

放物的変換をもつ Klein 群の Hausdorff 次元について

金沢女子短大 古沢 治司

リーマン球または拡張された複素平面を $\hat{\mathbb{C}}$ で表す。 Γ は $\hat{\mathbb{C}}$ から $\hat{\mathbb{C}}$ の上への一次変換群とする。点 z_0 が Γ の極限点 (limit point) とは, ある $z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対して Γ の異なる要素の列 $\{S_n\}$ があって $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = z_0$ のときいう。この Γ の極限点集合を $\Lambda(\Gamma)$ で表す。 $\Omega(\Gamma) = \hat{\mathbb{C}} - \Lambda(\Gamma)$ とおく。 $\Omega(\Gamma) \neq \emptyset$ のとき, Γ を不連続群という。ここでは $\#(\Lambda(\Gamma)) \geq 3$ のとき Γ のことを Klein 群ということにする。 Γ の要素 S ($S(\infty) \neq \infty$) に対して $\{z \mid |S'(z)| = 1\}$ を $I(S)$ で表し, $I(S)$ の内部をこめた閉円板を $D(S)$ で表す。上半平面 H を不変にする Klein 群を Fuchs 群という。A. F. Beardon は [2] に於て, 有限生成第二種 Fuchs 群で Hausdorff 次元が $1/2$ より大なるものが存在することを示した。さらに [3] に於て, 放物的変換をもつ Fuchs 群は常に Hausdorff 次元が $1/2$ より大であることを示した。ここでは放物的変換をもつ Klein 群に於てもこの不等式が成立す

ることを示す。

1. Γ は放物的変換をもつ Klein 群 とある。この Γ の適当な部分群に対して、幾何学的にわかりやすい部分群と相似する性質をもつものがある。その準備として次に述べる。

補題 1. $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ は放物的変換とする。このとき任意の $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ に対して、帰納法により、

$$(1) \quad T^n = \begin{pmatrix} n\alpha - (n-1) & n\beta \\ n\gamma & n\delta - (n-1) \end{pmatrix}.$$

補題 2. $S^{-1}(\infty) = -\delta/\gamma$ は円 C 上にないとする。このとき C の S による像 C' の半径を $r(C')$ とするとき、

$$(2) \quad r(C') = \frac{1}{|\gamma|^2} \frac{r(C)}{|\rho^2 - r^2(C)|},$$

ここで $\rho = |S^{-1}(\infty) - z_0|$, z_0 は円 C の中心とする。

補題 3. Γ は放物的変換をもつ Klein 群 とする。このとき次の条件を満足する Γ の部分群 G が存在する。

(A) P, T を各々 Γ の放物的、ロクソドロムの変換とする。そのとき $I(P)$ と $I(P^{-1})$ が 1 点 P で接するほかは $I(P), I(P^{-1}), I(T), I(T^{-1})$ のどの 2 つも互いに素である。

(B) G は P と T を生成元とする自由群である。

補題 3 の証明. Γ に含まれる放物的変換を U とする。このとき $U(\infty) \neq \infty$ としておいてよい。なぜなら適当な Γ のロクソ

ドロム的変換 V によって VUV^{-1} を U のかわりに考える。また、 Γ のロクソドロム的変換 W で $W(\infty) \neq \infty$ なるものがある。 ξ_1, ξ_2 を W の固定点とし K を W の乗数とする ($K \neq 1$)。

すると、
$$W^n = \frac{1}{K^{\frac{n}{2}}(\xi_1 - \xi_2)} \begin{pmatrix} K^n \xi_2 - \xi_1 & (1 - K^n) \xi_1 \xi_2 \\ K^n - 1 & \xi_2 - K^n \xi_1 \end{pmatrix}$$

である。さて $I(W^n), I(W^{-n})$ の半径 $\rho(W^n) = \rho(W^{-n}) = \rho_n$ は

$$\rho_n = \frac{|\xi_1 - \xi_2|}{|K^{\frac{n}{2}} - K^{-\frac{n}{2}}|}, \text{ であるから } \rho_n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty).$$

