

単射な逆強単調作用素に対する変分不等式問題の 解の逐次近似法

中央大学・理工学部 家本 繁

IEMOTO, Shigeru

Faculty of Science and Engineering,
Chuo University

1 序論

本稿では、実ヒルベルト空間 H 上の空でない閉凸部分集合上における単調作用素 A に対する変分不等式問題を解くための逐次近似法について述べる. ただし, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を H 上の内積とし, $\|\cdot\|$ を内積から誘導されるノルムとする. **変分不等式問題**は次のように定式化される非線形問題の一つである. すなわち, 任意の $y \in C$ に対して

$$\langle y - z, Az \rangle \geq 0 \quad (1)$$

を満たす $z \in C$ を求める問題である. (1) の解集合を $VI(C, A)$ で表すこととする. 変分不等式問題は Lions and Stampacchia [12] によって研究されて以来, 非線形解析の中心的な研究対象へと発展していった. (1) は, 凸最適化の手法を用いて解くことができることが知られており, 代表的な逐次近似法に**射影勾配法** [8, 16] がある. 射影勾配法を用いた定理として, 次の定理がよく知られている.

定理 1.1 ([8]). C を実ヒルベルト空間 H 上の閉凸部分集合とし, A を C から H への L -リプシッツ連続な β -強単調作用素とする. さらに, 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$,

$$x_{n+1} = P_C(I - aA)x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で構成する. ただし, P_C は H から C の上への距離射影, I は H 上の恒等写像, $a \in (0, 2\beta/L^2)$ とする. このとき, $\{x_n\}$ は $VI(C, A)$ の唯一の解 v に強収束する.

しかしながら, 射影勾配法は P_C を反復操作の中で繰り返し用いる必要があるため, C が閉球や閉円錐の場合のように, P_C の陽的な形が分かっている場合に有効な逐次近

似法といえる．そこで山田 [15] は、ハイブリッド最急降下法と呼ばれる、次の逐次近似法を提案した．

定理 1.2 ([15]). H を実ヒルベルト空間、 S を H 上の非拡大写像、 A を H 上の L -リプシッツ連続な β -強単調作用素とする．さらに、 $a \in (0, 2\beta/L^2)$, $\{c_n\} \subset (0, 1]$ を $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ を満たす数列とし、点列 $\{u_n\} \subset H$ を $u_1 \in H$,

$$u_n = (I - c_n a A) S u_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で構成する．このとき、 $\{u_n\}$ は $VI(\text{Fix}(S), A)$ 上の唯一の解 v に強収束する．

定理 1.3 (ハイブリッド最急降下法 [15]). H を実ヒルベルト空間、 S を $\text{Fix}(S) \neq \emptyset$ を満たす H 上の非拡大写像とする．さらに、 A を H 上の L -リプシッツ連続な β -強単調作用素、 $a \in (0, 2\beta/L^2)$ とし、 $\{c_n\} \subset (0, 1]$ を次の (i)–(iii) を満たす数列とする．

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \infty, \quad (iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n - c_{n+1}}{c_{n+1}^2} = 0.$$

点列 $\{x_n\} \subset H$ を $x_1 \in H$,

$$x_{n+1} = (I - c_n a A) S x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で構成する．このとき、 $\{x_n\}$ は $VI(\text{Fix}(S), A)$ 上の唯一の解 v に強収束する．

なお、Xu and Kim [14] は、定理 1.3 の条件 (iii) を $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n/c_{n+1}) = 1$ に置き換え、 $c_n = 1/n$ の場合を含むように拡張している．定理 1.2, 定理 1.3 の証明は Banach's contraction mapping principle [1] と呼ばれる、以下の定理が用いられている．

定理 1.4 ([1]). C を実ヒルベルト空間 H の閉部分集合とする． S を C から H への狭義縮小 (*strictly contractive*) 写像、すなわち、ある $r \in [0, 1)$ が存在し、任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Sx - Sy\| \leq r \|x - y\|.$$

また、点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$, $x_{n+1} = Sx_n$ ($n = 1, 2, \dots$) で構成する．このとき、 $\{x_n\}$ は S の唯一の不動点 $v \in C$ に強収束する．

定理 1.1–定理 1.3 では、 A が L -リプシッツ連続な β -強単調作用素の場合を扱っている．これらの定義は、ある $L \in (1, \infty)$ と $\beta \in (0, 1)$ が存在して、 A の定義域内の任意の x, y に対して、

$$\|Ax - Ay\| \leq L \|x - y\|, \quad \beta \|x - y\|^2 \leq \langle x - y, Ax - Ay \rangle$$

