

Drinfeld 加群の tensor 積に伴う Tate 加群について

京大数理研 浜畑芳紀

(Yoshinori Hamahata)

§ 0. 序

Drinfeld module は、1974 年に Drinfeld によって導入されて以降、多くの人達 (Anderson, Gekeler, Goss, Hayes, Stuhler, Thakur, Yu, ...) によって調べられている。最近では田口雄一郎氏によって Tate 予想の analogue も研究されている (本報告集の田口氏の論説を参照)。

本稿では、Drinfeld module の tensor 積を定義し、その v -進表現を見ていきたい。

記号 $A = \mathbb{F}_q[T]$ $K = \mathbb{F}_q(T)$ $K_\infty = \mathbb{F}_q((\frac{1}{T}))$ (q は p の方)

$\overline{K}_\infty = K_\infty$ の代数的閉包

$\overline{K} = K$ の $\overline{K}_\infty$ における代数的閉包

§ 1. Drinfeld module

$\text{End}_K(\mathbb{G}_a) = \{ K \text{ 上の } \mathbb{G}_a \text{ の endomorphism } \}$ とする。各 $\phi \in \text{End}_K(\mathbb{G}_a)$

は $\phi^* \in \text{End}_K(K[X])$ と 1 対 1 に対応し、 ϕ^* は X の像 $\phi^*(X)$ によって一意に定まる。 ϕ は $\mathbb{G}_a$ の群演算を保つので、 ϕ^* は additive (i.e., $\phi^*(X+Y) = \phi^*(X) + \phi^*(Y)$) となり、

$$\phi^*(X) = \sum_{i=0}^s c_i X^{p^i} \quad (c_i \in K) \quad (\text{ch}(K) = p)$$

という形で書ける。 $\phi^*(X) = X^p$ なる ϕ を τ と書く。

$K\{\tau\} := \{K\text{-係数で}\tau\text{を変数とする多項式}\}$ は

$$(a\tau^i)(b\tau^j) = ab^{p^i}\tau^{i+j} \quad (a, b \in K)$$

によって積を定めて、非可換環になる。 $\phi \in \text{End}_K(\mathbb{G}_a)$ に対して、 $\phi^*(X) = \sum_{i=0}^s c_i X^{p^i}$ となるとき、 $\phi = \sum_{i=0}^s c_i \tau^i$ と書くことにより $\phi \in K\{\tau\}$ である。 $K\{\tau\} \subset \text{End}_K(\mathbb{G}_a)$ である。

定義 1.1 ϕ が K 上の rank r の Drinfeld module とは環準同型

$$\phi : A \rightarrow \text{End}_K(\mathbb{G}_a)$$

で、 T の像 $[T]_\phi$ が

$$[T]_\phi = T + a_1\tau + \cdots + a_r\tau^r \quad (a_i \in K, a_r \neq 0)$$

と書けるものをいう。

例 $[T]_C = T + \tau$ で定まる環準同型 $C : A \rightarrow \text{End}_K(\mathbb{G}_a)$

は、rank 1 の Drinfeld module である。これを Carlitz module という。

定義 1.2 ϕ, ψ を K 上の Drinfeld module とする。 u が ϕ から ψ への morphism とは $\bar{K}$ 上の morphism $\mathbb{G}_a \rightarrow \mathbb{G}_a$ で、

$$u \circ [a]_\phi = [a]_\psi \circ u \quad (\forall a \in A)$$

なるもののことであり、特に 0 でないとき isogeny という。

u に対応する環準同型 $u^*: \bar{K}[X] \rightarrow \bar{K}[X]$ による X の像が $u^*(X) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i X^{q^i}$ ($c_i \in \bar{K}$) という形のとき $u = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \tau^i$ と表すことにする.

定義 1.3 $0 \neq a \in A$ に対して、 ${}_a\phi := \text{Ker}([a]_\phi)(\bar{K})$ とおく.
 $\text{rank}(\phi) = r$ のとき、 ${}_a\phi \cong (A/a)^{\oplus r}$ であることが知られている.

$$[a]_\phi : {}_a\phi \rightarrow {}_a\phi \quad (x \mapsto [a]_\phi(x))$$

によって $\{{}_a\phi \mid i \geq 1\}$ は射影系をなす. $T_a(\phi) := \varprojlim_i {}_a\phi$ とおく.