また補題1より $I(U^n)$ の半径は $1/|n\pi|$ であるから十分大きな n に対して条件 (A) を満足する $I(U^n), I(U^{-n}), I(W^n), I(W^{-n})$ が存在する。そして $G = \langle U^n, W^n \rangle$ を考えればよい。

補題4. $G = \langle P, T \rangle$ は補題3の条件を満足する Γ の部分群とする。 G' は $\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} P^j T P^{-j}$ の各要素から生成される G の部分群とする。このとき次のことが成立する。

(C) G' は G の正規部分群である。そして商群 $G/G' = \langle P \rangle$ である。

(D) $\Lambda(G) = \Lambda(G')$ 。

補題4の証明 (C) について、 G' から G' の上への自己同型写像 $\Phi_n(g') = P^n g' P^{-n} \ (g' \in G')$ の存在を示せばよい。またこのとき、 G の任意の要素 $g = P^m g' \ (m \in \mathbb{Z}, g' \in G')$ と表現できることに注意すればよい。さらに $P^{\mathbb{Z}}(\Lambda(G')) = \Lambda(G')$ が

成立する ($l \in \mathbb{Z}$). (D) については, $\Lambda(G) \subset \Lambda(G')$ を示せば十分である。Gの任意の要素は $S = P^{l_1} T^{m_1} \cdots P^{l_j} T^{m_j}$ ($l_i, m_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq j$) と表せる。 $n = \sum_{i=1}^j (|l_i| + |m_i|)$ において $S = S(n)$ とおく。Gの生成元とその逆変換全体を $\mathcal{G}$ とおく。 $S(n) = S(n-1) V$ とおくとき, $V \in \mathcal{G} - \{V\}$ について, $D(S(n)) = S(n)(D(V))$ とすれば, $\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{S(n)} D(S(n)) = \Lambda(G)$ である。Bを $I(P), I(P^{-1}), I(T), I(T^{-1})$ の外部とするとBはGの基本領域である。 $\Lambda(G) \ni z$ に対して, z の ε_n -近傍 $U(z, \varepsilon_n)$ を考える, ここで $\{\varepsilon_n\}$ は $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ となる列とする。上のことから $D(S(n)) \subset U(z, \varepsilon_n)$ となる $S(n) \in G'$ が存在する。ここで $S(n) T S(n)^{-1}$ は G' の要素であり, かつ $S(n) T S(n)^{-1}$ の固定点 z_n は $U(z, \varepsilon_n)$ に含まれる。よって $z \in \Lambda(G')$ となる。

2. $P^k T P^{-k} = T_k$ ($k \in \mathbb{Z}$) とおく。ここで $T_0 = P^0 = I$ 。さらに $P^k(D(T)) = D(T_k) = D_k$, $P^k(D(T^{-1})) = D(T_k^{-1}) = D_k^{-1}$ ($k \in \mathbb{Z}$) とおく。 B' を $\bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \{D_i, D_i^{-1}\}$ の外部とすると B' は G' の基本領域である。 G'_ℓ は $\bigcup_{|i| \leq \ell} T_i$ の各要素を生成元にもつ有限生成の Schottky 群である。 $\mathcal{G}'_\ell = \bigcup_{|i| \leq \ell} \{T_i, T_i^{-1}\}$ とする。このとき $G'_\ell \rightarrow G'$, $\mathcal{G}'_\ell \rightarrow \mathcal{G}'$ ($\ell \rightarrow \infty$)。また B'_ℓ を G'_ℓ の基本領域とする。また一般性を失うことなく $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}$ とできさらに P^n を考え補題1より $|r \cdot T^{-1}(\infty)| > 2$ となるように P

をとることができる。いくつかの補題のうちに G_{ℓ}' と G' における特徴ある性質を述べる。

補題5. $B \cap \{ |z - z_0| \leq r \} = D$ の $P^n (n \neq 0)$ による像の半径を r_n とすると, B と D にのみ依存する定数 C_0, C_1 が存在して,

$$(2)' \quad \frac{r}{|n|^2} C_0 \leq r_n \leq \frac{r}{|n|^2} C_1$$

証明は簡単であるから略する。

$$R_{\varepsilon} = \{ z \mid r(D(T)) \leq |z - T^{\varepsilon}(\infty)| \leq r(D(T)) + 2\delta \} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

