

[B] *Resolvent* にもとづく領域の完備化について

阪大理 渡辺 孝

前稿の福島報告 [A] (詳しくは論文 [1]) の定理 2 (p. 5) における D の compact 化 D^* として福島は $G_1(x, y)$ による Martin-倉持型の completion を取っている (p. 7). しかしながらこの D^* について定理 2 の結果がいえるのは, 定理 1 (p. 3) において構成した *resolvent density* (あるいはそれから定まる *transition density*) の特殊な性質によることが多い. また D^* 上の Markov 過程の強 Markov 性の証明などもいちじるしく複雑になる ([1], [3] を見よ).

この報告では D^* として国田と筆者 [5] が一般的な *resolvent* にたいして導入した completion を取っても定理 2 の結果がそのまま成立つことを示す.

そうすれば D^* 上の強 Markov 過程の構成の所
 は一般論の結果がそのまま使えるので都合が
 よい。更に D^* 上に拡張した resolvent は Ray^[6]
 などの条件を満足するので報告[A]で考えるものよ
 りも扱い易い。

目次

1. 報告[A]の completion の要約
2. F. Knight completion に関する一般的結果
3. 反射壁 Brownian motion の場合の Knight
completion

1. 報告[A]の completion の要約

[A]では反射壁 Brownian motion のもとで領域
 D 内の resolvent density $G_\alpha(x, y)$ と transition
 density $p(t, x, y)$ の構成が詳しく論じてある (p.
 11 以後)。ここでは $G_\alpha(x, y)$ と $p(t, x, y)$ はすで
 に与えられていて (ただし $x, y \in D$)、十分な性質
 をもつことが示された所から始める。Completion と

Ray の Markov 過程の構成については pp. 7-8 で
 大筋がうつてあるが (詳しくは [1, Section 3]), そ
 れをまとめてみると次の 4 つのステップを行っている。

(a) 関数族 $\{G_1(\cdot, y), y \in D\}$ に基づく領
 域 D の Martin-倉持型 completion D^* の定義

(b) 先ず $G_1(x, y)$ を $\xi \in D^*, y \in D$ に次に
 $G_\alpha(x, y)$, $\alpha > 0$, を同じ所に拡張する。

(c) Transition density $p(t, \xi, y)$ を $t > 0, \xi \in D^*,$
 $y \in D$ で定義

(d) $p(t, \xi, y)$ の定める transition function P
 (t, ξ, dy) に対する D^* 上の Ray の Markov 過程
 の構成。

もっとも
 ここまで考えているよりも一般的な resolvent に代
 えて Martin-倉持型 completion (Section 末の注意
 を見よ) を導入し, 拡張された領域上の Ray の Mar-
 kov 過程を構成する試みは, 数年前岡田と筆者
 が行っていて [3] でやったが, (b) の段階で所
 誤りがあった。それは一般には $\alpha > 1$ のとき $G_\alpha(\xi, y)$

が "substochastic condition" $\alpha G_\alpha 1(\xi) \leq 1, \xi \in D^*$
 を満たすことが証明できないことである。この難題
 は今の場合は内部の conservative 性 $\alpha G_\alpha 1(x) = 1, x \in D$ によって救
 われているかという解決とは思われない。第2の真
 は $G_\alpha(\xi, \eta)$ は D^* 上、連続関数の空間 C^* をそ
 れ自身に移す性質で、compact 空間上の resolvent
 に至る Ray の理論 [6] がそのままでは使えない。
 そのため対応する transition function $P(t, \xi, dy)$ の
 存在 ([3] のこの部分は結局正しかったように記憶す
 るがはたしてない)、Ray の Markov 過程の構成の
 議論が Ray の原論文にくらべていさじく複雑
 になっている。今の場合福島は直接 transition de-
 nsity $p(t, \xi, dy)$ を構成し、それを用いて $P(t, \xi, dy)$
 を定めているが、Brownian motion に固有な不変性か
 かり使っているように思われる。強 Markov 性の証明
 は [3] または [1, Section 3] にある。

