p), v(t, p))$  の特性根は、 $\mu_1^2, \mu_2^2$  となる。  
ゆえに、次の定義が可能となる。

## [定義 2]

$p \in$  odd harmonic 点とする。

(i)  $p$  が completely stable であるとは、

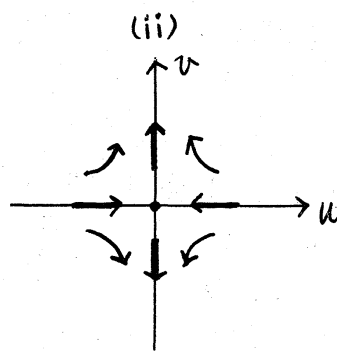
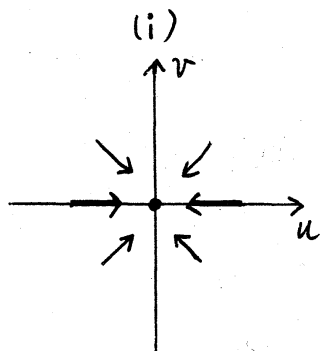
$$|\mu_1^2| < 1, \quad |\mu_2^2| < 1 \quad \text{となることである。}$$

(ii)  $p$  が directly unstable であるとは、

$$0 < \mu_1^2 < 1 < \mu_2^2 \quad \text{となることである。}$$



上の (i), (ii) を図示すると、次の様になる。ここで  $p$  は原点であり、流れは Poincaré 写像によるものである。



次の定理が成立する。

### 定理 3.

ある正数  $B_1$  が存在して、system (1) は、 $B = B_1$  の時、

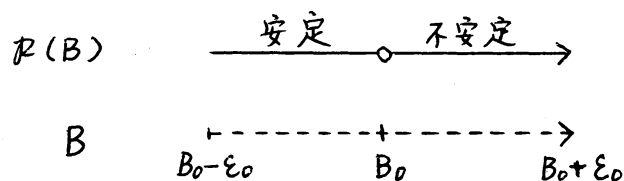
directly unstable な odd harmonic 解をもち、この変分方程式 (2) の基本解行列  $Y(t)$  に対し、 $Y(\pi)$  の固有値は共に正とある。

この時、ある正数  $B_0$  ( $0 < B_0 < B_1$ ) と小さな数  $\varepsilon_0 > 0$  が存在して、 $|B - B_0| < \varepsilon_0$  なる  $B$  に対し、(1) は odd harmonic 点  $p(B)$  をもち、 $p(B)$  は  $B$  の解析関数で、

$B_0 - \varepsilon_0 < B < B_0$  で、 $p(B)$  は completely stable で、 $B_0 < B < B_0 + \varepsilon_0$  で、 $p(B)$  は directly unstable となり、 $B = B_0$  の時、 $p(B_0)$  に対応する変分方程式 (2) は、自明でない  $\pi$ -周期解をもつ。

注. 上の結果は、 $k > 0$  を固定して、 $B$  を減少させる場合を考えているが、同様の結果が、 $B > 0$  を固定し  $k > 0$  を増加させても得られる。

定理3の結論を図示すると、次の様になる。



定理3の証明の概略を示す。

Step 1. (1)の解で、 $t=0$  で  $p$  を通るものを

$$\chi(t, p; B) = (u(t, p; B), v(t, p; B))$$

と書く。点  $p$  が *odd harmonic* であることは、

$$(3) \quad p + \chi(\pi, p; B) = 0$$

と同値である。

$B = B_1$  の時、定理の仮定の *odd harmonic point* を  $p_1$  とすると、

$$p_1 + \chi(\pi, p_1; B_1) = 0$$

となる。陰関数の定理を(3)に適用して、先づ

$B = B_1$  の近傍の  $B$  に対し、(3)の解  $p(B)$  を見出す。

この  $p(B)$  を  $B < B_1$  の方向に解析接続し、その最大の定義域を  $(\omega, B_1]$  とかく。一致の定理より、

$p(B)$  は  $(\omega, B_1]$  で (3) を満たす。ゆえに  $p(B)$  は  $(\omega, B_1]$  で odd harmonic 点となる。

Step 2.  $p(B)$  に対する (2) の基本解を  $Y(t, B)$  とし、

$Y(\pi, B)$  の固有値を  $\mu_1(B), \mu_2(B)$  とする。

すると、定理の仮定は

$$0 < \mu_1(B_1) < 1 < \mu_2(B_1) \quad \text{となる。}$$

もし、 $0 \in (\omega, B_1]$  ならば、 $B=0$  の時 (1) は

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -kv - a u - b u^3 \end{cases}$$

