

Johnson scheme と t -design の 基本関係式について

鹿児島大 理 厚見寅司

1. Introduction

$(\Omega, \mathcal{B})$ t -(v, k, λ) design とする $\lfloor t/2 \rfloor = 1$

$\Omega = \{\alpha_1, \dots, \alpha_v\}$ $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_{\lambda_0}\}$

Ω の h 点 subsets の全体 $\Omega^{(h)} = \{\Omega_{n_1}, \dots, \Omega_{n(\binom{v}{h})}\}$

$\binom{v}{h} \times \lambda_0$ 行列 M_h

$$M_h(i, j) = \begin{cases} 1 & \Omega_{n_i} \subseteq B_j \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

λ_0 次横ベクトル $u_i = (r_{i1}, \dots, r_{i\lambda_0})$

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \alpha_i \in B_j \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

参考文献により次の結果が示されている。(see Yoshizawa[4])

u_i, u_j ($1 \leq i, j \leq \binom{v}{h}$) で張られる空間は $M_\ell^T M_\ell$

($0 \leq \ell \leq t-1$) の固有空間である。

上のことを一般化するために " m 次" ($m \leq t$) のベクトル

空間を Cameron [1] に従って定義する。

2

次の結果はよく知られている (cf. Cameron [1],
Peterson [3]).

* の "m 次" ($m \leq t$) のベクトル空間は $M_l^T M_l$ ($0 \leq l \leq t$) の固有
空間である。

ここには実例のことでないことを示す。

定理 1 * は $M_l^T M_l$ ($0 \leq l \leq t-n$) で成り立つ。

Notations

$$C_{ij}^n \quad \binom{n}{i} \times \binom{n}{j} \text{ 行列}$$

$$C_{ij}^n(a, b) = \begin{cases} 1 & |\Omega_{ia} \cap \Omega_{jb}| = n \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$B_{ij} \quad \binom{n}{i} \times \binom{n}{j} \text{ 行列}$$

$$B_{ij}(a, b) = \begin{cases} 1 & \Omega_{ia} \subseteq \Omega_{jb} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$M_m^i \quad \binom{n}{m} \times \lambda_0 \text{ 行列}$$

$$M_m^i(a, b) = \begin{cases} 1 & |\Omega_{ma} \cap B_b| = i \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

注意 $M_i = M_i^i$

2 Association scheme

定義 Ω 上の class number s の association scheme
は $\Omega^{(2)}$ の (P) の性質をもつ s class $C_1, \dots, C_s$ の

partition である。

(P) (i) $\forall p \in \Omega$ に対して $\{p, q\} \in C_k$ となる $q \in \Omega$ の数は k にだけ従属する。

(ii) $\forall \{p, q\} \in C_k$ に対して $\{p, r\} \in C_i, \{r, q\} \in C_j$ となる $r \in \Omega$ の数は (i, j, k) にだけ従属する。

$A_i = n \times n$ 行列

$$A_i(p, q) = \begin{cases} 1 & \{p, q\} \in C_i \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

(1) $I, A_1, \dots, A_s$ で張られた実数体上のベクトル空間は algebra になる。(しかも可換である)。

(centralizer algebra of the association scheme)

$V = R\Omega$ (Ω の元でラベルされた basis をもつ実数体上のベクトル空間)。 V にはさう自然に centralizer algebra が作用して加群になる。(1)より

(2) $\dots V = V_0 \oplus \dots \oplus V_s$ と分解される。各 V_i は $\langle I, A_1, \dots, A_s \rangle_R$ のすなわち matrix の固有空間である。

Johnson scheme には、

$$\Omega^{(j)} = \{\Omega_{j_1}, \dots, \Omega_{j_{(j)}}\} \quad \text{class } C_i = \{\{\Omega_{j_1}, \Omega_{j_2}\} \mid |\Omega_{j_1} \cap \Omega_{j_2}| = i\} \\ 0 \leq i \leq j-1$$

は $\Omega^{(j)}$ 上の association scheme になる。 C_i に対応する basis matrix は C_{ij}^i とする。