その後岡田と筆者は以上の難題が F. Knight
 [2] の completion を多少修正したものを利用すれば一般的
 に解決することを示した。その要約を次節のうへ、

最後に反射壁 Brownian motion の Knight completion に対して定理 2 が成立することを示す。

注意 一般に resolvent kernel $G_1(x, y)$ が今の場合程よい性質をもたないときには、報告 [A] のように $G_1(\cdot, y)$ をうまく連続的に拡張できない場合がある。その場合の Martin-compactification は次のようになう。

C_0 を D 内で compact な台をもつ連続関数全体、 $\{f_n\}$ を C_0 で uniform norm について dense な列として関数族 $\{G_1 f_n(x), n=1, 2, \dots\}$ にもとづく completion (この意味については次節を見よ) を取る。たゞし $G_1 f, f \in C_0$ が連続であることは仮定する。このやり方では kernel がなく resolvent が $G_1(x, dy)$ となっているときでも差支えない。Kernel があって適当な条件をみたせば、それが $x \in D^*, y \in D$ に与える自然な仕方で唯一通りに拡張できる。また今の場合のように (通常関数論等であつた場合はすべてそうであるが)、 $G_1(x, y)$ がよい性質をもてば [A] でえた拡張と同じものがえら

れる。これらについてはさっき言った通りではないが、
 [4, p.509 Theorem 3, p.510 Proposition 9.3]
 にある。

2. F. Knight completion に関する一般的结果

D はもっと一般の空間ではないが、簡単にために
 $[A]$ と同じく R^N の有界領域としておく。^{まず} D 上の
 連続関数の族に関する completion を説明する。

Martin - 倉持がそれと区別する意味で completion を
 $\bar{D}$ とかく。これは Constantinescu - Cornea の本で Q -
 compactification と呼んでいるものと本質的に同じも
 のである。 $\mathcal{C}$ を D 上の有界連続関数全体、 $\mathcal{E}$ を $\mathcal{C}$
 の部分族で D の各点を分離しかつ uniform norm
 で dense な可算列を含むものとする。 $\mathcal{V}$ を pseudo
 metric の集まり $|f(x) - f(y)|$, $f \in \mathcal{E}$ によって生
 成される一様構造, $\bar{D}$ を $\mathcal{V}$ に関する D の comple-
 tion とする。これを $\mathcal{E}$ にもとづく D の completion とい
 うことにする。仮定から $\bar{D}$ は D の metric completion
 で次のことがいえる。 $\bar{J}$ を $\bar{D}$ の一様位相, J を D の

もとより位相とする。

Lemma (i) $\bar{D}$ compact, metric space. (ii) A が J -compact _{$\wedge$} なら $\bar{J}$ -compact ($\bar{J}$ -Boel). (iii) $\bar{f}$ が $\bar{J}$ -連続 なら $\bar{f}$ の D への制限 $f = \bar{f}|_D$ は J -連続. 集合 $\bar{A}$ が $\bar{J}$ -Boel なら $A = \bar{A} \cap D$ は J -Boel.

今 E を定数 1 で張られる closed algebra $\underline{B} = \mathcal{C}(E \vee 1)$ を考える. $\underline{B}$ の元はすべて $\bar{D}$ 上に連続拡大できるが, その全体は $\bar{D}$ 上の連続関数の全体 $\underline{C}$ と一致する (Stone-Weierstrass の定理).

さて $G_\alpha \in D$ 上の resolvent (density はなくてもよい). その場合は $G_\alpha = G_\alpha(x, dy)$ で次の条件を満たすものとする.

D. Ray の条件 (1) G_α は $\underline{C}$ をそれ自身にうつす.
(2) $\underline{C}$ の正の関数全体 $\underline{C}^+$ の可算部分族 $\underline{C}_1$ で D の実を分離し, $\underline{C}_1$ の f に対して $\alpha G_{\alpha+1} f \leq f$ を満たすものが存在する.

