

グラフから構成されるスピントーリック多様体*

大阪市立大学・理学研究科[†] 畑中 美帆

Miho Hatanaka

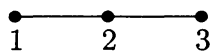
Department of Mathematics, Faculty of Sciences

Osaka City University

§1. グラフからのトーリック多様体の構成

この節では、グラフからトーリック多様体を構成する方法を紹介する。この報告書では、グラフ G を $n+1$ 頂点の有限単純グラフ、その頂点集合を $V(G) = \{1, 2, \dots, n+1\}$ とする。グラフ G に対して集合 $B(G)$ を、グラフ G を I に制限した時に連結グラフになるような $V(G)$ の部分集合 I の集合とする。ただし、空集合 $\emptyset$ は $B(G)$ に含めない。

例 1 以下のパスグラフ P_3 を考える。



この P_3 に対し、 $B(G)$ は以下ようになる。

$$B(G) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

$B(G)$ の各元の中括弧を省略して、以下のように簡略化して表す。

$$B(G) = \{1, 2, 3, 12, 23, 123\}.$$

次に、 $B(G)$ から graph associahedron $P_{B(G)}$ を以下のように定義する。

$$P_{B(G)} = \sum_{I \in B(G)} \Delta_I \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

出典：「変換群の位相幾何と代数構造」数理解析研究所講究録。

〒558-8585 大阪府大阪市住吉区杉本 3-3-138

ここで、和の記号はミンコフスキー和を意味し、 Δ_I は $\{e_i \mid i \in I\}$ の convex hull, $e_1, \dots, e_{n+1}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準基底である. $P_{B(G)}$ は Delzant polytope になり, グラフ G が連結の時 $\mathbb{R}^{n+1}$ のある超平面上にある n 次元の多面体になる ([3]).

グラフ G が k 個の連結成分を持つとすると, グラフ G は k 個の連結グラフ $G_1, \dots, G_k$ の非交和である. 各連結グラフ G_i の頂点の数を $v_i + 1$ とする. この時 graphical building set $B(G)$ は各連結グラフの graphical building set $B(G_i)$ の非交和になり, graph associahedron $P_{B(G)}$ は各連結グラフの graph associahedron $P_{B(G_i)}$ の直積になっている. ここで, $P_{B(G)}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ に埋め込まれており, 各 i に対して $P_{B(G_i)}$ は $\mathbb{R}^{v_i+1}$ に埋め込まれている. さらに $v_1 + \dots + v_k + k = n + 1$ が成り立つ. 各 i に対して, 射影 $\pi_{G_i} : \mathbb{R}^{v_i+1} \rightarrow \mathbb{R}^{v_i}$ を $(\mathbf{x}, x) \mapsto \mathbf{x}$ で定義し, 射影 $\pi_G : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1-k} = \mathbb{R}^{v_1+\dots+v_k}$ を $(\mathbf{x}_1, x_1, \dots, \mathbf{x}_k, x_k) \mapsto (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ で定義する. この時,

$$\pi_G(P_{B(G)}) = \pi_{G_1}(P_{B(G_1)}) \times \dots \times \pi_{G_k}(P_{B(G_k)}) \subset \mathbb{R}^{v_1+\dots+v_k}. \quad (0.1)$$

$\pi_G(P_{B(G)})$ の各 facet に, facet vector を対応させる写像を $\lambda_{B(G)}$ とする.

グラフ G が連結の時, $\pi_G(P_{B(G)})$ と $\lambda_{B(G)}$ を組合せ論的に求めることができる. まず $n + 1$ 頂点の連結グラフ G に対して $B(G)$ を求める. n 次元の単体を一つとり, 各 facet にグラフの頂点 $1, \dots, n + 1$ を対応させる. 頂点 i に対応する facet を F_i で表す. $B(G)$ の $I = 1 \dots n + 1$ を除く各元 $I = i_1 \dots i_k$ に対して, face $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}$ を切り, 新しくできた facet に $I = i_1 \dots i_k$ を対応させる. 従って, graphical building set $B(G)$ の $V(G)$ を除く各元に対して facet が対応する. この方法でできた多面体は $\pi_G(P_{B(G)})$ になる. $\lambda_{B(G)}$ は以下のようにして決める.

$$\lambda_{B(G)}(F_I) = \sum_{i \in I} v_i.$$

ここで, $v_i = e_i$ ($i = 1, \dots, n$), $v_{n+1} = -e_1 - \dots - e_n$ とする.