次に Drinfeld module を analytic な点から見る.

K 上の Drinfeld module ϕ に対して、

$$[a]_\phi(e_\phi(x)) = e_\phi(ax) \quad (\forall a \in A)$$

なる巾級数 $e_\phi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i x^{q^i}$ ($e_i \in \bar{K}$, $e_0 = 1$) が一意的存在する. この $e_\phi(x)$ を ϕ の exponential function といい、

$$L(\phi) := \text{Ker}(e_\phi : \bar{K}_\infty \rightarrow \bar{K}_\infty)$$

を ϕ の lattice といい. $L(\phi)$ は $\bar{K}_\infty$ の中で discrete で $\text{rank} = \text{rank}(\phi)$ の自由 A -加群になる.

§ 2. abelian t -module

Anderson は、高次元の Drinfeld module として abelian t -module を導入した. この節では abelian t -module を定義する.

$\text{End}_K(G_a^m)$ の各元 E は、 $E^* \in \text{End}_K(K[X_1, \dots, X_n])$ と 1 対 1 に対応し、 $E^*(X_i)$ ($i = 1, \dots, n$) を縦に並べると、

$$E^* \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} M_i \begin{bmatrix} x_1^{p^i} \\ \vdots \\ x_n^{p^i} \end{bmatrix} \quad (M_i \in M(n, K))$$

と書ける. $\text{End}_K(\mathbb{G}_a^n) = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} M_i \begin{bmatrix} x_1^{p^i} \\ \vdots \\ x_n^{p^i} \end{bmatrix} \mid M_i \in M(n, K) \right\}$ と同一視する. 特に,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^{(i)} = \begin{bmatrix} x_1^{p^i} \\ \vdots \\ x_n^{p^i} \end{bmatrix}$$

とおく.

定義 2.1 E が K 上の abelian t -module とは、環準同型

$E: A \rightarrow \text{End}_K(\mathbb{G}_a^n)$ のこと、次の (1), (2) をみたすもの.

$$(1) \quad [T]_E \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} M_i \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^{(i)} \quad \text{と書けたとき、} (M_0 - 1_n)^N = 0 \quad (\exists N > 0).$$

(2) T と $[T]_E$ との作用を区別するため $[T]_E = t$ と書く.

$M(E) := \text{Hom}(\mathbb{G}_a^n, \mathbb{G}_a)$ に、

$$xm := x \cdot m \quad \tau m := \tau \cdot m \quad tm := m \cdot t \quad (m \in M(E), x \in K)$$

によって、 $K[t, \tau]$ -module の構造を定める. そのとき $M(E)$ は $K[t]$ -加群として有限生成.

上の E に対して、 n を $\rho(E)$ と書き、 $r(E) := \text{rank}_{K[t]} M(E)$ と書く. $w(E) := \frac{\rho(E)}{r(E)}$ を E の weight といい.

例 K 上の rank r の Drinfeld module ϕ は K 上の abelian t -module で

ある. $\rho(\phi) = 1$, $r(\phi) = r$, $w(\phi) = \frac{1}{r}$.

$$\text{例} \quad [T]_E \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 1 & & 0 \\ & T & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{bmatrix}$$

によって定義される abelian t -module E . $p(E)=n$, $r(E)=1$, $w(E)=n$. この E を higher Carlitz module という.

定義 2.2 $E_i = (\mathbb{G}_a^{n_i}, [\]_{E_i})$ ($i=1, 2$) を abelian t -module とする.

f が E_1 から E_2 への morphism とは、 $\bar{K}$ 上の $\mathbb{F}_q$ -linear morphism $\mathbb{G}_a^{n_1} \rightarrow \mathbb{G}_a^{n_2}$ で、
 $f \circ [a]_{E_1} = [a]_{E_2} \circ f$ ($\forall a \in A$) なるもののことである.