一般性を失わずに $\underline{C}_1 \ni 1$ とできるからこれも仮定する. 上の条件の (2) はたとえば "ふつ" 仮定される

$$(2)' \quad \alpha G_\alpha f(x) \rightarrow f(x), \quad f \in \underline{C}.$$

よりもずっと多い。

Fundamental lemma (F. Knight) G_α を Ray
の resolvent とする。そのとき $\underline{C}_1$ を含む $\underline{C}$ の closed
subalgebra $\underline{A}$ 2" G_α に対して不変, かつ G_α による
値域 $G_\alpha(\underline{A})$ (α に無関係) がその中で dense
な可算部分族を含むようなものが存在する。

$\alpha_1, \alpha_2, \dots \in (0, \infty)$ 2" dense な数列, $S_0 = \underline{C}_1$
とおく。 $S_0, \dots, S_n$ が定義されたとして

$$S_{n+1} = S_n \vee G_{\alpha_1}(S_n) \vee \dots \vee G_{\alpha_{n+1}}(S_n)$$

(但し $\vee$ は algebra を生成する記号)

とおく。 $\underline{A} = \mathcal{C}(\bigcup_n S_n)$ が求まりそうである。

注意 一般に $\underline{A}$ は様々に取りうる。場合に応じて
都合のよいものをえらばよい。例えは滑らかな境界
界 ∂D (in R^n) を持つ吸収壁 Brownian motion の
 G_α^0 については, $G_\alpha^0(\underline{C}) \subseteq \underline{C}_\infty$ (∞ 2" 0 になる
連続関数全体) であるから, $\underline{A} = \underline{C}$ になれる。また
反射壁 Brownian motion 2" ∂D が滑らかなら

$\underline{A} = \{ \partial D \text{ に連続的に拡張できる } f \in \underline{C} \text{ の全体} \}$
になれる: これは [1, section 1] から分る。そうすると人

下に示べる Knight completion は $D \cup \bar{D}$ と同相になる。

今前の E として $G_\alpha(A) \cup \bigcup_{\alpha} C_\alpha$ をとり、それにもつて completion を Knight completion とする。このとき $\bar{f} \in \bar{C}$ に対して $G_\alpha f$ ($f = \bar{f}|_D$) は $\bar{D}$ 上に連続的に拡張されることが容易に分る。それを $\overline{G_\alpha f}$ とかけば、Ray の定理から measure $\overline{G_\alpha}(\xi, \bar{A})$, $\xi \in \bar{D}$, $\bar{A} \subset \bar{D}$ が定まって

$$\overline{G_\alpha f}(\xi) = \overline{G_\alpha f}(\xi) \stackrel{(\text{def})}{=} \int_{\bar{D}} \bar{f}(\eta) \overline{G_\alpha}(\xi, d\eta).$$

証明は略すが、 $\overline{G_\alpha}$ は G_α の拡張であり、 $\bar{D}$ 上で Ray の条件を満たす resolvent であることが分る。

(もとの G_α が (2) を満たしてても $\overline{G_\alpha}$ は一般に (2) を満たさない。これは [A] p. 8 の branching points からのことに対応する。) したがって Ray [6] の議論により、対応する transition function $\bar{P}(t, \xi, \bar{A}) \in \text{Ray}$ の Markov 過程が構成できる。詳しくは [5], [6] を参照されたい。

$\bar{P}(t, \xi, \bar{A})$ は次のようなものが唯一つ定まる;

$$(1) \quad \bar{G}_\lambda(\bar{x}, \bar{A}) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \bar{P}(t, \bar{x}, \bar{A}) dt,$$