である．このとき， A は単射であり， β/L^2 -逆強単調，すなわち

$$\frac{\beta}{L^2} \|Ax - Ay\|^2 \leq \langle x - y, Ax - Ay \rangle$$

が A の定義域内のすべての x, y に対して成立する．さらに， A の逆写像 A^{-1} も単射で β -逆強単調である．

そこで本稿では，このような作用素 A のもつ性質と以上の先行研究を動機として，単射な逆強単調作用素 A に対する変分不等式問題の解を逐次近似する方法について述べる．我々の結果 [9] は，Edelstein の定理 [5] として知られる，以下の定理に着想を得ている．

定理 1.5 ([5]). C を実ヒルベルト空間 H のコンパクト部分集合とし， S を C から H への縮小 (*contractive*) 写像，すなわち， $x \neq y$ を満たす任意の $x, y \in C$ に対して，

$$\|Sx - Sy\| < \|x - y\|.$$

また，点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$, $x_{n+1} = Sx_n$ ($n = 1, 2, \dots$) で構成する．このとき， $\{x_n\}$ は S の唯一の不動点 $v \in C$ に強収束する．

2 準備

実数の集合を $\mathbb{R}$ ，正の整数の集合を $\mathbb{N}$ とする．さらに，実ヒルベルト空間を H ，その内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ，内積から誘導されるノルムを $\|\cdot\|$ で表す．また， C を H の部分集合， I を H 上の恒等写像， T を C から H への写像とする．このとき，写像 T が

(i) **堅非拡大 (firmly nonexpansive)** であるとは，任意の $x, y \in C$ に対して，

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \langle x - y, Tx - Ty \rangle;$$

(ii) **非拡大 (nonexpansive)** であるとは，任意の $x, y \in C$ に対して，

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|;$$

(iii) **L -リプシッツ連続 (Lipschitz continuous)** であるとは，ある $L \in (1, \infty)$ が存在し，任意の $x, y \in C$ に対して，

$$\|Tx - Ty\| \leq L \|x - y\|;$$

- (iv) **狭義縮小 (strictly contractive, contraction)** であるとは, ある $r \in [0, 1)$ が存在し, 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\|Tx - Ty\| \leq r \|x - y\|;$$

- (v) **縮小 (contractive)** であるとは, $x \neq y$ を満たす任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\|Tx - Ty\| < \|x - y\|$$

であるときをいう. T の値域を $R(T)$, T の不動点集合を $\text{Fix}(T)$, すなわち, $\text{Fix}(T) = \{x \in C : Tx = x\}$ とする. T が堅非拡大ならば非拡大である, あるいは狭義縮小ならば縮小であるといった性質が成り立つことは明らかである. 例えば $\mathbb{R}$ 上の関数 f を $f(x) = x + \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$ で定義すると, f は縮小だが狭義縮小ではない. また, 非拡大写像 T の $\text{Fix}(T)$ は閉凸集合である [2, 6, 13]. ヒルベルト空間上の非拡大写像に関して, 次の不動点の存在定理が Browder [3, 4], Göhde [7], Kirk [10] によって独立に証明されている.

定理 2.1 ([3, 4, 7, 10]). C をヒルベルト空間 H の有界閉凸部分集合とし, T を C 上の非拡大写像とする. このとき, $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ である.

C を H の閉凸部分集合とする. このとき, 任意の $x \in H$ に対して, $P_C(x)$ で表される C に最も近い一意に定まる点が存在し, 任意の $y \in C$ に対して, $\|x - P_C(x)\| \leq \|x - y\|$ が成立する. この H から C への上の写像を**距離射影**と呼ぶ. 距離射影 P_C が堅非拡大であることもよく知られた事実である.