あとは [1] の方法で (実) トーリック多様体 $M(G)$ ($M_{\mathbb{R}}(G)$) が構成できる.

グラフ G が k 個の連結グラフ $G_1, \dots, G_k$ の非交和の時, (0.1) よりトーリック多様体 $M(G)$ は直積 $M(G_1) \times \dots \times M(G_k)$ に微分同相になる. 同様に実トーリック多様体 $M_{\mathbb{R}}(G)$ は直積 $M_{\mathbb{R}}(G_1) \times \dots \times M_{\mathbb{R}}(G_k)$ に微分同相になる.

§2. グラフに対応するスピントーリック多様体

グラフ G から構成できるトーリック多様体 $M(G)$ にスピン構造が入るかどうかと, 実トーリック多様体 $M_{\mathbb{R}}(G)$ が向き付け可能かどうかを判定するために, 以下の命題を使

う. P を m 個の facets を持つ単純凸多面体, λ を P 上の characteristic function, λ' を λ と modulo 2 で合同な写像とする. (P, λ) から [1] の方法で構成される擬トーリック多様体を $M(P, \lambda)$, small cover を $M_{\mathbb{R}}(P, \lambda)$ とする.

命題 2 以下の 3 つは同値である.

- (1) $M(P, \lambda)$ がスピン構造を持つ.
- (2) $M_{\mathbb{R}}(P, \lambda')$ が向き付け可能である.
- (3) $\epsilon(\lambda'(\mathbf{F})) = \{1\}$ となる $\mathbb{Z}_2^n$ から $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ への準同型写像 ϵ が存在する. ここで, $\mathbf{F}$ は単純凸多面体 P の facets の集合とする.

(2) と (3) の同値については [2] により証明されている.

単純凸多面体の face cut は対応するトーリック多様体の blow-up に対応する. 詳しくは, F を単純凸多面体 P の k 個の facets $F_1, \dots, F_k$ の交わりである余次元 k の face とする. 各 facet F_i のラベルを $\lambda(F_i)$ とする. face F を切ると, 新しい facet ができ, その facet のラベルを $\lambda(F_1) + \dots + \lambda(F_k)$ で決める. このようなラベル付き単純凸多面体に対応する擬トーリック多様体は, 元の単純凸多面体に対応する擬トーリック多様体を face F に対応する部分多様体で blow-up したものになる.

有限単純グラフ G から構成されるトーリック多様体 $M(G)$ にスピン構造が入るかどうかと実トーリック多様体 $M_{\mathbb{R}}(G)$ の向き付け可能性について述べる. 以下しばらくグラフ G が連結であることを仮定する.

例 3

- (1) グラフ G が 1 点からなるグラフの時, 対応するトーリック多様体と実トーリック多様体はともに 1 点である. これにはスピン構造が入り, 向き付け可能と決める.
- (2) グラフ G が 2 点からなる連結グラフの時, $\pi_G(P_{B(G)})$ は 1-simplex であり, 対応するトーリック多様体は $\mathbb{C}P^1$, 実トーリック多様体は $\mathbb{R}P^1$ である. 命題 2 より, $\mathbb{C}P^1$ にはスピン構造が入り, $\mathbb{R}P^1$ は向き付け可能である.

定理 4 G を $n+1$ 個の頂点を持つ連結グラフとする ($n \geq 2$). この時, トーリック多様体 $M(G)$ にはスピン構造は入らず, 実トーリック多様体 $M_{\mathbb{R}}(G)$ は向き付け不可能である.