(2) $\bar{C} \ni \bar{f}$ に対して, $\bar{P}_t \bar{f}(\bar{x})$ が t について右連続

かつ $x \in D$ かつ $\bar{G}_\lambda(x, \bar{D} \setminus D) = 0$ であるから,

それと $\bar{\mu}$ (Lebesgue measure on R^1) が t について

$\bar{P}(t, x, \bar{D} \setminus D) = 0$ である。これから一般にこれから $\bar{P}(t, x,$

$\bar{D} \setminus D) = 0$ for all t であることがで、 $\int_0^\infty \bar{G}_\lambda$ が D 上の

transition function $\bar{P}(t, x, A)$ の Laplace 変換になっている

ことは限らぬ。なぜならば $[0, 1)$ (mod 1) 上の

等速運動を $(0, 1)$ 上に制限したものの resolvent を

とすればよい。

$\bar{G}_\lambda$ に もう 1 つ の 仮定 を おく。

条件 (P) $\bar{G}_\lambda$ は D 上の ある transition function

$\bar{P}(t, x, dy)$ の Laplace 変換になっている、つまり $\bar{P}(t, x, dy)$

は $f \in \bar{C}$ に対して $\bar{P}_t f(x)$ が t について右連続にな

っているものとする。

この時

(c) $\bar{P}$ は P の拡張である。すなわち $x \in D$ ならば

$$\bar{P}(t, x, \bar{A}) = P(t, x, \bar{A} \cap D).$$

しかし $\xi \in \bar{D}$ については $\bar{P}(t, \xi, \bar{D} \setminus D) = 0$ は必ずしも成り立たない。これは Martin-compactification を要する事である。そのためには一般に Martin-compactification より強い metric completion としておきたい。その意味で余分な点が増え加えらる。この事は次のように解決される。

$\bar{D}_R = \{ \xi \in \bar{D} \mid \bar{G}_R(\xi, \bar{D} \setminus D) = 0 \}$ とおく。 $\bar{D}_R$ は D を含みながら更に次のことがいえる。

(iii) $\xi \in \bar{D}_R$ ならば、 $\forall \alpha > 0, t > 0$ に対して $\bar{G}_R(\xi, \bar{D} \setminus D) = \bar{P}(t, \xi, \bar{D} \setminus D) = 0$ 。

(iv) $\bar{D}_R$ の点から出発した運動は $\forall \alpha > 0$ paths は $\bar{D} \setminus \bar{D}_R$ を決して訪れない。したがって特に D から出発する process において $\bar{D} \setminus \bar{D}_R$ の点は全く影響がない。

3. 反射壁 Brownian motion の場合の Knight completion

$G_R(x, y)$ を反射壁 Brownian motion の resolvent density とする。Ray の条件は明らかに満たされているから (p. 4, 定理 1 の (3)), この G_R にも $\leq$ が $\leq$ として

Knight completion $\bar{D}$ を取る。一般性を失わずに completion の base $\underline{A}$ は $\underline{C}_0$ を含むとしてよい (=4は節尾, 注意3に於て関係する)。 $\bar{C}_0$ から定まる $\bar{P}$ をそれに対応する Ray の Markov 過程 $\underline{X}$ を考える。定理 1 (5) により条件 (P) が満たされるから $\bar{P}$ は内部の transition density $p(t, x, y)$ から定まる transition function の拡張になっていることを注意しよう。 $\underline{X}$ が定理 2 (2) の命題 (a) (c) (d) を満たすことは一般論における結論である。ただし D_1^* の代りに $\bar{D}_R$ での non-branched point の全体 $\bar{D}_1$ をとる。(e) の証明は [1] のようにある。

定理 2 (1) の前半は $\xi \in \bar{D}_R$ のとき, $A \subset D$ について

$$\bar{P}(t+\sigma, \xi, A) = \int_D \bar{P}(t, \xi, dy) \int_A p(\sigma, y, z) dz$$

であるから, $\bar{P}$ が D 上の Lebesgue measure について絶対連続になることから出る。この場合 $T(\xi)$ が $T(\cdot)$ の y で成立つような density $\bar{p}(t, \xi, y)$ を与えるためには resolvent kernel を $\bar{D}_R \times D$ に拡張した [1] の Martin-令語の場合にいた議論をくり返す必要があるが, そのことは重要でないと思う (注

意 4 も見よ). 定理 2 (1) の後半は一般論では
右連続の μ が主張されているが, (2) の命題 (b) が
これは明らかである.