定義 2.3 abelian t -module E と $0 \neq a \in A$ に対して

$aE := \text{Ker}([a]_E)(\bar{K})$ とおく. $[a]_E: a^{i+1}E \rightarrow a^iE$ ($z \mapsto [a]_E(z)$)

によって $\{a^iE \mid i \geq 1\}$ は射影系をなし、 $T_a(E) := \varprojlim_i a^iE$ とおく.

abelian t -module E が

$$[T]_E \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^s M_i \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^{(i)} \quad (M_i \in M(n, K))$$

によって与えられているとする. E に対して

$$[T]_E(e_E(z)) = e_E(M_0 z)$$

なる巾級数 $e_E(z) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i z^{(i)}$ ($e_i \in M(n, \bar{K})$, $e_0 = 1_n$) が一意的に存在する. この $e_E(z)$ を E の exponential function といい、

$$L(E) := \text{Ker}(e_E: \bar{K}_\infty^n \rightarrow \bar{K}_\infty^n)$$

を E の lattice という. $L(E)$ は $\bar{K}_\infty^n$ において discrete であり、自由 A -加群であって $\text{rank}_A L(E) \leq r(E)$ である.

§ 3. Drinfeld module の tensor 積

ϕ, ψ は K 上の Drinfeld module で、

$$[T]_{\phi} = T + a_1\tau + \cdots + a_r\tau^r, \quad [T]_{\psi} = T + b_1\tau + \cdots + b_s\tau^s$$

によって定義されているとする。

定義 3.1 ϕ と ψ との tensor 積 $\phi \otimes \psi$ は、abelian t -module

$(\mathbb{G}_a^{r+s}, [\]_{\phi \otimes \psi})$ で、 $[T]_{\phi \otimes \psi}$ は次のように定義する：

$$[T]_{\phi \otimes \psi} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_r \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Tx_1 + b_1y_1 + \cdots + b_sy_s \\ Tx_2 + b_1x_1^q + b_2y_1^q + \cdots + b_sy_{s-1}^q \\ Tx_3 + b_1x_2^q + b_2x_1^{q^2} + b_3y_1^{q^2} + \cdots + b_sy_{s-2}^{q^2} \\ \vdots \\ (*) \\ Ty_1 + a_1x_1^q + \cdots + a_rx_r^q \\ Ty_2 + a_1y_1^q + a_2x_1^{q^2} + \cdots + a_rx_{r-1}^{q^2} \\ Ty_3 + a_1y_2^q + a_2y_1^{q^2} + a_3x_1^{q^3} + \cdots + a_rx_{r-2}^{q^3} \\ \vdots \\ (**) \end{bmatrix},$$

ただし

$$(*) = \begin{cases} Tx_r + b_1x_{r-1}^q + \cdots + b_sx_{r-s}^{q^s} & (r > s) \\ Tx_r + b_1x_{r-1}^q + \cdots + b_{r-1}x_1^{q^{r-1}} + b_ry_1^{q^{r-1}} & (r = s) \\ Tx_r + b_1x_{r-1}^q + \cdots + b_{r-1}x_1^{q^{r-1}} + b_ry_1^{q^{r-1}} + \cdots + b_sy_{s-r+1}^{q^{r-1}} & (r < s) \end{cases}$$

$$(**) = \begin{cases} Ty_s + a_1y_{s-1}^q + \cdots + a_{s-1}y_1^{q^{s-1}} + a_sx_1^{q^s} + \cdots + a_rx_{r-s+1}^{q^s} & (r > s) \\ Ty_r + a_1y_{r-1}^q + \cdots + a_{r-1}y_1^{q^{r-1}} + a_rx_1^{q^r} & (r = s) \\ Ty_s + a_1y_{s-1}^q + \cdots + a_ry_{s-r}^{q^r} & (r < s). \end{cases}$$

注意 3.2 上の定義を見ると、 $\phi \otimes \psi$ と $\psi \otimes \phi$ との定義がちが

っている。しかし、isomorphism $M: \phi \otimes \psi \xrightarrow{\sim} \psi \otimes \phi$ が存在する。

定理 3.3 ϕ, ψ を K 上の Drinfeld module、 f を A の 0 でない

non-constant monic element、 $\hat{A}_f$ を A の f -進完備化とする。その

と *

(1) $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ の作用と両立する $\hat{A}_f$ -加群の同型

$$T_f(\phi) \otimes_{\hat{A}_f} T_f(\psi) \xrightarrow{\sim} T_f(\phi \otimes \psi)$$