グラフ G が非連結の場合を考える. グラフ G が連結グラフ $G_1, \dots, G_k$ の非交和とすると, トーリック多様体 $M(G)$ は $M(G_1), \dots, M(G_k)$ の直積と微分同相になる.

補題 5 多様体 M が多様体 $M_1, \dots, M_k$ の直積に微分同相とする.

- (1) M にスピン構造が入るための必要十分条件は、各 i に対して M_i にスピン構造が入ることである。
- (2) M が向き付け可能であるための必要十分条件は、各 i に対して M_i が向き付け可能であることである。

補題 5 から以下の定理が成り立つ。

定理 6 G を有限単純グラフとする。

- (1) $M(G)$ にスピン構造が入るための必要十分条件は $M(G)$ が $(\mathbb{C}P^1)^k$ に微分同相であることである。
- (2) $M_{\mathbb{R}}(G)$ が向き付け可能であるための必要十分条件は $M_{\mathbb{R}}(G)$ が $(\mathbb{R}P^1)^k$ に微分同相であることである。
- さらにこの時のグラフは、 k 個の 2 頂点からなる連結グラフと有限個の 1 点からなるグラフの非交和である。

§3. Building set に対応するスピントーリック多様体

前節では、グラフから構成されるトーリック多様体にスピン構造が入るかどうかと実トーリック多様体の向き付け可能性について調べたが、この節では building set から構成されるトーリック多様体にスピン構造が入るかどうかと実トーリック多様体の向き付け可能性について述べる。building set から第 2 節で述べた方法で (実) トーリック多様体を構成することができる。

定義 7 S を有限集合とする。 B が S 上のある building set であるとは、 B が以下の (1),(2) を満たす、空でない S の部分集合の集合である。

- (1) 各 i に対して $\{i\}$ が B の元である。
- (2) B の元 I, J の交わりがあれば、 I と J の和集合は B の元である。

全体集合 S が B の元である時、 B を連結な building set という。

graphical building set は building set であるので、building set から構成できるトーリック多様体の方が graph から構成できるトーリック多様体よりも多い。さらに building set B からできる単純凸多面体 P_B は nestohedron という。

例 8

- (1) $S = \{1\}$ とする。 S 上の building set B は $\{1\}$ しかないので、nestohedron P_B は 1

点である。従って、(実) トーリック多様体 $M(B)$ ($M_{\mathbb{R}}(B)$) は 1 点である。

(2) $S = \{1, 2\}$ とする。 S 上の building set B は $\{1, 2\}$ か $\{1, 2, 12\}$ しかない。 B が $\{1, 2\}$ の時, nestohedron P_B は 1 点なので, (実) トーリック多様体 $M(B)$ ($M_{\mathbb{R}}(B)$) は 1 点である。 B が $\{1, 2, 12\}$ の時, nestohedron P_B は 1 単体であるので, トーリック多様体は $\mathbb{C}P^1$, 実トーリック多様体は $\mathbb{R}P^1$ である。

(3) $S = \{1, 2, 3\}$ とする。 S 上の building set B は本質的に次の 6 つある。

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 12\}, \{1, 2, 3, 12, 23, 123\}, \{1, 2, 3, 12, 23, 31, 123\}, \\ &\{1, 2, 3, 123\}, \{1, 2, 3, 12, 123\}. \end{aligned}$$

それぞれの nestohedron P_B は 1 点, 1 単体, 5 角形, 6 角形, 2 単体, 4 角形である。最後の building set からできる λ_B の像は $\{e_1, e_2, -e_1 - e_2, e_1 + e_2\}$ 。従って, それぞれの building set からできるトーリック多様体 $M(B)$ は 1 点, $\mathbb{C}P^1, \mathbb{C}P^2 \# 2\overline{\mathbb{C}P^2}, \mathbb{C}P^2 \# 3\overline{\mathbb{C}P^2}, \mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ 。実トーリック多様体 $M_{\mathbb{R}}(B)$ は 1 点, $\mathbb{R}P^1, 3\mathbb{R}P^2, 4\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^2, 2\mathbb{R}P^2$ 。最後の 2 つはグラフからは構成できない。

