

Product spaces に関する

ある種の問題について

城面大 理、数 厚 地 正 彦

0°. 序

論文 [1] で, 集合族 $\{A_x\}$ に対して

$$(1) \quad \limsup A_x$$

という記号を導入し, これを用いて積空間 (以下積空間という時は, 2つの空間に関するものとする) の正規性を, その factor spaces に移して説明した。また, 論文 [2] では, (1) を用いて "upper compact" という概念を定義し, これが積空間からその factor space への projection map が closed である条件と密接に結びついていることを示した。更に, [3] では, 1938年に Čech により提えられて以来の問題に完全な解が与えられたが, その解が得られるまでの過程で, (1) の概念と [2] の結果が大変重要な役割をえている。

これらのことから見られるように, (1) は比較的重要な概念と思われ, にも拘わらず関心が薄く よう 思われるので,

ここに上記のいささつを述べながら (1) の概念を改めて紹介し、あわせて、それに関連する、一般に興味を持たれるかも知れると思われる幾つかの問題を提示したい。

以下では、空間 X , Y 等は少なくとも T_1 空間とする。

1°. $\limsup \mathcal{F}$ の定義.

$\mathcal{F} = \{A_x \subset Y; x \in Z \subset X\}$ は Y の部分集合 A_x の族, A_x は X の部分集合 Z の元 x を添字にもつ, とする。また, $a \in X$ の任意の点, $\mathcal{U}_a$ は a の近傍系とすると

$$(2) \quad \limsup_a \mathcal{F} = \limsup_a A_x \\ = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_a} \overline{\bigcup_{x \in U} A_x}$$

と置く。

2°. upper compactness

Y が X に対して upper compact であるとは, $\{A_x \neq \emptyset; x \in Z \subset X\}$ は空でない Y の部分集合の任意の族, $a \in \overline{Z}$ とすると, 常に

$$\limsup_a A_x \neq \emptyset$$

であることである。この定義は, Z^c は Z の集積点で Z に含まれていないものの集合とすると, 次の称に言い換えても

よい: $\{A_x \neq \phi; x \in Z \subset X\}$, $Z^c \neq \phi$, なる任意の族に
おいて

$$(3) \quad \forall a \in Z^c; \limsup_a A_x \neq \phi.$$

これに関しつゝの定理が得られている。

定理1 ([2]). Y が X に対して upper compact である必要十分条件は, $X \times Y$ から X への projection map π_X が閉であることである。

3°. $X \times Y$ の countable compactness

『積空間 $X \times Y$ はいかなる場合に countably compact であるか』という問題は, 周知の如く, 1938年 Čech により提出された。1953年には Novák [8] により, countable compactness は productive であるという事が示された。そして, [3]で次の定理2が与えられ, この問題は一応解決されたが, この定理が得られたいよいよは次の様なものであった。

いま, 一般に, 点 p が集合 $H = \{H_\alpha\}$ の cluster point であるというのは, p の任意の近傍が H の無限の元と交わることである。また, $x \in X$ の点, $A \in Y$ の部分集合とあると

き, $(x, A) = \{(x, y); y \in A\}$ とする。

$X \times Y$ が *countably compact* であるとき, 次の statements は同値である:

- (i) $X \times Y$ は *countably compact*。
- (ii) Z が X の無限部分集合であるとき, $X \times Y$ の部分集合 $\{(x_\alpha, y_\alpha); x_\alpha \in Z\}$ は集積点をもつ。
- (iii) Z が X の無限部分集合であるとき, $X \times Y$ の部分集合の族 $\{(x, A_x); x \in Z\}$ は cluster point をもつ。
- (iv) Z は X の部分集合で $Z^c \neq \emptyset$ であるとき, Y の部分集合の任意の族 $\{A_x \neq \emptyset; x \in Z\}$ に対し

$$\exists a (a \in Z^c) ; \limsup_a A_x \neq \emptyset$$

この最後の (iv) と 2° の (3) とを比べると, $\forall$ の記号が $\exists$ に代わっているだけである。(3) は, 定理 1 により, π_X が閉, 即ち, $X \times Y$ の閉部分集合を X に project したものが X の閉集合であることと同値である。従って, statement (i) は, $X \times Y$ の閉部分集合を X に project したものが, X の閉集合であることと同値ではないか と思ふことは自然であろう。このことに気がれば, 次の定理を得ることはさう困難なことではない。

定理 2 ([3]). X と Y が countably compact である。
 $X \times Y$ が countably compact である必要十分条件は、
 $X \times Y$ の開部分集合 A に対し $\pi_X(A)$ が countably
compact であることである。

countable compactness は、最近急速に発展しつつあ
る M -space の理論と密接にも無縁ではない。例えば、[6],
§5 参照。また、長田の『 M -space は countably compact
space と距離空間の積空間の或る開部分集合と同相か』と
いう興味ある問題があることも周知であろう。

4°. feebly compactness

空間 X が feebly compact (あるいは lightly compact)
であるとは、空でない、互いに交わらない開集合 G_n の
族 $\mathcal{G} = \{G_n\}$ が局所有限ならば、実は $\mathcal{G}$ は有限でなければ
ならない ことである。feebly compact なら pseudo-
compact であるか、空間が完全正則ならば逆も成立すること
は容易に分る。pseudo-compact 空間は色々面白い性質を
持つことが知られているが、その多くは完全正則性を仮定し
ている。しかし、それなしにでも成立する興味ある結果も少
なくない。例えば、Frolík [4] の Lemma 1.3 はつぎの

標に云つてもよい: f は feebly compact な $X \times Y$ の上の連続実関数とすれば

$$F(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y), \quad G(x) = \sup_{y \in Y} f(x, y)$$

