

$$\text{差分方程式 } y(x+1) = y(x) + 1 + \frac{\lambda}{y(x)} \quad \lambda \neq 0$$

東大理 木村俊房

1. 目的

非線型差分方程式

$$(1) \quad y(x+1) = y(x) + 1 + \frac{\lambda}{y(x)} \quad (\lambda \neq 0: \text{定数})$$

の解で, $|x| < \infty$ で有理型となるものを考察する.

$$y(x+1) = y(x) + \frac{\lambda}{y(x)}$$

の形の方程式は $z(x) = \text{const} \cdot y(x)^2$ で (1) に帰着される.

2. 写像 $w = f(z) = z + 1 + \frac{\lambda}{z}$

この写像によつて, z と w は表の様に点に対応する.

z	0	∞	$-\lambda$	-1	$\pm\sqrt{\lambda}$	$\pm i\sqrt{\lambda}$	$\frac{-\pm\sqrt{1-4\lambda}}{2}$
w	∞	∞	$-\lambda$	$-\lambda$	$1 \pm 2\sqrt{\lambda}$	1	0

円: $|z| = \sqrt{|\lambda|}$ は点 $w = 1 + 2\sqrt{\lambda}$, $1 - 2\sqrt{\lambda}$ を結ぶ線分に移り, 円の内部, 外部はともに w 平面からこの線分を除いた領域に 1:1 に写像される.

f の n 回の iteration を f_n で表わす:

$$f_n(z) = \underbrace{f(f(\dots f(z)\dots))}_n, \quad f_0(z) \equiv z, \quad f_1(z) = f(z),$$

任意の α (∞ でもよい) に対して

$$A_n(\alpha) = \{ \beta; f_n(\beta) = \alpha \},$$

$$A(\alpha) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n(\alpha)$$

とおく. 容易に

定理 「 $\lambda = 1, \alpha = -1$ のときは $A(\alpha) = \{-1\}$,
それ以外の場合には, $A(\alpha)$ は少くとも 3 点以上を
含む。」

有理型函数解が値 α を取るをければ, $A(\alpha)$ に属
する値もとらな。

α に対して,

$$\alpha^{(0)} = \alpha, \quad \alpha^{(n+1)} = f(\alpha^{(n)}) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

をみたす点列 $\{\alpha^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ を α の A -列とよぶ。とにする。

α の A -列は一般に無限個ある。 (1) の有理函数解

$y(x)$ が $x = x_0$ で値 α を取れば,

$$\{y(x_0 - n)\}_{n=0}^{\infty}$$

は α の A -列である。

3. 有理函数解の非存在.

$y(x) \equiv -\lambda$ は明らかに (1) の解であるが,

定理 「 $y(x) \equiv -\lambda$ 以外に (1) は有理函数解をもたない。」

この定理は, $x = \infty$ で

$$(2) \quad y(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad a_k \neq 0, \quad k \geq 0,$$

と展開される解は存在しないことを示すことにより証明される. たとえば, $k < 0$ の解 (2) が存在したとすると, もし $k < -1$ ならば

$$y(x+1) = a_k x^{-k} + (-k a_k + a_{k+1}) x^{-k-1} + \dots,$$

$$y(x) + 1 + \frac{\lambda}{y(x)} = a_k x^{-k} + a_{k+1} x^{-k-1} + \dots$$

であるから, $a_k \neq 0$ に反する.

$k = -1$ ならば,

$$y(x+1) = a_{-1} x + (a_{-1} + a_0) + \frac{a_1}{x} + \dots,$$

$$y(x) + 1 + \frac{\lambda}{y(x)} = a_{-1} x + (a_0 + 1) + \left(\frac{\lambda}{a_{-1}} + a_1\right) \frac{1}{x} + \dots$$

から, $a_{-1} = 1$, $a_1 = \frac{\lambda}{a_{-1}} + a_1$, $\lambda \neq 0$ に反する.

他の場合も同様である.

4. 有理型函数解の存在

前節から

$$y(x) \sim \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$$

の形の形式解は存在しないことがわかった。しかし

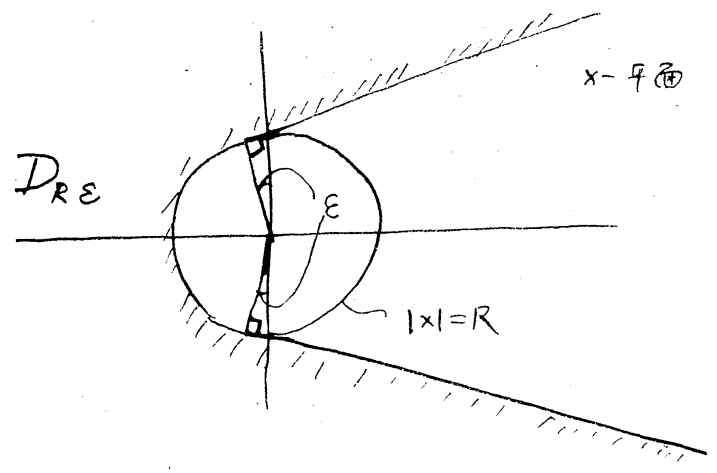
定理「 c を任意定数として、 (1) は

$$y(x) \sim x + \lambda \log x + c + x \sum_{j+k \geq 2} p_{jk} \left(\frac{1}{x}\right)^j \left(\frac{\log x}{x}\right)^k$$

の形の形式解をもつ。 p_{jk} は c をきめると一意に決まる。」

この形式解は次の様な解析的意味をもつ。

x 平面内の図のような領域を $D_{R\epsilon}$ とする



R_0 は十分大きく、 $\epsilon > 0$ は任意にとる。

定理 「任意の c に対し, (1) の解 $g_c(x)$ につき
の性質をもつものがただ 1 つ存在する.