以下しばらく building set が連結であることを仮定する。

定理 9 S を $n + 1$ 個の元を持つ有限集合 $\{1, 2, \dots, n + 1\}$, B を S 上のある連結な building set とする。この時以下の 3 つは同値である。

- (1) $M(B)$ にスピン構造が入る。
- (2) $M_{\mathbb{R}}(B)$ が向き付け可能である。
- (3) $M(B)$ の複素次元 n が奇数で, $B \setminus \{S\}$ の任意の元 X の位数が奇数である。

以下, building set が連結であることを仮定しない。

S を $n + 1$ 個の元を持つ集合, B を S 上のある非連結な building set とする。この時 B は連結な building sets $B_1, \dots, B_k$ の非交和である。各 i に対して B_i は $v_i + 1$ 個の元を持つ有限集合 S_i 上のある連結な building set とする。さらに S は $S_1, \dots, S_k$ の非交和であり, 以下が成り立つ。

$$v_1 + \dots + v_k + k = n + 1.$$

非連結グラフから graph associahedron を構成した時と同様に, nestohedron P_B は各 nestohedrons P_{B_i} の直積になっている。ここで, P_B は $\mathbb{R}^{n+1}$ に埋め込まれており, 各 P_{B_i} は $\mathbb{R}^{v_i+1}$ に埋め込まれている。各 i に対して, 射影 $\pi_i : \mathbb{R}^{v_i+1} \rightarrow \mathbb{R}^{v_i}$ を $(\mathbf{x}, x) \mapsto \mathbf{x}$ で定義し, 射影 $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1-k} = \mathbb{R}^{v_1+\dots+v_k}$ を $(\mathbf{x}_1, x_1, \dots, \mathbf{x}_k, x_k) \mapsto (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$

で定義する. この時, 以下が成り立つ.

$$\pi(P_B) = \pi_1(P_{B_1}) \times \cdots \times \pi_k(P_{B_k}) \subset \mathbb{R}^{v_1 + \cdots + v_k}.$$

従って, トーリック多様体 $M(B)$ は直積 $M(B_1) \times \cdots \times M(B_k)$ に微分同相になる. 同様に実トーリック多様体 $M_{\mathbb{R}}(B)$ は直積 $M_{\mathbb{R}}(B_1) \times \cdots \times M_{\mathbb{R}}(B_k)$ に微分同相になる.

補題 5 から以下の定理が成り立つ.

定理 10 S を有限集合, B を S 上の building set とする. さらに, B は連結な building sets $B_1, \dots, B_k$ の非交和とし, 各 i に対して B_i は有限集合 S_i 上の building set とする. この時, 次の 3 つは同値.

- (1) $M(B)$ にスピン構造が入る.
- (2) $M_{\mathbb{R}}(B)$ は向き付け可能である.
- (3) 各 building set B_i が以下のどちらかを満たす.
 - (I) B_i の位数が 1.
 - (II) トーリック多様体 $M(B)$ の複素次元 n が奇数であり, $B_i \setminus \{S_i\}$ の任意の元 X_i の位数が奇数である.

注意 11 トーリック多様体の 1 次のコホモロジー群は自明である. 従って, トーリック多様体にもしスピン構造が入ったとすると, それは一つだけである.

参考文献

- [1] M. W. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. 62 (1991), 417-451.
- [2] H. Nakayama and Y. Nishimura, *The orientability of small covers and coloring simple polytopes*, Osaka J. Math. 42 (2005), 243-256.
- [3] A. Zelevinsky, *Nested complexes and their polyhedral realizations*, Pure and Applied Mathematics Quarterly volume 2, no. 3 (2006), 655-671.