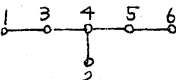


(E₆)型単連結有限 Chevalley 群 の共役類について

東大 理 水野 賢三

$G, \bar{G}$ をそれぞれ標数 p の有限体 F_q とその代数閉包 K 上の (E₆) 型単連結 Chevalley 群, $\bar{H}, \bar{U}, W, \Sigma$ (ル+系), Π (基底) 等記号については [1] に準ずるものとする。特に, $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ を図形が  となる様に定める。 $\bar{H}, \bar{U}$ を $\bar{H}, \bar{U}$ に対応する G の部分群とする。ここでは、共役類を決定する方法について述べることは止め、結果のみを記す。

p' -元については次の結果がある。

定理 ([2]) G の p' 元の共役類と $(\bar{H}/W)_\sigma$ (σ は $\bar{G}$ の Frobenius 同型) の元とは 1 対 1 に対応し、 $\Gamma(w, S) = \{h \in \bar{H} \mid w(h) = \sigma(h), Z_W(h) = W_S\}$ ($S \subseteq \Pi \cup \{\text{最低ル+}\}, w \in W \text{ s.t. } w(S) = S$) の元に対応する G の共役類の元 h に対し、

$$Z_G(h) \cong \bar{H}(w) \langle \bar{x}_S \rangle_{\sigma^{-1}w}$$

となる。ここで $\bar{H}(w) = \{m \in \bar{H} \mid w(m) = \sigma(m)\}$ とする。

この定理に従って各 $\Gamma(w, S)$ に対応する共役類の数を決定したが、^{単に} $\Gamma(w_{1234}, w_{2456}, w_{3456}, w_{12344556}, \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_2, \text{最低ル+}\}) = \phi$ であ

った。

p 元の代表系とその中心化群の位数は次の通りである。

$\chi_1(1)$	$(q^6-1)(q^5-1)(q^4-1)(q^3-1)(q^2-1)q^{36}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_{12}(1)\chi_{1234456}(1)\chi_{\delta-\alpha_2}(\zeta)$
$\chi_1(1)\chi_3(1)$	$2(q^3-1)^2(q^2-1)^2q^{26}$	(但し $(3, q-1)=1$) $3(q^2+q+1)q^{18}$
$\chi_1(1)\chi_4(1)\chi_6(1)\chi_5(\zeta)$	$2(q^6-1)(q^4-1)q^{26}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_{-\delta}(\lambda)\chi_2(1), 3(q^2+q+1)q^{18}$
$\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_{245}(1)\chi_{23445}(\eta)$	$2(q^6-1)(q^4-1)q^{26}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(1) (3, q-1)(q^2-1)q^{12}$
$\chi_1(1)\chi_4(1)$	$(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)(q-1)q^{23}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda) 3(q^2-1)q^{12}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)$	$(q^4-1)(q^2-1)(q-1)q^{19}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda^2) 3(q^2-1)q^{12}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)$	$(q^3-1)(q^2-1)(q-1)q^{26}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_2(1)\chi_6(1) (q-1)q^{15}$
$\chi_1(1)\chi_4(1)\chi_6(1)$	$(q^3-1)(q^2-1)^2q^{31}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_2(1) (3, q-1)(q^2-1)q^{22}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)$	$(q^2-1)(q-1)q^{15}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda)\chi_2(1) 3(q^2-1)q^{22}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_6(1)$	$(q^2-1)(q-1)q^{19}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda^2)\chi_2(1) 3(q^2-1)q^{22}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(1)$	$(3, q-1)(q^6-1)(q^2-1)q^{22}$	$\chi_6(1)\chi_5(1)\chi_4(1)\chi_3(1)\chi_2(1) (2, p)(q-1)q^9$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda)$	$3(q^6-1)(q^2-1)q^{22}$	$\chi_6(1)\chi_5(1)\chi_4(1)\chi_3(1)\chi_2(1)\chi_{345}(\eta) 2(q-1)q^9$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda^2)$	$3(q^6-1)(q^2-1)q^{22}$	$\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_{134}(1) (q-1)q^{13}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_2(1)\chi_5(1)$	$(q^2-1)(q-1)q^{25}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_5(\zeta) 2(3, q-1)q^{12}$
$\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)$	$(2, p)(q^3-1)(q^2-1)q^{13}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda)\chi_5(\lambda\zeta) 6q^{12}$
$\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_{245}(\eta)$	$2(q^3-1)(q^2-1)q^{13}$	$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(\lambda^2)\chi_5(\lambda^2\zeta) 6q^{12}$
$\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_{245}(1)$	$6(q-1)^2q^{18}$	$\chi_{13}(1)\chi_{24}(1)\chi_{56}(1)\chi_{34}(1)\chi_{45}(1)\chi_{234}(1)\chi_{23445}(\eta), 2(q+3)q^{12}$
$\chi_1(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_6(1)\chi_{-\delta}(\zeta)$	$2(q^2-1)q^{18}$	$\chi_{13}(1)\chi_{24}(1)\chi_{56}(1)\chi_{34}(1)\chi_{45}(\lambda)\chi_{234}(1)\chi_{23445}(\lambda\eta), 6q^{12}$
$\chi_1(1)\chi_2(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_{13445}(1)\chi_{1233445}(\eta), 2(q^2-1)q^{18}$		$\chi_{13}(1)\chi_{24}(1)\chi_{56}(1)\chi_{34}(1)\chi_{45}(\lambda^2)\chi_{234}(1)\chi_{23445}(\lambda^2\eta), 6q^{12}$