$a \in (0, \infty)$ とし, A を C から H への作用素とする. このとき, A が

- (i) **単調 (monotone)** であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\langle x - y, Ax - Ay \rangle \geq 0;$$

- (ii) **β -強単調 (strongly monotone)** であるとは, ある $\beta \in (0, 1)$ が存在して, 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\beta \|x - y\|^2 \leq \langle x - y, Ax - Ay \rangle;$$

- (iii) **β -逆強単調 (inverse strongly monotone)** であるとは, ある $\beta \in (0, 1)$ が存在して, 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\beta \|Ax - Ay\|^2 \leq \langle x - y, Ax - Ay \rangle$$

であるときをいう． A が β -逆強単調のとき，任意の $a \in (0, 2\beta)$ に対して， $I - aA$ は C から H への非拡大写像である．

A を C から H への単射な作用素とする．このとき A の逆写像 A^{-1} が存在する．すなわち， $x \in C$ と $y \in R(A)$ に対して， $Ax = y$ ならば $A^{-1}y = x$ である． A^{-1} もまた単射であることは明らかである．

次に A を C から H への β -強単調作用素とする．このとき， A は単射である．実際， A が単射でないと仮定すると， $x \neq y$ にも関わらず $Ax = Ay$ となる $x, y \in C$ が存在する．このとき， A の強単調性から，

$$\beta \|x - y\|^2 \leq \langle x - y, Ax - Ay \rangle = 0$$

となるため $x = y$ を得るが，これは $x \neq y$ に矛盾するため， A は単射である．また， A の強単調性に加えて， A が L -リプシッツ連続ならば， β/L^2 -逆強単調であることも次のように確認できる．

$$\frac{\beta}{L^2} \|Ax - Ay\|^2 \leq \frac{\beta}{L^2} L^2 \|x - y\|^2 = \beta \|x - y\|^2 \leq \langle x - y, Ax - Ay \rangle.$$

変分不等式問題を解くため逐次近似法の多くは，次の補題が基になっている．

補題 2.1 ([2, 13]). C をヒルベルト空間 H の閉凸部分集合， A を C から H への作用素， $a \in (0, \infty)$ とする．このとき， $\text{Fix}(P_C(I - aA)) = VI(C, A)$ である．

次の補題は Browder's demiclosedness principle [3, 11] として知られている ([2, 13] も参照)．

補題 2.2. C をヒルベルト空間 H の閉凸部分集合とし， T を C から自身への非拡大写像とする． $\{x_n\} \subset C$ を u に弱収束し， $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$ を満たす C の点列とする．このとき， $u \in \text{Fix}(T)$ である．

補題 2.3 ([13]). $\{x_n\}$ をヒルベルト空間 H の点列とする． $\{x_n\}$ の任意の部分点列 $\{x_{n_j}\}$ が z に強収束 (*resp.* 弱収束) する部分点列をもつとする．このとき， $\{x_n\}$ 自身が z に強収束 (*resp.* 弱収束) する．

3 単射な β -逆強単調作用素の性質

ここでは次節の準備として，単射な β -逆強単調作用素の性質をまとめる．

補題 3.1 ([9]). C をヒルベルト空間 H の部分集合, A を C から H への β -逆強単調作用素, $a \in (0, 2\beta)$ とする. このとき, 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\|A_a x - A_a y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - a(2\beta - a) \|Ax - Ay\|^2.$$

ただし, $A_a = I - aA$ である. さらに A が単射ならば, A_a は縮小 (contractive) 写像である.

証明. 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\begin{aligned} \|A_a x - A_a y\|^2 &= \|(I - aA)x - (I - aA)y\|^2 \\ &= \|(x - y) - a(Ax - Ay)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + a^2 \|Ax - Ay\|^2 - 2a \langle x - y, Ax - Ay \rangle \\ &\leq \|x - y\|^2 + a^2 \|Ax - Ay\|^2 - 2a\beta \|Ax - Ay\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - a(2\beta - a) \|Ax - Ay\|^2. \end{aligned}$$

さらに A が単射ならば, $a \in (0, 2\beta)$ であることから, $x \neq y$ を満たす任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\|A_a x - A_a y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - a(2\beta - a) \|Ax - Ay\|^2 < \|x - y\|^2$$

であるから, A_a は縮小 (contractive) 写像である. □

系 3.1 ([9]). C をヒルベルト空間 H の部分集合, T を H から C への非拡大写像, A を $R(T)$ から H への β -逆強単調作用素, $a \in (0, 2\beta)$ とする. このとき, 任意の $x, y \in H$ に対して,

$$\|U_a x - U_a y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - a(2\beta - a) \|ATx - ATy\|^2.$$

ただし, $U_a = (I - aA)T$ である. さらに A が単射ならば, U_a は縮小 (contractive) 写像である.