となり、この  $2\pi$ -周期点は唯一つ  $p(0) = (0, 0)$  で

$$|\mu_1(0)| < 1, \quad |\mu_2(0)| < 1 \quad \text{となる。}$$

この事より、ある  $B_0 > 0$  ;  $B_0 \in (\omega, B_1]$  が存在

して、 $B_0 < B < B_0 + \varepsilon_0$  で  $0 < \mu_1(B) < 1 < \mu_2(B)$ ,

$$B = B_0 \quad \text{で} \quad \mu_2(B) < 1, \mu_2(B) = 1$$

$$B_0 - \varepsilon_0 < B < B_0 \quad \text{で} \quad 0 < \mu_1(B) < 1, 0 < \mu_2(B) < 1$$

を示す。これは、定理の結論である。

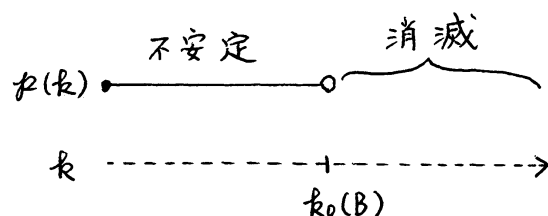
$0 \notin (\omega, B_1]$  の場合は省略する。

定理3より条件「 $Y(\pi)$  の固有値が正である」は、落せないことを示す。

(1) において、 $0 < a < 1$  で、 $B$  が十分小なる場合を考え

る。この時、[4]より、 $k$ が  $B$  に応じて十分小さければ、directly unstable な odd harmonic 解をもち、 $Y(\pi)$  の固有値は負であることが確かめられる。

次に、 $B$  を固定したまま、 $k$  を 0 より増加させて行けば、[2]より、 $B$  に応じて決まるある定数  $k_0(B) > 0$  が存在して、 $0 < k \leq k_0(B)$  では odd harmonic 点  $p(k)$  が存在し、その指数は  $-1$  であることが確かめられる。ゆえに、 $p(k)$  は completely stable になり得ない。更に、 $k > k_0(B)$  では  $p(k_0(B))$  の近傍に、 $2\pi$ -周期点は存在しない、いわゆる jump 現象が起きている。これを図示する。



#### §4. non odd harmonic 解の存在

non odd harmonic 解は、odd harmonic 解より分岐して生ずることを示す。

#### 定理 4.

定理 3 の結論を全て仮定する。

この時、十分小なる  $\varepsilon > 0$  ( $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ) が存在して、次の (i) あるいは (ii) が成立する。

(i)  $B_0 < B < B_0 + \varepsilon$  に対し、non odd harmonic 点  $z(B)$  と  $z^*(B)$  が存在して、

$$z(B) \rightarrow z(B_0), \quad z^*(B) \rightarrow z(B_0) \quad (B \rightarrow B_0)$$

となる。

(ii)  $B_0 - \varepsilon < B < B_0$  に対し、(i) と同様の事が成立する。

定理 3 と 4 の結果は [1] の物理的結果によって明確化される。そこでは、 $k=0.2$ ,  $a=0$ ,  $b=1$  で、 $B$  をある単位で測って、 $B=0.3$  から  $B=3.0$  まで増加させて行く時の図 2 で示される  $2\pi$ -周期点の軌跡が、観測されている。