結局 定理 2 (2) の命題 (b) が 定理²_A の本質的
部分 (反射壁 Brownian motion についての) といえること
になったが, それには [1] にある証明が Knight completion
についてもそのまま使えたことを確認する必要がある. [1]
の証明で completion に関連する重要な事柄は次の
3つである.

(a) $\bar{D}$ が内部での transition function P の拡張
であること.

(b) $G_\alpha(x, y)$ が $\bar{D}_R \times \bar{D}_R$ に都合よく拡張される
こと.

(c) $\bar{P}$ に関する 1-excessive な関数が $DU\bar{D}_1$ での
 $\bar{G}_\alpha$ -potential として一意に表現されること ([A, p. 9, 定理 4]
または, [1, Section 4, Theorem 3]).

(a) はすでに示した. (c) は [1] と同様に証明
される. 以下 (b) について述べる.

$G_\alpha(x, y)$ が $\overline{D}_R \times \overline{D}_R$ への拡張 前節末尾の (iv)

または (iii) により, $\overline{G}_\alpha(\overline{P})$ は $\overline{D}_R$ 上で考えても resolvent (transition function) になっているから, 今後つねに $\overline{D}_R$ 上で考えることにして同じ記号を用いる. $\overline{P}$ が P の拡張になっていることから, $\overline{D}_R$ での [1] の Lemma 4.1 が成立する. すなわち

(i) D 上の関数 u が P に関して α -excessive ならば, $\overline{D}_R$ 上の $\overline{P}$ に関して α -excessive な関数 $\overline{u}$ に一意的に拡張できる.

(ii) $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ が $\overline{P}$ に関して $\overline{D}_R$ 上で α -excessive で D 上で殆んど一致するとする (Lebesgue measure) 一致すれば, $\overline{u}_1 = \overline{u}_2$ は一致する.

これは

$$(*) \quad \overline{u}(\xi) = \lim_{t \rightarrow 0} e^{-\alpha t} \int_D \overline{P}(t, \xi, dz) u(z), \quad \xi \in \overline{D}_R$$

で与えられる. この右辺は $t \rightarrow 0$ のとき単調増加である.

さて $G_\alpha(x, y)$ が x に関して α -excessive (P) だから, $\overline{D}_R$ 上で $\overline{P}$ に関して α -excessive な $\overline{G}_\alpha(\xi, y)$ に拡張

拡張できる。そのとき $A \subset D$ について $\overline{G}_\alpha(\xi, A)$ も α -excessive ($\overline{P}$) であるから

$$\begin{aligned} \int_A \overline{G}_\alpha(\xi, y) dy &= \lim_{t \rightarrow 0} e^{-\alpha t} \int_D \overline{P}(t, \xi, dz) \int_A G_\alpha(z, y) dy \\ &= \overline{G}_\alpha(\xi, A) \end{aligned}$$

となつて $\overline{G}_\alpha(\xi, y)$ は $\overline{G}_\alpha(\xi, A)$ の density であることが分る。また $\overline{G}_\alpha(\xi, y)$ が y に関し α -excessive ($\overline{P}$) も容易に分るから、再び $\alpha^*(x)$ を用いて $\overline{G}_\alpha(\xi, y)$, ξ , $\eta \in \overline{D}_R$ がえられる。これが一方をこめたとき他方について $\overline{D}_R$ 上で α -excessive ($\overline{P}$) であること、 ξ, η について対称なことおよび拡張の一貫性が容易に分る。

若干の注意を加える。

注意 1 $[A]$ では先ず resolvent kernel (G , ทั่วไป G_α) を $D^* \times D$ に拡張することから出発したが、やれやれの場合は kernel の拡張は最後でかつ $\overline{D}_R \times \overline{D}_R$ にたゞちに拡張される。