$$\begin{array}{ll}
\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_{34}(1)\chi_{45}(1)\chi_{345}(1) & 2(3,8-1)8^{12} \quad \chi_1(1)\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_{2345}(\dots C) \\
\chi_{13}(1)\chi_{24}(1)\chi_{56}(1)\chi_{34}(1)\chi_{45}(1)\chi_{345}(1) & 68^{12} \quad (\text{但し } p=3) \quad 38^6 \\
\chi_{13}(1)\chi_{24}(1)\chi_{56}(1)\chi_{34}(1)\chi_{45}(\lambda^*)\chi_{345}(1) & 68^{12} \quad \chi_1(1)\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_{234}(\eta) \quad 2(3,8-1)8^6 \\
\chi_2(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_{13}(1)\chi_{345}(1) & (3,8-1)8^8 \quad \chi_1(1)\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(\lambda)\chi_6(1) \quad 3(2,p)8^6 \\
\chi_2(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_{13}(1)\chi_{345}(\lambda) & 38^8 \quad \chi_1(1)\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(\lambda^2)\chi_6(1) \quad 3(2,p)8^6 \\
\chi_2(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_{13}(1)\chi_{345}(\lambda^2) & 38^8 \quad \chi_1(1)\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(\lambda)\chi_6(1)\chi_{234}(\eta) \quad 68^6 \\
\chi_1(1)\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(1) & (2,p)(3,p)(3,8-1)8^6 \quad \chi_1(1)\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(\lambda^2)\chi_6(1)\chi_{234}(\eta) \quad 68^6 \\
\chi_1(1)\chi_2(1)\chi_3(1)\chi_4(1)\chi_5(1)\chi_6(1)\chi_{2345}(\tau) & \\
(\text{但し } p=3) & 38^6
\end{array}$$

記号について

$$\chi_{i_1 \dots i_k}(t) = \chi_{\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_k}}(t) \quad , \delta : \text{最高ルート}$$

$\eta : F_8^*(p=2)$ の元で $X^2 + X + \eta$ が F_8 上の既約多項式となるものの 1 つ。

$\tau : F_8^*$ の元で $X^3 - X + \tau$ が F_8 上の既約多項式となるものの 1 つ

$\lambda : F_8^*$ の非平方元の 1 つ。(特に $(3,8-1)=3$)

$\zeta : F_8^*$ の非平方元の 1 つ。(特に $p+2$)

p 元の中心化群の構造も比較的容易に得られる。 $\bar{G}$ に於ては、 p -元の共役類の個数は標数と無関係に一定であり 20 個である。 F_4 型については、 $p=2$ の時 19 個、 $p+2$ の時は 15 個、 G_2 型については $p=3$ の時 5 個、 $p+3$ の時には 4 個であるこ

とにより、一般に、代数閉体上の Chevalley 群の unipotent class の数は、標数からルートの長さの2乗の比と異なる時には一定で体の取り方に寄らない様に見える。([3], [4], [5], [6])

参 照

1. R. Steinberg : Lecture on Chevalley groups.
Yale Univ (1967)
2. " : Endomorphisms of Linear Algebraic Groups. Memoir 80. A.M.S. (1968)
3. B. Chang : The Conjugacy classes of Chevalley groups of type (G_2) . J. Alg 9 (1968)
4. H. Enomoto : The Conjugacy classes of Chevalley groups of type (G_2) over finite fields of char 2 or 3. J.F.S. Univ of Tokyo. (1970)
5. K. Shinoda : The Conjugacy classes of Chevalley groups of type (F_4) over finite fields of char 2.
(to appear)
6. T. Schoji : The Conjugacy classes of Chevalley groups of type (F_4) over finite fields of char $\neq 2$.
(to appear)