上の association scheme の centralizer algebra は R_j とする。

4

R_j は $W_j = R\Omega^{(j)}$ を表現加群と見做す。

注意: 知事とていふ結果 (Cameron [1])

$$B_{ij} B_{jh} = \binom{h-i}{j-i} B_{ih} \quad B_{ij} M_j = \binom{h-i}{j-i} M_i \quad B_{ij} B_{ij}^T \in R_i$$

$$B_{ij}^T B_{ij} \in R_j \quad B_{ij} \text{ の rank} = \binom{n}{i} \quad 1 \leq i < j \leq \frac{1}{2}(n+1)$$

$$\text{よって } B_{ij} B_{ij}^T = \text{non-singular}$$

R_i に対し (2.2) にあたる分解を

$$W_i = W_{i,0} \oplus \cdots \oplus W_{i,i}$$

としよう。 W_{ij} は R_i のあたる元 (行列) の固有空間である。

また W_{i+1} は次の分解をもつ

$$W_{i+1} = W_{i+1,0} \oplus \cdots \oplus W_{i+1,i+1}$$

$$W_{i+1,j} = W_{ij} B_{i,i+1} \quad 0 \leq j \leq i \quad W_{i+1,i+1} = \{w \in W_{i+1} \mid w B_{i,i+1}^T = 0\}$$

各 $W_{i+1,j} \quad 0 \leq j \leq i+1$ は R_{i+1} のあたる元 π の固有空間である。

(2) の分解はつぎの通りである。ゆえに $W_{m,m} B_{m,h} = W_{h,m} \quad 0 \leq m < h$

3 定理の証明

(Ω, B) : $2n$ 又は $2n+1$ design 8)

$$M_\ell^T M_\ell \in R_\ell \quad 0 \leq \ell \leq n \quad (\because M_\ell^T M_\ell = \lambda_\ell I + \lambda_{\ell+1} C_{\ell\ell}^{(1)} + \cdots + \lambda_{2\ell} C_{\ell\ell}^{(0)})$$

したがって $W_{\ell h} = M_\ell M_\ell^T$ の固有空間 ところで $W_{\ell h} M_\ell = M_\ell^T M_\ell$ の

$$\text{固有空間} \quad W_{hh} M_h = W_{hh} B_{hs} M_s = W_{sh} M_s = W_{sh} M_\ell \text{ であり}$$

$$V_h = W_{hh} M_h \quad (0 \leq h \leq n) \text{ は } M_\ell^T M_\ell \quad (0 \leq \ell \leq n) \text{ の固有空間}$$

である (cf. Cameron [1]).

実はこの $V_h = W_{hh} M_h$ (我々は introduction で " $h=R$ " と呼ぶ空間

と呼ぶ。この) は $M_\ell^T M_\ell$ ($0 \leq \ell \leq t-h$) の固有空間である。

$W_h, M_h, M_\ell^T M_\ell$ の計算 ために $W_h \in W_{h,h}$

$$M_h M_\ell^T = \sum_{j=0}^h \lambda_{h+\ell-j} C_{h\ell}^j \quad h \leq \ell \leq t, \quad (\because h > \ell \text{ なら } V_h \perp M_\ell^T M_\ell \text{ は固有空間 0 である})$$

Peterman [3] より $W_h C_{h\ell}^j = (-1)^{h-j} \binom{h}{j} W_h B_{h\ell} \quad W_h \in W_{h,h}$

これを j を使用すると

$$W_h M_h (M_\ell M_\ell^T) = \sum_{j=0}^h \lambda_{h+\ell-j} (-1)^{h-j} \binom{h}{j} \binom{t-h}{\ell-h} W_h M_h$$

証明終り

以下は Peterman の結果を使用 (ただし別証明である)。

$$C_{h\ell}^j M_\ell = \sum_{p=j}^h \binom{p}{j} \binom{t-p}{\ell-j} M_h^p$$

$$W_h \in W_{h,h} \quad W_h = (d_1, \dots, d_h, \dots) \text{ とする}$$

$$W_h M_h^p = (-1)^{h-p} \binom{h}{p} W_h M_h \text{ が成り立つ。}$$

この証明には次の事を使用する

$$W_{h,h} = \{w \in W_h \mid w B_{h-1}^T h = 0\} \quad \text{i.e., } \forall \{d_1, \dots, d_{h-1}\} \in \Omega^{(h-1)}$$

$$\text{fix } t \text{ と } \sum_{d_h \in \Omega - \{d_1, \dots, d_{h-1}\}} r\{d_1, \dots, d_{h-1}, d_h\} = 0$$

$W_h M_h M_\ell^T M_\ell$ を計算すると

$$W_h M_h M_\ell^T M_\ell = \sum_{j=0}^h \lambda_{h+\ell-j} \sum_{p=j}^h \binom{p}{j} \binom{t-p}{\ell-j} (-1)^{h-p} \binom{h}{p} W_h M_h$$

2) の証明は同じである。すなわち j と p の式が成り立つ。

$$\sum_{p=j}^h \binom{p}{j} \binom{t-p}{\ell-j} (-1)^{h-p} \binom{h}{p} = (-1)^{h-j} \binom{h}{j} \binom{t-h}{\ell-h}$$