とおき, $R_{\varepsilon} \subset B$ ($\varepsilon = \pm 1$) として $R_1 \cap R_{-1} = \emptyset$ のようにできる。

$Q_{\varepsilon} = \{ z \mid |z - T^{\varepsilon}(\infty)| \leq r(D(T)) + 2\delta \}$ とする, このとき

$$(3) \quad r(T(Q_{\varepsilon})) = \frac{r^2(D(T))}{r(D(T)) + 2\delta} = C_2 \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

D_{δ} を R_{ε} ($\varepsilon = \pm 1$) に内接する閉円板とすると,

$$(4) \quad r(T^{\varepsilon}(D_{\delta})) = \frac{\delta \cdot r(D(T))}{r(D(T)) + 2\delta}.$$

このことから $T^{\varepsilon}(D_{\delta})$ の半径は D_{δ} の位置関係には依存しない。

従って $T^{\varepsilon}(B) \subset \{ z \mid |z - T^{\varepsilon}(\infty)| \leq C_2 \}$ ($\varepsilon = \pm 1$) であり,

R'_{ε} を $\{ z \mid C_2 \leq |z - T^{\varepsilon}(\infty)| \leq r(D(T)) \}$ ($\varepsilon = \pm 1$) とする

このとき R'_{ε} に含まれる円板 D の $P^k (k \neq 0)$ による像の半径 $r(P^k(D))$ について補題2, 5により

$$(5) \quad \frac{1}{|k|^2} C_0' \leq r(P^k(D)) \leq \frac{1}{|k|^2} C_1' \quad (k \neq 0)$$

$C_i' = C_i'(G) > 0$ ($i = 0, 1$) である。

G' の任意の要素は,

$$(6) \quad S = T_{\alpha_n} \circ T_{\alpha_{n-1}} \circ \cdots \circ T_{\alpha_2} \circ T_{\alpha_1},$$

ここで $T_{\alpha_j} \in \mathcal{G}'$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}$ をして $(T_{\alpha_j})^{-1} \neq T_{\alpha_{j+1}}$ ($j=1, 2, \dots, n-1$) である. D を R_{ε}' に内接する円板とするととき次のことが言える.
補題 6. 次の不等式をみたす $G(B)$ にのみ依存する正の数 C_3, C_4 が存在する.

$$(7) \quad C_3 < \frac{\lambda(P^k(D))}{\lambda(P^k(D(T^\varepsilon)))} < C_4 < 1 \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

ここで D は R_{ε}' に内接する円板である.

さて, (6) より $S = S(n)$ とおいてみる. $S(n)^{-1}(\infty) \in D_{\alpha_1}$,
 $S(n)(D_j) \subset S(n)(D_{\alpha_1})$ ($j \neq \alpha_1$) である.

補題 7. 任意の $T_i (\neq T_1) \in \mathcal{G}'$ に対して G にのみ依存して決定される常数 M があって次の不等式が成り立つ.

$$(8) \quad |S(n)^{-1}(\infty) - \alpha(D_j)| < M |P^i(T^{-1}(\infty)) - P^j(T^{-1}(\infty))|$$

ここで $S(n) = T_{i,n} \cdots T_{i,1} \in G'$.

補題 7 の証明. $\ell(D_j, D_{i,1}) = \inf_{x \in D_j, y \in D_{i,1}} d(x, y)$ とおく.

このとき $|S(n)^{-1}(\infty) - \alpha(D_j)| \leq \ell(D_j, D_{i,1}) + (2 - C_3) \{ \lambda(D_j) + \lambda(D_{i,1}) \}$

また, $|P^i(T^{-1}(\infty)) - P^j(T^{-1}(\infty))| \geq \ell(D_j, D_{i,1}) + C_3 \{ \lambda(D_j) + \lambda(D_{i,1}) \}$

そこで $M = (2 - C_3) / C_3$ とおけばよい.

これまでのことについては $P(0) = 0$ という条件をつけなくても何の意味もないがこれ以後について計算をやさしくするため

この条件をつける。(直接計算もできる) こうして(7), (8) などから次の結論が得られる.