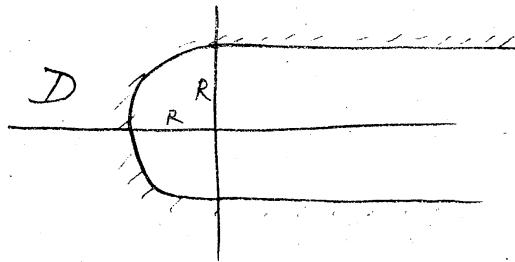
(i) $g_c(x)$ は $D_{R_0, \varepsilon}$ で正則,

(ii) $g_c(x)$ は フィルター-の基 $\{D_{R, \varepsilon}; R \geq R_0\}$ に関する
の漸近展開

$$(3) \quad g_c(x) \sim x + \lambda \log x + c + x \sum_{j+k=2}^{\infty} \beta_{jk} \left(\frac{1}{x}\right)^j \left(\frac{\log x}{x}\right)^k$$

をもつ.

解 $g_c(x)$ は 解析接続により, $|x| < \infty$ において
有理型である. さらに 図のような領域 D



で正則である.

(1) の任意の解 $y(x)$ に対して

$$y(x + \pi(x)), \quad \pi(x) \text{ は 周期 1 の 函数}$$

も解である. $\lambda < 1$, $\pi(x) \equiv \text{const.}$ とするときは
て,

$$g_c(x) = g_0(x + c)$$

である.

Picard の定理と §2 で述べたことから

定理. 「 $g_c(x)$ は, $\lambda = -1$ のときは直 -1 を除いて, すべて値をとる. λ の如きには拘らず, $g_c(x)$ は極をもつ」

5. 解 $g_c(x)$ の性質

$x = x_0$ が $g_c(x)$ の極ならば, 明らかに

$$(4) \quad x_0 + 1, x_0 + 2, \dots$$

はすべて $g_c(x)$ の極である. しかし

$$(5) \quad x_0 - 1, x_0 - 2, \dots$$

はすべて極とはなり得ない. x_0 は, (4) は極であるが (5) は極でないようにとつておこう. $x_0 - 1$ は $g_c(x)$ の変点である.

$$\{g_c(x_0 - 1 - k)\}_{k=0}^{\infty}$$

は $\alpha = 0$ の 1 つの A-列である. $g_c(x)$ の漸近展開から

$$g_c(x_0 - 1 - k) \in D_{R_0, \varepsilon}, \quad k \geq k_0$$

である.

一方, x_0 は $g_c(x)$ の極であるから, $g_c(x)$ による x_0 を中心とする適当な角領域の像は $D_{R_0, \varepsilon}$ を含むとしてよい. よして, x_0 に収束する点列 $\{x_0^{(k)}\}_{k=k_0}^{\infty}$ で

$$f_c(x_0^{(k)}) = f_c(x_0 - 1 - k) \quad k \geq k_0$$

となるものが存在する.

$$f_c(x_0^{(k)} + k + 1) = f_c(x_0) \quad k \geq k_0$$

であるから, $x_0 + k + 1$ の近傍に, $k - k_0 + 1$ 個の極が現われる.

以上から, 極の列

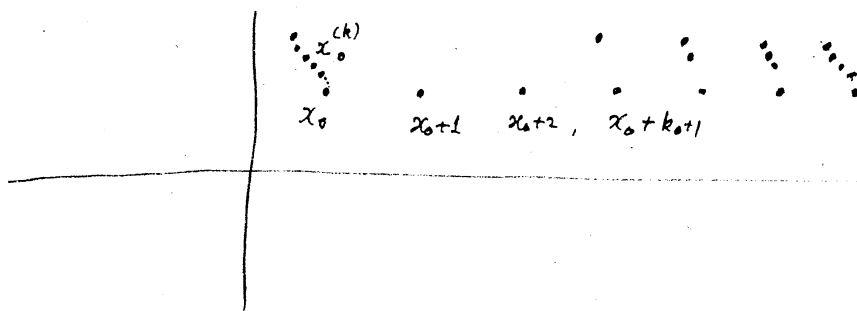
$$x_0, x_0 + 1, x_0 + 2, \dots$$

から常に無限 (個の極の列)

$$x_0^{(k_0)} + k_0 + 1, x_0^{(k_0)} + k_0 + 2, \dots$$

$$x_0^{(k_0+1)} + k_0 + 2, x_0^{(k_0+1)} + k_0 + 3, \dots$$

が出現することになる.



$f_c(x)$ の極の出現のしかたから, 有理型函数の位数として,

定理 「 $\varphi_c(x)$ の位数は ≥ 2 」

「 Γ 函数の位数は 1 と較べると興味深い」

6. 問題

つぎの問題が考えられる。

1. λ の特別な値に対して $\varphi_c(x)$ の ^{極の}位数は 1 であることはわかる。一般の λ に対して 極の位数を言明せよ。

2. $\varphi_c(x)$ の位数は $=2$ か？

3. $\varphi_c(x)$, あるいは (1) の ^{注意の}解は, $= -\lambda$ を除いて, 代数的微分方程式の解になることはあるか？

4. $\varphi_c(x + \pi(x))$ で有理型函数解は盡くされないか, この形に書けない解はどのようなものか？

5. 右半面でも, (3) に漸く近展開される解は存在するか, この解は $|x| < \infty$ で多価か？