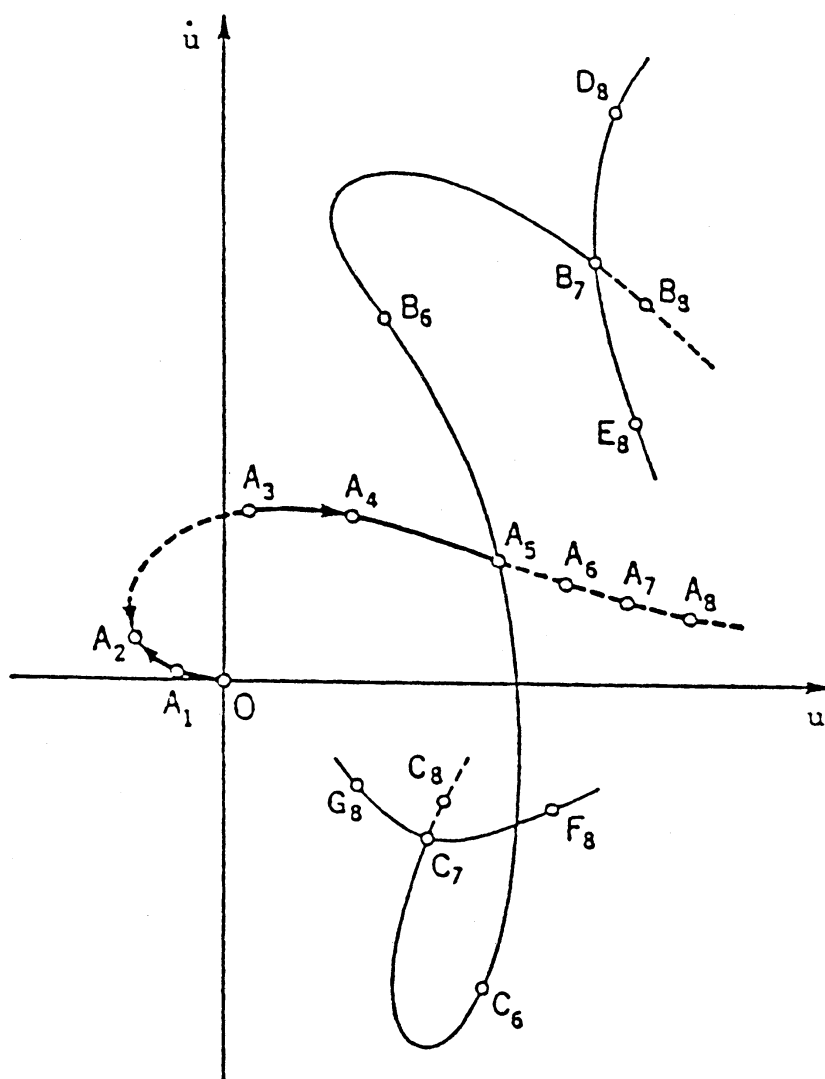
図 2 で、 $B=0.3$  から  $B=2.403$  まで変化する時、odd harmonic 点  $P(B)$  は  $A_4$  から  $A_5$  まで曲線に沿って動き、completely stable である。他方、 $B=2.403$  から  $B=3$  まで変化する時、odd harmonic 点  $P(B)$  は  $A_5$  から  $A_6$  までの曲線に沿って動き、directly unstable である。即ち、定理 3 の結論に即して言えば、 $B_0=2.403$  で  $P(B_0)=A_5$  である。

この時、 $A_5$  より 2 つの non odd harmonic 点  $z(B)$  と  $z^*(B)$  が分岐して発生し、

$$z(B) : A_5 \rightarrow B_6,$$

$$g^*(B) : A_5 \rightarrow C_6$$

である。  $g(3) = B_6$  で  $g^*(3) = C_6$  で、  $p(3) = A_6$  である。



12) 2.

## [参 考 文 献]

- [1] C. Hayashi, Y. Ueda and H. Kawakami,  
Transformation theory as applied to the solutions  
of non-linear differential equations of the second  
order, *Int. J. Non-linear Mechanics*, 4 (1969),  
pp. 235 - 255.
- [2] J. K. Hale and D. Z. Tábóas, Interaction of damping  
and forcing in a second order equation, *Nonlinear  
Analysis, Theory, Method and Applications*,  
Vol. 2, No. 1 (1978), pp. 77-84.
- [3] W. A. Horn, Some fixed point theorems for compact  
maps and flows in Banach spaces, *Transactions  
of the American Mathematical Society*, Vol. 149  
(1970).
- [4] W. S. Loud, Periodic solutions of  $\ddot{x} + c\dot{x} + g(x) = \varepsilon f(t)$ ,  
*Amer. Math. Soc. Mem.*, 31 (1958).
- [5] W. S. Loud, Nonsymmetric periodic solutions of  
certain second order nonlinear differential equations,  
*J. Differential Equations*, 5 (1969), pp. 352-368.
- [6] F. Nakajima, Index theorems and bifurcations  
in Duffing's equation, *Lecture Note in Numerical*

and *Applied Analysis*, 8(1985), pp. 133-162.

- [7] Y. Ueda, *Steady motions exhibited by Duffing's equation, a picture book of regular and chaotic motions*, *Proceedings of a conference of new approaches to nonlinear problems in dynamics*, SIAM (1980).