定理 1. $0 \leq \mu \leq 1$ とする. このとき十分大きな N に対して

$$(9) \quad \sum_{|j| \leq N} r^{\mu/2}(S(n)(D_j)) \geq r^{\mu/2}(S(n)(D_{i_1})) \text{ とできる.}$$

ここで $S(n) = T_{i_n} \cdots T_{i_1} \in G'_N$.

証明の方針. $0 < \mu$ とする. $S(n) \in G'$ に対して,

$$(10) \quad \sum_{|j| \leq N} r^{\mu/2}(S(n)(D_j)) \geq C_5 R_{S(n)}^\mu \sum_{\substack{|j| \leq N \\ i_1 \neq j}} \left| \frac{i_1}{i_1 - j} \right|^\mu,$$

ここで $R_{S(n)} = r(I_{S(n)})$, $T_{i_1} \neq T^\varepsilon$ ($\varepsilon = \pm 1$).

$$(10)' \quad \sum_{|j| \leq N} r^{\mu/2}(S(n)(D_j)) \geq C_5' R_{S(n)}^\mu \sum_{\substack{|j| \leq N \\ i_1 \neq j}} \frac{1}{|i_1 - j|^\mu} \quad (T_{i_1} = T^\varepsilon)$$

C_5, C_5' は G と μ にのみ依存する常数である. 簡単な計算から, G と μ にのみ依存する C_6, C_7 があって次の不等式を満たす

$$(11) \quad C_6 |i_1|^\mu R_{S(n)}^\mu \leq r^{\mu/2}(S(n)(D_{i_1})) \leq C_7 |i_1|^\mu R_{S(n)}^\mu$$

$0 \leq \mu \leq 1$ のとき $\sum_{|j| \leq N} \frac{1}{|i_1 - j|^\mu} \rightarrow \infty$ ($N \rightarrow \infty$) となるから

$S(n) = T_{i_n} \cdots T_{i_1} \in G'$ さらに $|i_1| \leq N$ なる $S(n)$ に対して,

$$\sum_{|j| \leq N} r^{\mu/2}(S(n)(D_j)) \geq r^{\mu/2}(S(n)(D_{i_1})) \text{ とできる. 従って当}$$

然 G'_N についても成立する.

$S_{(m+1)} : z \mapsto (az+b)/(cz+d)$, $ad-bc=1$ は G'_N の要素とする. このとき D の $S_{(m+1)}$ による像の半径 $r_{S_{(m+1)}(D)}$ は $2\pi r_{S_{(m+1)}(D)} = |c|^{-2} \int_D |z + \frac{d}{c}|^{-2} |dz|$ であって,

ここで $D \in \bigcup_{1 \leq i \leq N} \{D_i, D_{-i}\}$, $-d/c$ は B'_N の外部にあることを注意すると $\Delta = \max_{z \in D} |z + d/c|$ また $\delta = \min_{z \in D} |z + d/c|$ とおけば

$$(12) \quad \frac{\lambda(D)}{\Delta} \cdot |C|^{-2} \leq \lambda(S_{(m+1)}(D)) \leq \frac{\lambda(D)}{\delta} \cdot |C|^{-2}$$

がある。それ故次の不等式が成り立つ。

補題 8 $S_{(m+1)} = S_{(m)} T_k$, $T_k \in \mathcal{Y}_N'$ とすると $k_g = k_g(G)$ に對して次の不等式を満足する。

$$(13) \quad \frac{\lambda(S_{(m+1)}(D_j))}{\lambda(S_{(m+1)}(D_k))} \geq k_g \quad (1 \leq j \leq N, j \neq k).$$