証明. $A_a = I - aA$ とおくと, 補題 3.1 と T の非拡大性から, 任意の $x, y \in H$ に対して,

$$\begin{aligned} \|U_a x - U_a y\|^2 &= \|A_a Tx - A_a Ty\|^2 \\ &\leq \|Tx - Ty\|^2 - a(2\beta - a) \|ATx - ATy\|^2 \\ &\leq \|x - y\|^2 - a(2\beta - a) \|ATx - ATy\|^2. \end{aligned} \tag{2}$$

さらに A が単射ならば, 次の 2 つの場合 (a), (b) を考えれば十分である.

(a) $Tx = Ty$ ならば, $\|U_ax - U_ay\| = 0$ である. よって, $x \neq y$ を満たす任意の $x, y \in H$ に対して, $\|U_ax - U_ay\| < \|x - y\|$ である.

(b) $Tx \neq Ty$ ならば, $ATx \neq ATy$ となる. よって, (2) と $a \in (0, 2\beta)$ から,

$$\|U_ax - U_ay\|^2 \leq \|x - y\|^2 - a(2\beta - a) \|ATx - ATy\| < \|x - y\|^2.$$

□

補題 3.2 ([9]). C をヒルベルト空間 H の閉凸部分集合, A を C から H への単射な β -逆強単調作用素, P_C を H から C の上への距離射影, $\alpha \in (0, 2\beta)$ とする. このとき, $P_C(I - aA)$ は C 上の縮小 (contractive) 写像である.

証明. $A_a = I - aA$ とおくと, 補題 3.1 と P_C の非拡大性から, $x \neq y$ を満たす任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\|P_CA_ax - P_CA_ay\| \leq \|A_ax - A_ay\| < \|x - y\|.$$

よって, $P_C(I - aA)$ は縮小 (contractive) 写像である. □

補題 3.3 ([9]). C をヒルベルト空間 H の閉凸部分集合とし, A を $VI(C, A) \neq \emptyset$ を満たす C から H への単射な β -逆強単調作用素とする. このとき, $VI(C, A)$ は単集合である.

証明. $x \neq y$ を満たす $x, y \in VI(C, A)$ が存在すると仮定し, $a \in (0, 2\beta)$ とする. このとき, 補題 2.1 より, $x, y \in \text{Fix}(P_CA_a)$ が成り立つ. ただし, $A_a = I - aA$ である. また, A は単射なので, 補題 3.2 より, 以下が容易に確認できる.

$$\|x - y\| = \|P_CA_ax - P_CA_ay\| < \|x - y\|.$$

これは矛盾である. よって, $VI(C, A)$ は単集合である. □

この節の最後に, 強単調ではないが単射な $\mathbb{R}$ 上の逆強単調作用素の例を示す.

例 1 ([9]). $\{a_n\} \subset (1, 2]$ を $a_1 = 2$ で, $a_n \rightarrow 1$ を満たす単調減少数列, $\{b_n\} \subset [0, 1)$ を $b_1 = 0$ で, $b_n \rightarrow 1$ を満たす単調増加数列とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $r_n := a_n - a_{n+1}$, $s_n := b_{n+1} - b_n$ とする. そして, 関数 $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ を次式で定義する.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{s_n}(x - b_{n+1})^2 + (b_{n+1} - 1) & (x \in [b_n, b_{n+1}]) \\ 0 & (x = 1) \\ \frac{1}{r_n}(x - a_{n+1})^2 + (a_{n+1} - 1) & (x \in [a_{n+1}, a_n]). \end{cases}$$

このとき、 f は逆強単調であるが、 $x = a_n, b_n$ ($n \in \mathbb{N}$) で微分できない。さらに f^{-1} はリプシッツ連続でないので、 f は強単調ではない。

上の例では、微分可能な写像や、強単調でリプシッツ連続な作用素に対して有効なニュートン法やハイブリッド最急降下法を適用することは難しい。これ以外にも、強単調でないが単射な逆単調作用素は多く存在するので、そのような作用素に対して次節で紹介する本稿の主結果が有効に働く。

