

Steady Motion of a Vortex Filament

京大 数理研 木田 重雄

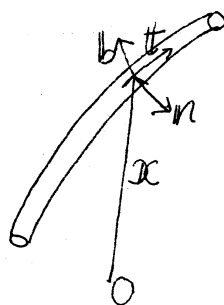
§1. 要旨

無限に細い渦糸の運動は、いわゆる Localized induction equation に支配される。^{1)~4)} この方程式の軸対称的な定常解を求める。解は三つのパラメータを含み、他の著者^{5)~8)}によって既に得られている解の一般化になっている。解の線形安定性については改めて報告する。

§2. Localized induction equation

渦糸の運動は、その太さが充分細い時には、いわゆる Localized induction equation

$$\frac{d}{dt} x = \frac{\kappa C}{4\pi} \log \frac{L}{\sigma} + C \quad (2-1)$$



で記述される事が知られている。ここに、 $\mathbf{x}$ は流体要素の位置、 t は時間、 κ は渦系の循環、 c は点 $\mathbf{x}$ における渦系の曲率、 b は従法線ベクトル、 L は渦系の代表的長さ、 σ は渦系の断面における長さ、 $\mathcal{O}$ は $O(1)$ の量で、他の渦系から誘導される速度を含んでいる。方程式(2-1)は任意の渦度分布に対して成り立つ。また誘導速度は渦系に垂直であるから、渦系は決して伸び縮みしない。

(2-1)の右辺第二項を落とす、適当な scale 変換を行なうと、

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}} \quad (2-2)$$

が得られる。但し、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s, t)$ は渦系の位置ベクトル、 $\cdot$ は渦系の長さ s による微分を表わす。

渦系が変形しないで運動する場合には、一般に、

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = -C \dot{\mathbf{x}} + \Omega \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{x} + \nabla \hat{\mathbf{z}} + W \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (2-3)$$

と書ける。ここに、 C, Ω, ∇, W は定数で、 $\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{x}}(t)$ は、それぞれ z 方向、 $\mathbf{z}$ に垂直な方向の単位ベクトルである。以下では、軸対称的な場合 ($W=0$)

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = -C \dot{\mathbf{x}} + \Omega \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{x} + \nabla \hat{\mathbf{z}} \quad (2-4)$$

と考える。但し、 $\dot{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{x}, \hat{\mathbf{z}}$ は一次独立とする。^{*次頁脚注)}

この時、(2-2)は、

$$-C\dot{\mathbf{x}} + \Omega \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{x} + \nabla \hat{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}} \quad (2-5)$$

となる。また、(2-2)より

$$\frac{\partial}{\partial t} |\dot{\mathbf{x}}| = 0 \quad (2-6)$$

であるから

$$|\dot{\mathbf{x}}| = 1 \quad (2-7)$$

と規格化する。

§3. $\Omega = 0$ の場合 (上記の一次従属の場合に当る)

① $\nabla = 0$ なら $C = 0$ となり、解は 直線

$$\mathbf{x} = a\mathbf{s} + b \quad (|a| = 1) \quad (3-1)$$

である。

② $\nabla \neq 0$ なら、解は、 $\mathbf{z}$ 軸に平行な軸をもつらせんである。

直角座標 (x, y, z) で表わすと

* 前頁脚注) $\dot{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{x}$, $\hat{\mathbf{z}}$ が一次従属の場合は、① $\mathbf{z}$ 軸と軸とするらせん、② $\mathbf{z}$ 軸に平行な直線 のどちらかになる。

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{V^2 C^2}}{V^2} \cos V(S-S_0) + x_0 \\ y = \pm \frac{\sqrt{V^2 C^2}}{V^2} \sin V(S-S_0) + y_0 \\ z = \frac{C}{V} S + z_0 \end{cases} \quad (3-2)$$

である。但し、 x_0, y_0, z_0, S_0 は定数であり、 $V^2 \geq C^2$ なる条件が必要である。このらせんは z 軸方向へ速度 $(1 + \frac{C^2}{V^2})V$ で動いていると見なす事ができる。

§4. $C=V=0, \delta_0 > 0$ の場合⁶⁾

この場合の解は平面曲線で、円筒座標 (r, θ, z) を用いる

$$\begin{cases} r = -\frac{2k}{\sqrt{\delta_0}} \operatorname{cn}(\sqrt{\delta_0}(S-S_0)|k) \\ z = S-S_0 - \frac{2}{\sqrt{\delta_0}} E(\sqrt{\delta_0}(S-S_0)|k) + z_0 \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (4-1)$$