6

$$\binom{p}{j} \binom{h}{p} = \binom{h}{j} \binom{h-j}{p-j}, \quad \binom{n-p}{n-p} = \sum_{h=0}^n (-1)^h \binom{n-h}{n} \binom{p}{h}.$$

に注意する必要がある。

4 定理の Steiner systems への適用

 $(\Omega, \mathcal{B})$ t -($v, h, 1$) design とする。(i.e. Steiner system
 $S(t, h, v)$). $A_h: \lambda_0 \times \lambda_0$ 行列 $A_h(i, j) = \begin{cases} 1 & |B_i \cap B_j| = h \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$

$$\begin{cases} M_{t-1}^T M_{t-1} = A_{t-1} + \binom{h}{t-1} I \\ M_{t-2}^T M_{t-2} = (t-1) A_{t-1} + A_{t-2} + \binom{h}{t-2} I \\ \dots \dots \dots \\ M_\ell^T M_\ell = \sum_{h=0}^{t-1} \binom{h}{\ell} A_h + \binom{h}{\ell} I \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

スタイナー ユースの基本関係式

定理2 スタイナー ユース $(\Omega, \mathcal{B})$ において 2 次の仮定を満足するとする。Ass. $\forall B \in \mathcal{B} \quad \Omega - B \supset \alpha_1, \alpha_2$
 $|\{B' \in \mathcal{B} \mid B' \ni \alpha_1, \alpha_2, |B' \cap B| = t-1\}| = c \text{ (一定)}$
このとき $W_{2,2} M_2$ は $A_{t-1}, \dots, A_0, I$ の固有空間である。

証明 (2.5.1)

$$M_2 A_{t-1} = (\lambda_{t-1} - 1) \binom{h-2}{t-3} M_2^2 + \binom{h-1}{t-2} M_2^1 + c M_2^0$$

$$\omega_2 M_2^i = (-1)^{2-i} \binom{2}{i} \omega_2 M_2 \quad \omega_2 \in W_{2,2}$$

 $W_{2,2} M_2$ は A_{t-1} の固有空間である。また定理1より $W_{2,2} M_2$ は $M_\ell^T M_\ell \quad 0 \leq \ell \leq t-2$ の固有空間である。

注意1. この定理の証明は別証明の方法でなければならぬ
 と思う。

注意2. 上の定理2の Ass. を満たす Steiner system について

例1. 次の問題の Steiner system は定理2の Ass. を
 満たす. Cameron [2] の問題 Steiner system $S(t, k, n)$ が次の
 条件を満たすとき. " $\forall B \in \mathcal{B}$ を取り

$B' = \{B' \mid B' \cap B = t-1, B' \in \mathcal{B}\}$ ($\Omega - B, \mathcal{B}'$) が
 Steiner system $S(t-1, k-t+1, n-t)$ を作る" このとき $S(t, k, n)$
 はどのような Steiner system か?

例2. Steiner system $S(t, k, n)$ における Cameron [2] の
 不等式 $v \geq (t+1)(k-t+1)$ で等号を attain する Steiner system は
 定理2の Ass. を満たす。

次の結果を使用する。以下

$\forall B \in \mathcal{B}$ 取って $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_t \in B$ とすると $\Omega - B \ni \forall \alpha_{t+1}, \alpha_{t+2} = \exists \{ \}$
 $\exists B' \ni \alpha_{t+1}, \alpha_{t+2}$ かつ $|B' \cap B| = t-1$ (実は B' は $\alpha_1, \dots, \alpha_t, \alpha_{t+1}, \dots, \alpha_{t+2}$
 を含む。 $\exists \alpha_i$ が含まれる) となる。

注意3. $S(t, k, n)$ のパラメータが $n = (t+1)(k-t+1)$ を
 満たすならば上の結果を使用すると次の design を作ることが
 できる。

$$2 - (v-k, k-t+1, \frac{1}{(k-t+1)} \binom{k}{t})$$

References

1. P. J. Cameron : Near-Regularity Conditions for Designs, *Geometriae Dedicata*, 2 (1973), 213 - 223.
2. _____ : Parallelisms of Complete Designs, London Math. Soc. Lecture Notes 23. Cambridge Univ. Pr., Cambridge, 1976.
3. C. Peterson : On Tight 6-Designs, *Osaka J. Math.* 14 (1977), 417 - 435.
4. M. Yoshizawa : Block Intersection Numbers of Steiner systems 1, (in Japanese) 1980.