

条件付期待値とアダマール積

茨城大 工 中本 律男 (Ritsuo Nakamoto)

1. 最近、J.I.Fujii[4] は、行列の Hadamard 積に関する Tôyama-Marcus-Khan の定理（行列 A, B の Hadamard 積 $A * B$ はテンソル積 $A \otimes B$ の一つの principal submatrix で与えられる）について新しい見方を与えた：Hilbert 空間 H 上の（有界線形）作用素 A, B に対して、Hadamard 積を

$$(1) \quad A * B = U^*(A \otimes B)U,$$

で定義した。ここで、 U は H から $H \otimes H$ への isometry で、 H の a fixed orthonormal basis $\{e_1, e_2, \dots\}$ に対して、

$$(2) \quad Ue_i = e_i \otimes e_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

によって定義されるものである (cf. [10])。

この定義により、行列についての Aujla-Vasudeva[2] の定理が作用素に対しても可能であることを示した。

さて、T.Ando[1] は正值作用素の Hadamard 積について、多くの基本的な不等式を与えた。これらは von Neumann の diagonalization $E(A) = A * 1$ -H.Umegaki に

よって導入された条件付期待値-と密接な関連がある。この観点から Ando のいくつかの不等式において等号が成立する場合を考える。とりわけ、 E が faithful であることが重要である。応用として、Styan[11] の一つの結果が作用素に拡張されることを示す。

2. J.von Neumann は H 上の作用素 A と projection P に対して、次の演算を導入した：

$$(3) \quad A|^P = PAP + (1 - P)A(1 - P),$$

これは、C.Davis[3] によって pinching と名付けられた。

J.von Neumann は [9; footnote 10] で証明を付けないで、projections $\{P_i; i = 1, 2, \dots\}$ が maximal abelian subalgebra $\mathcal{D}$ を生成するとき、

$$(4) \quad E(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} A|^P|^P \dots |^P$$

が存在することを述べている。また、この $E(\cdot)$ は、maximal abelian subalgebra $\mathcal{D}$ のみに関係し、生成する projections には関係しない。これは Umegaki[13] によって証明され、 $E(A)$ を conditional expectation conditioned by $\mathcal{D}$ と名付けられた。

H 上の作用素全体のなす algebra $B(H)$ は積として Hadamard 積をとれば可換な Banach algebra になる (cf. Hadamard 積の inner characterization は [5] にある)。作用素 $A \in B(H)$ に対して、

$$E(A) = A * 1$$

と置けば、 E は diagonal 作用素の全体からなる diagonal algebra $\mathcal{D}$ による条件付期待値になっている。それ故、 E は $B(H)$ から $\mathcal{D}$ の上への unital positive linear $*$ -

preserving faithful map になる。そこで、 E は Kadison の意味で、次の Schwarz の不等式を満たす：

$$(5) \quad E(A^2) \geq E(A)^2 \text{ for selfadjoint operators } A$$

さらに、

$$(6) \quad E(A * B) = E(A)E(B) \text{ for all operators } A, B$$

を満足する。即ち、 E は Hadamard 積を通常の積にかえる。

先ず、正值作用素 A が diagonal になる一つの条件を考える。

$$(7.k) \quad A^k = A * \cdots * A \quad (k \text{ times})$$

なる条件が全ての k に対して満たされているとする。

このとき、 $\chi_n(A) = (Ae_n, e_n)$ は A と 1 で生成された C^* -algebra $C^*(A)$ 上の character となり $A = \sum_n \chi_n(A)P_n$ を満たす。ここで、 P_n は e_n で決まる projection である。従って、 A は diagonal である。

しかし、上の条件 (7.k) は Kainuma-Kamei[7] によって次の簡単な条件で十分であることが示されている：

$$(7) \quad A^2 = A * A$$

次の定理は以下において基本的である。

定理 1. 正值作用素 A に対して、次のものは互いに同値である：

$$(i) E(A)^2 = E(A^2)$$

$$(ii) A * A = A^2$$

$$(iii) A \in \mathcal{D}$$

証明. (i) $\Rightarrow$ (iii) を示せば十分である。

Ando の不等式 $A * A \leq E(A^2)$ を使う。

$$\begin{aligned} E(E(A^2) - A * A) &= E(A^2) - E(A * A) \\ &= E(A^2) - E(A)^2 \\ &= E(A^2) - E(A)^2 = 0. \end{aligned}$$

従って、 E は faithful なので、 $A * A = E(A^2) \in \mathcal{D}$. このことにより、 $A \in \mathcal{D}$ となる。