がある。

(2) ϕ' も K 上の Drinfeld module とし、 $u: \phi \rightarrow \phi'$ を morphism とする

と、準同型 $T_f(\phi) \rightarrow T_f(\phi')$, $T_f(\phi \otimes \psi) \rightarrow T_f(\phi' \otimes \psi)$ がひきおこ

され、次の図式は可換:

$$\begin{array}{ccc} T_f(\phi) \otimes_{\hat{A}_f} T_f(\psi) & \longrightarrow & T_f(\phi') \otimes_{\hat{A}_f} T_f(\psi) & T_f(\cdot) \text{ は } \cdot \text{ の } f\text{-道} \\ \downarrow \wr & \hookrightarrow & \downarrow \wr & \text{Tate 加群} \\ T_f(\phi \otimes \psi) & \longrightarrow & T_f(\phi' \otimes \psi) & \end{array}$$

§ 4. Drinfeld module の tensor 積の分解

この節では、Drinfeld module ϕ に対して $\phi \otimes \phi$ を考える。この $\phi \otimes \phi$ が 2 つの abelian t -module の直積で書けることを見る。ただし、この節に限り $\text{ch}(K) \neq 2$ とする。

ϕ は K 上の $\text{rank} \geq 2$ の Drinfeld module と

$$[T]_{\phi} = T + a_1 \tau + \cdots + a_r \tau^r$$

によって与えられているとする。

定義 4.1 (1) $\wedge^2(\phi)$ は abelian t -module $(\mathbb{G}_a^{r-1}, [\]_{\wedge^2(\phi)})$ で、 $[T]_{\wedge^2(\phi)}$ は

$$[T]_{\wedge^2(\phi)} = T \cdot 1_{r-1} + \begin{bmatrix} -a_2 \tau & \cdots & -a_{r-1} \tau - a_1 \tau^2 \\ -a_3 \tau^2 & \cdots & -a_r \tau^2 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ -a_r \tau^{r-1} & & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ a_1 \tau & 0 & & \\ a_2 \tau^2 & a_1 \tau & 0 & \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{r-2} \tau^{r-2} & \cdots & a_1 \tau & 0 \end{bmatrix}$$

によって定める.

(2) $\text{Sym}^2(\phi)$ は abelian t -module $(\mathbb{G}_a^{r+1}, [\]_{\text{Sym}^2(\phi)})$ で、 $[T]_{\text{Sym}^2(\phi)}$ は

$$[T]_{\text{Sym}^2(\phi)} = T \cdot 1_{r+1} + \begin{bmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_{r-1} & a_r \\ a_1\tau & a_2\tau & \cdots & a_r\tau & 0 \\ a_2\tau^2 & a_3\tau^2 & \cdots & a_r\tau^2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r-1}\tau^{r-1} & a_r\tau^{r-1} & & 0 & 0 \\ a_r\tau^r & & & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & a_1\tau & & & \\ 0 & a_2\tau^2 & a_1\tau & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{r-1}\tau^{r-1} & \cdots & a_2\tau^2 & a_1\tau & 0 \end{bmatrix}$$

によって定める.

定理 4.2 (1) $\phi \otimes \phi \cong \text{Sym}^2(\phi) \times \hat{\Lambda}^2(\phi)$.

(2) $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ の作用と両立する $\hat{A}_f$ -加群の同型がある:

$$\text{Sym}^2(T_f(\phi)) \cong T_f(\text{Sym}^2(\phi)), \quad \hat{\Lambda}^2(T_f(\phi)) \cong T_f(\hat{\Lambda}^2(\phi)).$$

定理 4.2 (1) によって、 $r \geq 2$ のとき $\phi \otimes \phi$ は simple でないことがわかる. 因みに、 $\forall n$ は $r=1$ のときに $\phi \otimes \phi$ が simple であることを示している.

§ 5. 証明の概略

定理 4.2 (1) は、 $\phi \otimes \phi$ から $\text{Sym}^2(\phi) \times \hat{\Lambda}^2(\phi)$ への isomorphism が具体的に計算できる. 残りの claim については $\Omega(E, f)$ (E : abelian t -module) を用いて示す.