3. $\forall \in \mathcal{Y}$, $S_{(n)} \in G$ とするとき $n \geq n_0$ に対して $S_{(n)}(D(\forall))$ から成る開円板の族を $\mathcal{F}_{n_0}$ で表す。この $\mathcal{F}_{n_0}$ は $\Lambda(G)$ の被覆の1つであることは容易にわかる。さらに十分大きな n をとれば与えられた $\delta > 0$ よりも $\mathcal{F}_{n_0}$ を構成する要素の直径を小さくすることができる。 $I(\delta, \Lambda(G))$ は有限個の開円板で、直径が δ より小のものから成る1つの族でありかつ $\Lambda(G)$ のいかなる点も少なくとも1つの $U \in I(\delta, \Lambda(G))$ の内点となっているものとする。このとき次の量,

$$(14) \quad M_\eta(G) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\inf_{\{I(\delta, \Lambda(G))\}} \sum_{U \in I(\delta, \Lambda(G))} l_U^\eta \right], \quad \text{ここに}$$

l_U は U の直径であり, G のまたは $\Lambda(G)$ の η -次元測度という。これからは定理1で表れた G'_N の特異点集合 $\Lambda(G'_N)$

$=A$ について考える。 A はコンパクトであるから A はある $I(\delta, A)$ の要素 $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ で被覆される。これらの個の開円板 Q_i の半径が $l_i (\leq \delta/2)$ とする。 δ を十分小さな定数とする。固定した Q_i について、集合 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ の中に次の条件をみたす開円板 $S(m_{(1)})(D_{(1)}^i), \dots, S(m_{N(i)})(D_{N(i)}^i)$ がある。

- (i) $\rho(S(m_j)(D_j^i))$ ($1 \leq j \leq N(i)$) は l_i より大で、
- (ii) $S(m_j)(D_j^i)$ の内部にある開円板で Q_i と交わりを有し半径が l_i より大きくない開円板 $S(m_{j+1})(D_{j+1}^i)$ が存在する。
- (iii) $\bigcup_{j=1}^{N(i)} S(m_j)(D_j^i) \supset Q_i \cap A$.

補題 8 によって、

$$(15) \quad k_9 \rho(S(m_j)(D_j^i)) \leq \rho(S(m_{j+1})(D_{j+1}^i)) \leq l_i.$$

各 Q_i に対して上のような円板の族 $\{S(m_j)(D_j^i)\}_{j=1}^{N(i)}$ ($i=1, \dots, k$) を考える。このとき $\bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^{N(i)} S(m_j)(D_j^i) \supset A$ として

$$(16) \quad \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{N(i)} (\rho(S(m_j)(D_j^i)))^{1/2} \leq k_{10} \sum_{i=1}^k l_i^{1/2},$$

ここで k_{10} は $G_1(B)$ にのみ依存して決定される定数であって $D_j^i \in \bigcup_{|k| \leq N} \{D_k, D_{k+1}\}$.

定理 1 によって、任意の実数 $0 \leq \eta \leq 1$ に対して、

$$(17) \quad 0 < \sum_{|k| \leq N} (\rho(D_j^i))^{1/2} \leq k_{10} \sum_{i=1}^k l_i^{1/2},$$

ここで $\{I(\delta, A)\}$ について考えてみると、次の補題が導かれる。

補題 9. G_N' は定理 1 を述べた不連続群とする。このとき
 $M_{\gamma_2}(\Lambda(G_N')) > 0$ ($0 \leq \gamma_2 \leq 1$) である。

①の部分集合 F の Hausdorff 次元は F に対して非負の実数 $d(F)$ が唯一に定まり,

$$M_{\gamma_2}(F) = 0 \quad (\gamma_2 > d(F)),$$

$$M_{\gamma_2}(F) = \infty \quad (0 \leq \gamma_2 < d(F))$$

である。Schottky 群 G_N' について $d(\Lambda(G_N')) = d(G_N')$ と書くことにする。すると [1] によって $d(G_N') < d(G_{N+1})$ であることが知られているから、結局、次の定理が得られる。

定理 2 Γ は Klein 群で放物的変換をもつならば Γ の Hausdorff 次元 $d(\Gamma) > \frac{1}{2}$ である。

参考文献

- [1] Akaza, T. & Shimazaki, T., The Hausdorff dimension of the singular sets of combination groups. *Tohoku Math. J.*, (1973)
- [2] Beardon, A. F., The Hausdorff dimension of singular sets of properly discontinuous groups. *Amer. J. Math.*, (1966)
- [3] Beardon, A. F., The exponent of convergence of Poincaré series. *Proc. London Math. Soc.*, (1968)