また、Kadison の不等式

$$E(A^{-1}) \geq E(A)^{-1}$$

において、等号が成立する場合として、

定理 2. 可逆な正值作用素 A に対して、次のものは互いに同値である：

$$(i) E(A)^{-1} = E(A^{-1})$$

$$(ii) A * A^{-1} = 1$$

$$(iii) A \in \mathcal{D}$$

3. Ando[1] は Hadamard 積について次の不等式をあたえた：

可逆な正值作用素 A, B に対して、

$$(9) \quad \log A * B \geq (\log A + \log B) * 1$$

$$(10) \quad A * A \geq 2(A * 1)(A * A^{-1} + 1)^{-1}(A * 1)$$

不等式 (9) は Fiedler の定理として知られている次の不等式を含んでいる：

$$(11) \quad A * A^{-1} \geq 1$$

不等式 (11) で等号が成立する場合が定理 2 になっている。又、不等式 (10) についても、

定理 3 .

$$A * A = 2(A * 1)(A * A^{-1} + 1)^{-1}(A * 1) \iff A \in \mathcal{D}$$

証明. (10) で等号が成立していると、(11) によって $2(A * A^{-1} + 1)^{-1} \leq 1$ を満たすので、

$$A * A \leq (A * 1)^2 = E(A * A).$$

従って、 $E(E(A * A) - A * A) = 0$ となり、 $A * A \in \mathcal{D}$ で $A \in \mathcal{D}$ を満たす。

さらに、

定理 4 . 可逆な正值作用素 A, B に対して、

$$\log A * B = (\log A + \log B) * 1 \iff A, B \in \mathcal{D}$$

4. Hadamard 積と通常の積が一致する場合として、G.P.H.Styan[10] は、正定値行列 A, B が $A * B = AB$ を満たすのは $A, B \in \mathcal{D}$ のときに限ることを、行列式についての不等式を使って証明した。しかし、定理 4 を使うことによって、作用素に対しても成立する。

定理 5. 可逆な正值作用素 A, B に対して、

$$A * B = AB \iff A, B \in \mathcal{D}$$

証明. A, B 共に正值作用素のとき Shur の定理より $A * B \geq 0$ なので、 $A * B = AB$ を満たせば、 A と B は可換である。そこで、

$$\log(AB) = \log(A * B) \geq (\log A + \log B) * 1 = E(\log(AB))$$

従って、 $\log(AB) \in \mathcal{D}$ となり、 $A * B = AB \in \mathcal{D}$. これは定理 4 の条件を満たすので結論を得る。

定理 5 において、次の例が示すように、可逆の条件を除くことはできない：
 $A = A_1 \oplus 1$ (A_1 : 任意), $B = 0 \oplus 1$ とすると $A * B = AB = B$ 。

定理 1 に関連して、

定理 6. A, B を可逆な正值作用素とする。このとき、

$$A * B = E(A^2)^{1/2} E(B^2)^{1/2} \iff A, B \in \mathcal{D}.$$

証明. 等式が成立しているとき、 $A * B$ が diagonal となるので、

$$A * B = E(A * B) = E(A)E(B)$$

一般に、 $E(A^2) \geq E(A)^2$ で、 $t \rightarrow t^{1/2}$ は operator monotone なので、

$$E(A^2)^{1/2} \geq E(A) \text{ and } E(B^2)^{1/2} \geq E(B)$$

A, B は可逆なので、

$$E(A^2)^{1/2} = E(A), E(B^2)^{1/2} = E(B)$$

即ち、 $A, B \in \mathcal{D}$.

定理 6 において、 $A = B$ 以外では可逆の条件は必要である。

参考文献

- [1] T.Ando, Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products, Linear Alg. Appl., 26(1979), 203-241.
- [2] J.S.Aujla and H.L.Vasudeva, Inequalities involving Hadamard product and operator means, Math. Japonica, to appear.
- [3] C.Davis, Notions generalizing convexity for functions defined on spaces of matrices, Proc. Symposia Pure Math., Convexity, 8, Amer. Math. Soc., Providence, 1963, 159-170.
- [4] J.I.Fujii, The Marcus-Khan theorem for Hilbert space operators, Math. Japonica, to appear.
- [5] M.Fujii and K.Kitamura, Theorems of Aujla and Vasudeva and Hadamard product, Math. Japonica, to appear.

- [6] M.Fujii, R.Nakamoto and M.Nakamura, Conditional expectation and Hadamard product, Math. Japonica, to appear.
- [7] D.Kainuma and E.Kamei, C^* -homomorphisms and operator means, Math. Japonica, 28(1983), 627-631.
- [8] M.Marcus and N.A.Khan, A note on the Hadamard product, Canad. Math.Bull., 2(1959), 81-83.
- [9] J.von Neumann, On rings of operators, III, Ann. Math., 41(1949), 94-161.
- [10] V.I.Paulsen, Completely bounded maps and dilations, Pitman Research Notes in Math., 146, 1986.
- [11] G.P.H.Styan, Hadamard products and multivariate statistical analysis, Linear Alg. Appl., 6(1973), 217-240.
- [12] H.Toyama, Theory of Matrices(in Japanese), Kyoritsu-Schuppan, Tokyo, 1952.
- [13] H.Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra II, Tohoku Math. J., 8(1965), 86-100.