定義 5.1 E を abelian t -module とする. E が

$[T]_E \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^s M_i \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^{(i)}$ によって定義されているとき、次のようにして A は $\bar{K}_a[[x]]^n$ (縦ベクトルの集合) へ次のようにして作

用する :

$$[T]_E \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^s M_i \begin{bmatrix} h_1^{(i)} \\ \vdots \\ h_m^{(i)} \end{bmatrix} \quad \left(\begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} \in \overline{K_\infty}[[x]]^m \right).$$

ただし、 $h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ に対し $h(x)^{(i)} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(i)} x^j$ とする。このと

$$\Omega(E, f) := \left\{ \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} \in \overline{K_\infty}[[x]]^m \left| \begin{array}{l} (1) \text{ 各 } h_i \text{ は } |x| \leq 1 \text{ で収束 (ただし } |T|=q) \\ (2) \begin{bmatrix} x h_1 \\ \vdots \\ x h_m \end{bmatrix} = [f]_E \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} \end{array} \right. \right\}$$

とおく。

$\text{rank}(\phi) = r$, $\text{rank}(\psi) = s$ のとき、 $\Omega(\phi, f)$, $\Omega(\psi, f)$,

$\Omega(\phi \otimes \psi, f)$ はそれぞれ rank が r , s , rs の自由 A -加群とな

る。一般に $\forall \tilde{h}(x) \in \Omega(E, f)$ は

$$\tilde{h}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} e_E([f]_E^{-j}(\omega)) x^{j-1} \quad (\text{Res}_{x=f}(\tilde{h}(x)) = -\omega \text{ のとき})$$

となるから、 $\tilde{h}_i = \sum_{j=1}^{\infty} h_{ij} x^{j-1}$ ($1 \leq i \leq \text{rank}_A \Omega(E, f)$) が $\Omega(E, f)$

の基底なら、 $(h_{ij})_{i,j \geq 1}$ 全体は $T_f(E)$ の基底になる。そこで

$\Omega(\phi, f)$ と $\Omega(\psi, f)$ の基底から $\Omega(\phi \otimes \psi, f)$ の元をつくり、

その係数が $T_f(\phi \otimes \psi, f)$ の基底になることを示すことによ

り定理 3.3 (1) を証明できる。

定義 5.2 $\overline{K}\{\tau\}$ は $\overline{K_\infty}[[x]]$ へ次のようにして作用する :

$$u(\tau) = \sum_{i=0}^s u_i \tau^i \quad \text{と} \quad h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j \text{ に対して、}$$

$$u(h(x)) = \sum_{i=0}^s u_i h(x)^{(i)}$$

と定める。

$h \in \Omega(\phi, f)$ と $u: \phi \rightarrow \phi'$ に対して、 $u(h) \in \Omega(\phi', f)$ であることがわかり、下の図式が可換になる。これより定理 3.3 (2) がわかる。

$$\begin{array}{ccc} \Omega(\phi, f) \times \Omega(\psi, f) & \longrightarrow & \Omega(\phi', f) \times \Omega(\psi, f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega(\phi \otimes \psi, f) & \longrightarrow & \Omega(\phi' \otimes \psi, f) \end{array}$$

最後に定理 4.2 (2) を示す。注意 3.2 の同型 $M: \phi \otimes \phi \xrightarrow{\sim} \phi \otimes \phi$ によって $T_f(\phi) \otimes_{A_f} T_f(\phi)$ の自己同型 $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ がひきおこされる。 $P_1: \phi \otimes \phi \rightarrow \text{Sym}^2(\phi)$, $P_2: \phi \otimes \phi \rightarrow \wedge^2(\phi)$ を projection とする。また、 $P_1 = \frac{1+M}{2}$, $P_2 = \frac{1-M}{2}$ となり、 $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$, $P_1 + P_2 = 1$, $P_2 \circ P_1 = P_1 \circ P_2 = 0$ をみたす。よって定理 4.2 (2) もいえた。

参考文献

1. G. Anderson, t -motives. Duke Math. J. 53 (1986), 457 - 502.
2. G. Anderson and D. Thakur, Tensor powers of the Carlitz module and zeta values. Ann. of Math. 132 (1990), 159 - 191.
3. P. Deligne and D. Husemöller, Survey of Drinfeld modules. Contemp. Math. 67 (1987), 25 - 91.
4. J. Yu, Transcendence and special zeta values in characteristic p . Preprint.