と書ける。ここに S_0, z_0 は定数で、 cn はヤコビの楕円関数である。母数 k は振幅を表わすパラメータと考えられ、周期が交叉しない条件から $0 \leq k \leq 0.8551$ である。また、 E は第二種楕円積分

$$E(u|k) = \int_0^u dn^2(u'|k) du' \quad (4-2)$$

である。

$k \rightarrow 0$ の時 (4.1) は三角関数型の渦糸を表わす。⁹⁾

$$\begin{cases} r \approx -\frac{2k}{\sqrt{\delta b}} \cos \sqrt{\delta b} (s-s_0) \\ z \approx -(s-s_0) + z_0 \end{cases} \quad (4-3)$$

§5. $\delta b > 0$ の場合

円筒座標 (r, θ, z) を用いて (2-5), (2-7) を書き表わす

$$\text{と、} \quad \begin{cases} -C\dot{r} = r\dot{\theta}\ddot{z} - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\dot{z} \end{cases} \quad (5-1)$$

$$\begin{cases} -Cr\dot{\theta} + \delta br = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\dot{z} - \dot{r}\ddot{z} \end{cases} \quad (5-2)$$

$$\begin{cases} -C\dot{z} + V = \dot{r}(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) - r\dot{\theta}(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \end{cases} \quad (5-3)$$

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = 1 \quad (5-4)$$

とる。 (5-1), (5-3) より

$$\dot{z} = -\frac{\delta b}{2}(R-A) \quad (5-5)$$

が得られる。ここに

$$R = r^2 \quad (5-6)$$

で、 A は積分定数である。

さて、スケール変換

$$\tilde{S} = \sqrt{\delta} S, \quad \tilde{R} = \delta R, \quad \tilde{V} = V/\sqrt{\delta}, \quad \tilde{C} = C/\sqrt{\delta}, \quad \tilde{A} = \delta A \quad (5-7)$$

を行ない (5-1) ~ (5-6) と書き換える。その後、簡単のために $\sim$ を省略する。これは、最初から $\delta = 1$ と置いた場合に対応している。多少の計算の後、

$$\dot{\Theta} = \frac{V}{2} + \frac{1}{R} \left(C - \frac{AV}{2} \right) \quad (5-8)$$

$$\dot{R}^2 + R^3 + (V^2 - 2A)R^2 + (A^2 - 4 - 2AV^2 + 4VC)R + (2C - AV)^2 = 0 \quad (5-9)$$

が得られる。

$$R^3 + (V^2 - 2A)R^2 + (A^2 - 4 - 2AV^2 + 4VC)R + (2C - AV)^2 = 0 \quad (5-10)$$

の3根を $\alpha, \beta, -\gamma$ ($\alpha \geq \beta \geq 0, \gamma \geq 0$) とすると、

$$R = (\beta + (\beta - \alpha) \operatorname{sn}^2 \left(\frac{\sqrt{\alpha + \gamma}}{2} s / \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \gamma}} \right)) \quad (5-11)$$

と表わされる。 R の周期は、

$$\frac{4 K \left(\sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \gamma}} \right)}{\sqrt{\alpha + \gamma}} \quad (5-12)$$

である。ここに K は第一種完全楕円積分である。

(5-11) を (5-5) に代入し、 S で積分すると、

$$z = \left(\frac{A}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)S - \sqrt{\alpha + \gamma} E\left(\frac{\sqrt{\alpha + \gamma}}{2} S \middle| \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \gamma}}\right) \quad (5-13)$$

が得られる。第二種楕円積分は

$$E(u + 2K(k)|k) = E(u|k) + 2E(k) \quad (5-14)$$

なる条件を満たす。ここに E は第二種完全楕円積分である。従って、 z が周期的であるためには、

$$\frac{A + \gamma}{\alpha + \gamma} = \frac{E\left(\sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \gamma}}\right)}{K\left(\sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \gamma}}\right)} \quad (5-15)$$

が必要かつ充分な条件となる。

(5-11) を (5-8) に代入し、 S で積分すると、

$$\theta = \frac{V}{2}S + \frac{2C - AV}{2\sqrt{\alpha + \gamma}} \Pi\left(\frac{\sqrt{\alpha + \gamma}}{2} S \middle| \frac{\alpha - \beta}{\alpha}, \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \gamma}}\right) \quad (5-16)$$