4 主結果

本節では、単射な逆単調作用素に対する変分不等式問題を解くための逐次近似法を提案し、その収束解析について述べる。

定理 4.1 ([9]). C をヒルベルト空間 H の閉凸部分集合、 A を $VI(C, A) \neq \emptyset$ を満たす C から H への単射な β -逆強単調作用素、 $a \in (0, 2\beta)$ とする。点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$,

$$x_{n+1} = P_C(I - aA)x_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

で構成する。このとき、 $\{Ax_n\}$ は $x_0 \in H$ に強収束し、 $A^{-1}x_0$ は $VI(C, A)$ の唯一つの解である。

以下は定理 4.1 から得られる直接的な結果である。

系 4.1 ([9]). C をヒルベルト空間 H の有界閉凸部分集合、 A を C から H への単射な β -逆強単調作用素、 $a \in (0, 2\beta)$ とする。点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$,

$$x_{n+1} = P_C(I - aA)x_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

で構成する。このとき、 $\{Ax_n\}$ は $x_0 \in H$ に強収束し、 $A^{-1}x_0$ は $VI(C, A)$ の唯一つの解である。

系 4.2 ([9]). C をヒルベルト空間 H の閉凸部分集合、 A を C から H への $VI(C, A) \neq \emptyset$ で、単射な β -逆強単調作用素で、その逆写像 A^{-1} は $R(A)$ 上で連続、 $a \in (0, 2\beta)$ とする。点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$,

$$x_{n+1} = P_C(I - aA)x_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

で構成する。このとき、 $\{x_n\}$ は $VI(C, A)$ の唯一の解に強収束する。

次の定理は、定理 1.5 と補題 3.1 を用いて示すことができる。

定理 4.2 ([9]). C をヒルベルト空間 H のコンパクト凸部分集合, A を C から H への単射な β -逆強単調作用素, $a \in (0, 2\beta)$ とする. 点列 $\{x_n\} \subset C$ を $x_1 \in C$,

$$x_{n+1} = P_C(I - aA)x_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

で構成する. このとき, $\{x_n\}$ は $VI(C, A)$ の唯一の解に強収束する.

最後に、定理 1.2 と関連のある、次の定理について述べる。

定理 4.3 ([9]). C をヒルベルト空間 H の有界部分集合, T を H から C への非拡大写像, A を C から H への単射な作用素で, $R(T)$ 上で β -逆強単調とする. さらに $\{c_n\} \subset (0, 2\beta)$ を $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ を満たす数列とし, 点列 $\{u_n\} \subset H$ を

$$u_n = (I - c_n A)Tu_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

で構成する. このとき, $\{ATu_n\}$ は $x_0 \in H$ に強収束し, $A^{-1}x_0$ は $VI(Fix(T), A)$ の唯一の解である.

系 4.3 ([9]). C をヒルベルト空間 H の有界部分集合, T を H から C への非拡大写像, A を C から H への単射な作用素で, $R(T)$ 上で β -逆強単調, A の逆写像は $R(A)$ 上で連続とする. さらに $\{c_n\} \subset (0, 2\beta)$ を $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ を満たす数列とし, 点列 $\{u_n\} \subset H$ を

$$u_n = (I - c_n A)Tu_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

で構成する. このとき, $\{u_n\}$ は $VI(Fix(T), A)$ の唯一の解に強収束する.

定理 4.3 と系 4.3 の A の条件は、定理 3.2 [15] の A の条件より弱い. しかしながら、定理 4.3 と系 4.3 では C に有界性を仮定している.

参考文献

- [1] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications*, Fund. Math. **3** (1922), 133–181.
- [2] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, Springer, New York, 2011. With a foreword by Hedy Attouch.
- [3] F. E. Browder, *Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **53** (1965), 1272–1276.
- [4] ———, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **54** (1965), 1041–1044.

- [5] M. Edelstein, *On fixed and periodic points under contractive mappings*, J. London Math. Soc. **37** (1962), 74–79.
- [6] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [7] D. Göhde, *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung*, Math. Nachr. **30** (1965), 251–258.
- [8] A. A. Goldstein, *Convex programming in Hilbert space*, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 709–710.
- [9] S. Iemoto, *Some results on approximate solutions of variational inequality problems for inverse strongly monotone operators*, Fixed Point Theory Appl. (2015), 2015:86, 10.
- [10] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly **72** (1965), 1004–1006.
- [11] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591–597.
- [12] J. L. Lions and G. Stampacchia, *Variational inequalities*, Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967), 493–519.
- [13] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis. Fixed Point Theory and its Applications*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.
- [14] H. K. Xu and T. H. Kim, *Convergence of hybrid steepest-descent methods for variational inequalities*, J. Optim. Theory Appl. **119** (2003), 185–201.
- [15] I. Yamada, *The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings*, in Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and Their Applications (D. Butnariu, Y. Censor and S. Reich, Eds.), North-Holland, Amsterdam, 2001, pp. 473–504.
- [16] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. III*, Springer-Verlag, New York, 1985. Variational methods and optimization; Translated from the German by Leo F. Boron.