も連続である。

この標を例を後にとも示すが, これらのことが feebly compactness をここで取り上げた理由であるが, この概念は強くても, また, $\limsup F$ を用いて便利であることを以下に注意しよう。

5°. formulation

$\mathcal{U} = \{U_n \subset X; n=1, 2, \dots\}$, $\{V_n \subset Y; n=1, 2, \dots\}$ とそれぞれ空でない, 互に交わるない X および Y の任意の開集合族, また, $x \in U_n$ に対し $A_x = V_n$ とする。 X と Y が feebly compact のとき, $X \times Y$ が feebly compact である必要十分条件は, $\mathcal{U}$ の或る cluster point a に対し $(2) \limsup_a A_x \neq \emptyset$ であることである ([4, Lemma 1.2] 参照)。

この formulation を用いると, 例えは次の玉野や, 或いは Glicksburg の定理は (完全正則性を仮定し, 空間は ω -pseudo-compact とするといえるが, 我々の場合には)

統一的に, しかも容易に得られる。(後者の Glicksburg
による証明は大変簡単とは云えるの標に思われる。)

(玉野 [11, Theorem 2]) $X \in \text{feebly compact}$ と
する。 X の, P -点である点 x は x を P -点であれば, 任意
の feebly compact 空間 Y に対して $X \times Y$ は feebly
 compact である。

(Glicksburg [5, Theorem 3]) X と $Y \in \text{feebly}$
 compact とする。 X が $\text{locally } \mathcal{K}_r \text{ compact}$, Y の P -
点である各点 y は濃度 $\leq \mathcal{K}_r$ の近傍基をもつならば, $X \times Y$
は feebly compact である。

($X \times Y$ の $\text{feebly compactness}$ を与える最近の結果, 例
えば [9], [10] 等も上記の Glicksburg の定理を本質的に
はみているの標に思われる。)

6°. 問題

(i) $X \times Y$ の閉部分集合 A に対して $\pi_X(A)$ の性質で
 $X \times Y$ の性質を特徴付けること。

この問題は, 45 年秋の浜松大学学会でも述べたものであ

るが、定理2の方法である。更に、 A は内集合以外の性質で同様の問題を考えられる。(A は 0 -集合と考えると [11, Theorem 1] の場合と取る。)

(ii) $X \times Y$ が countably compact とする必要十分条件を更に求めること。

$X \times Y$ が pseudo-compact とする必要十分条件は幾つかあるが、countably compact の場合も、必要に応じて色々使い易い形で求めかくことが便利であろう。

(iii) $\mathcal{M}$ は無限濃度とする時、 $X \times Y$ が $\mathcal{M}$ -compact とする必要十分条件を求めること。

これは、 $\mathcal{M} = \aleph_0$ の時既に求まった以上、そう難かしい問題ではなっていないであろう。

(iv) $X \times Y$ が feebly compact である必要十分条件を求めること。

これは、一応、5° の formulation が得られたことになっているが、これは $X \times Y$ が feebly compact である条件を factor spaces の上で言いかけた形に過ぎないとも云えるので、更に、尤もらしい条件が望まれる。pseudo-compact の場合に於いて得られているので ([11])、これもそう困難な問題ではなからう。

(v) つぎの Frólík [4] の assertion を証明或いは

改正すること。

[4] にあるこの assertion の証明には follow できない本質的部分がある。この assertion が通りである反例は得られていない。従って、それが正しいか過っているか不明であるが、恐らく大体正しいであろうと思われる。尚、この assertion を本質的に引用している最近の文献 [7] があるので注意が必要である。

$\mathcal{A}$ は次の性質をもつ完全正則なすべての空間 X の族とする：
 $\colon$ pseudo-compact で完全正則な任意の空間 Y に対して $X \times Y$ は pseudo-compact である。

また、 $\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とする。

[4, Theorem 3.4] 完全正則空間 X が $\mathcal{A}$ に属する必要十分条件は、 X の空でない、互に交わらない開集合 U_α の任意の無限族は、次の性質をもつ可附部分族 $\{U_n; n \in \mathbb{N}\}$ をもつ：
 $\mathbb{N}$ の無限部分集合から成る任意の filter $\mathcal{F}$ に対して

$$\bigcap_{N_1 \in \mathcal{F}} \overline{\bigcup_{n \in N_1} U_n} \neq \emptyset.$$

(注意) この最後の式は 1° の式 (2) と大変よく似ていることに注意。

References

1. Atsuji, M., Necessary and sufficient conditions for the normality of the product of two spaces, Proc. Japan Acad. 45(1969), 894-898.
2. ———, Two spaces whose product has closed projection maps, *ibid.*, 899-903.
3. ———, Necessary and sufficient conditions for countable compactness of product spaces, *ibid.* (to appear).
4. Frolík, Z., The topological product of two pseudocompact spaces, Czech. Math. J. 10(1960), 339-349.
5. Glicksberg, I., Stone-Čech compactifications of products, Trans. AMS 90(1959), 369-382.
6. Morita, K., Topological completions and M-spaces, Sci. Reports Tokyo Kyoiku Daigaku, Sec. A, 10(1970), 271-288.
7. Noble, N., Countably compact and pseudocompact products, Czech. Math. J. 19(1969), 390-397.
8. Novák, J., On the cartesian product of two compact spaces, Fund. Math. 40(1953), 106-112.
9. Scarborough, C.T.; A.H. Stone, Products of nearly compact spaces, Trans. AMS 124(1966), 131-147.
10. Stephenson, R.M. Jr., Pseudocompact spaces, Trans. AMS 134(1968), 437-448.
11. Tamano, H., A note on the pseudo-compactness of the product of two spaces, Memoirs College Sci., Univ. Kyoto, Ser. A, 33(1960), 225-230.