が得られる。但し Π は第三種楕円積分で、

$$\Pi(u|l, k) = \int_0^u \frac{du'}{1 - l \sin^2(u'|k)} \quad (5-17)$$

で定義される。

以上により、変形しない渦糸の形は、(5-11)、(5-13) 及び (5-16) で表わされる事が分った。その形は三つのパラメータ C, V, A (又は α, β, γ) の値によって異なり、一般に

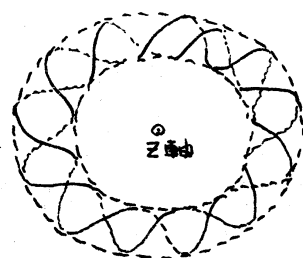
は閉曲線とはならず無限の長さを持つ。特に、パラメータ間に次の関係があれば解は閉曲線となる。

$$\frac{2V \cdot K(\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma}})}{\sqrt{\alpha+\gamma}} + \frac{2(2C-AT)}{\alpha\sqrt{\alpha+\gamma}} \pi\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha}, \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma}}\right) = \frac{2m}{n} \pi \quad (5-18)$$

但し. $\pi(l, k) = \pi(K(k) | l, k) \quad (5-19)$

で、 m と n は互に素な整数である。

この時、渦糸は右図の様なドーナツの表面を m 回巻きつき、 z 軸の回りを n 回まわった後、もとの位置にもどる。



[$m=13, n=2$ の場合]

§4は§5の特別の場合($C=V=0$)である。

§6. 解の安定性

前節で得た解の安定性と線形安定論で調べてみよう。変形しない解 $x_0(s, t)$ に微小攪乱を加え、

$$x(s, t) = x_0(s, t) + x_1(s, t) \quad (6-1)$$

(2-5), (2-7) に代入し、攪乱について線形化する。

擾乱の時間依存性を $e^{\sigma t}$ とし、 σ の実数部分の符号の正負で安定不安定の判断をする。

$$x_1 = u \dot{x}_0 + v \ddot{x}_0 + w \dot{x}_0 \times \ddot{x}_0 \quad (6-2)$$

と成分表示すれば、 u, v, w を支配する方程式は、

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma u = -Cv - \phi \frac{d}{ds} w \\ \left(\frac{d}{ds} \phi \frac{d}{ds} + \phi^2 \right) v = \left(C \frac{d}{ds} + \sigma \phi \right) w \\ \frac{d}{ds} \phi \frac{d}{ds} w = - \left(C \frac{d}{ds} + \sigma \phi \right) v \end{array} \right. \quad (6-3)$$

$$(6-4)$$

$$(6-5)$$

となる事が分る。但し、

$$\phi \equiv |\ddot{x}_0|^2 \quad (6-6)$$

$$\dot{\phi}^2 = -\phi^3 + a\phi^2 + b\phi - c^2 \quad (6-7)$$

である。これらの方程式を適当な境界条件のもとで解けばよいのであるが、その結果は、改めて報告する。

ただ、特別な場合として、 x_0 が円の場合は中立安定、らせんの場合は不安定であると言う事は既に知られている。^{5) 10)}

[参考文献]

- 1) Fraenkel, L. E. 1970 *Proc. Roy. Soc. Lond.* A316, 29.
- 2) Fraenkel, L. E. 1972 *J. Fluid Mech.* 51, 119.
- 3) Saffman, P. G. 1970 *Stud. Appl. Math.* 49, 371.
- 4) Tung, C. & Ting, L. 1967 *Phys. Fluids* 10, 901.
- 5) Betchov, R. 1965 *J. Fluid Mech.* 22, 471.
- 6) Hasimoto, H. 1971 *J. Phys. Soc. Japan.* 31, 293.
- 7) Hasimoto, H. 1972 *J. Fluid Mech.* 51, 477.
- 8) Hasimoto, H. & Kambe, T. 1971 物理学会第26回年会
- 9) Kelvin, Lord 1880 *Mathematical and Physical Papers*
vol. 4, p. 152, Cambridge University Press.
- 10) Kambe, T. & Takao, T. 1971 *J. Phys. Soc. Japan.* 31, 591.