注意 2 上に述べた拡張は resolvent kernel がある場合にけいつでも成り立つ一般的事実である。しか

い kernel が対称でない場合に y についてこの拡張は別の completion (co-resolvent に関するもの) で与えられた境界に対しておこなわれる。

注意 3 上の第一段階の拡張が連続的な拡張であるかどうかはわからない。しかし $A \supset C_0$ の仮定から $\overline{G}_\alpha(\xi, y)$, $\xi \in \overline{D}_1 \setminus D$ が y について α -harmonic なことが次のように示される。

$\overline{G}_1(\xi, y)_{\xi \in \overline{D}_1 \setminus D}$ が 1-harmonic なことを示そう。 $D^* \in CAJ$ の Martin-倉持 completion をする。 $x_n \rightarrow \xi$ in $\overline{D}$ のとき部分列が $x_{n_k} \rightarrow \exists \xi' \in D^*$ で $G_1^*(\xi', y)$ は y に関して 1-harmonic である。 $f \in C_0$ とする。 $G_1 f$ は $\overline{D}$ 上に連続拡張をもち、それを $\overline{G_1 f}$ でかくと

$$\overline{G_1 f}(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_1 f(x_n)$$

である。 ξ が non-branching なこと、 $\overline{D}_R$ に属することを次の式が示す。

$$\begin{aligned} \overline{G_1 f}(\xi) &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha \overline{G_{\alpha+1}} \overline{G_1 f}(\xi) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha \overline{G_{\alpha+1}} G_1 f(\xi) = \overline{G_1 f}(\xi). \end{aligned}$$

一方 $G_1^* f(\xi') = \lim_{n' \rightarrow \infty} G_1 f(x_{n'})$ であるから

$$G_1^* f(\xi) = \bar{G}_1 f(\xi), \quad f \in C_0.$$

これから殆んどすべての y に対し $G_1^*(\xi, y) = \bar{G}_1(\xi, y)$ であるが, 両辺が 1-excessive であるからすべての y で
 成り立つ. $\therefore \bar{G}_1(\xi, y)$ は 1-harmonic (in y) である.

任意の $\alpha > 0$ に対しては $\bar{G}_\alpha(\xi, y)$ に関する resolvent
 方程式を用いるか, $G_\alpha(x, y)$ にもとづく α -次の
 Martin-倉持 completion を用いればよい.

注意 4 $\bar{P}(t, \xi, dy)$ の density $\bar{p}(t, \xi, y)$ がすべての
 $y \in T_3$ もみたすように定めるには次のように行え
 る. [1] の section 3 で $G_\alpha^*(\xi, y)$ から $p(t, \xi, y)$
 を定めるときで使うとは α -harmonic という性質と
 resolvent 方程式のみであるから, $\xi \in \bar{D}_1$ については注
 意 3 により同じように $\bar{p}(t, \xi, y)$ が定まる. $\xi \in \bar{D}_R \setminus \bar{D}_1$
 については ξ における branching measure を平均すれば
 よい.

注意 5 Martin-倉持 completion に関する G_1^* -potential
 による表現定理 [A, p. 9, 定理⁴] の一意性と, Knight comp-
 letion に関するそれ [p. 40, (C)] を合せると D_1^* と $\bar{D}_1$
 が one-to-one に対応することが分る. 注意 3 はこれから

も示される.

注意 6 $\zeta_\lambda \in \overline{D}_R$ を固定したとき $\overline{G}_\alpha(\zeta, \eta)$ は $\overline{D}_R$ 上で ζ について下に半連続になる. これを使えば, $\overline{D}_1 \ni \zeta$ とき $\overline{G}_\alpha(\zeta, \eta)$ は $\overline{D}_R \setminus \{\zeta\}$ において η の関数として " X に関して α -harmonic" なことが一般論として示される ([4, p. 499] と同じにやればよい). これは再び注意 3 の結果を含み, 関数論における full-harmonic の概念を α 次で考えたものになっている. なおこの事実は Martin-倉持の completion では $\alpha=1$ についてのみにえらと思われる.