

Boltzmann 方程式と Gevrey Class

阪市大工 鶴飼正二 (Seiji Ukai)

1. 問題

Boltzmann 方程式の初期値問題は

$$(1.1) \quad \begin{cases} f_t = -\xi \cdot \nabla_x f + Q[f, f], \\ f|_{t=0} = f_0, \end{cases}$$

である。未知関数 $f = f(t, x, \xi)$ は $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ の scalar 関数であり、物理的には、時刻 t に於ける位置 x , 速度 ξ の気体粒子密度である。また,

$$(1.2) \quad Q[f, g](t, x, \xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n \times S^{n-1}} g(v, \theta) \{ f(\eta) g(\eta') + f(\eta') g(\eta) - f(\xi) g(\xi') - f(\xi') g(\xi) \} d\xi' d\omega,$$

は気体粒子の衝突を記述する双線型対称作用素であり、

$$v = |\xi - \xi'|, \quad \theta = \cos^{-1}\{(\xi - \xi') \cdot \omega / v\}, \quad \omega \in S^{n-1}.$$

但し、 $\cdot$ は $\mathbb{R}^n$ の内積, $f(\eta) = f(t, x, \eta)$ etc, であり、

$$(1.3) \quad \eta = \xi - (v \cos \theta) \omega, \quad \eta' = \xi' + (v \cos \theta) \omega$$

は、速度 ξ の粒子と ξ' の粒子が衝突したときの衝突後の粒子

の速度 (またはその逆) である.

$g(v, \theta)$ は衝突断面積であり, 気体粒子の種類, 即ち粒子の相互作用 potential で決まる. 粒子が剛球の場合 (hard ball gas) ならば, σ_0 は球の表面積とし,

$$(1.4)' \quad g(v, \theta) = \sigma_0 v |\cos \theta|.$$

また相互作用ポテンシャルが逆べき法則に従うとき, 即ち r^{-s} (r : 粒子間距離), $s > 1$, に比例すれば ($n=3$ のとき)

$$(1.4) \quad g(v, \theta) = v^\delta |\cos \theta|^{-\delta'} g_0(\theta),$$

$\delta = 1 - \frac{4}{s}$, $\delta' = 1 + \frac{2}{s}$; $g_0(\theta) \geq 0$, 有界, $\theta = \pi/2$ の近傍で $\neq 0$, と与えられる. この場合 $\delta' > 1$ であるので $g(v, \theta)$ は $\theta = \pi/2$ で強い (非可積分性の) singularity を持ち, 従って (1.2) で f, g が単に有界と仮定しただけでは ω に関する積分は収束しない. しかし (1.3) から $\theta = \pi/2$ ならば $\gamma = \xi$, $\gamma' = \xi'$ であるので f, g が滑らかならば (1.2) の右辺の $\{\dots\}$ は $\theta = \pi/2$ で 0 となり, $g(v, \theta)$ の singularity と相殺し, Q は well-defined となる可能性がある. 即ち Q は (非線型) singular integral operator または pseudo-differential operator と考えねばならない. 二 となる.

従って (1.1) を解くのは難しくなるので, 従来は ^{種々の} cutoff 近似が用いられていた. 即ち (1.4) で言えば $\delta' < 1$ と仮定することと相当する. (1.4)' はこの仮定を満たす. 特に Grad [2]

による angular cutoff は $q(v, \theta) \in$

$$(1.5) \quad q^\varepsilon(v, \theta) = \chi^\varepsilon(\theta) q(v, \theta), \quad \varepsilon > 0,$$

$$\chi^\varepsilon(\theta) = 1, \quad |\theta - \pi/2| > \varepsilon; \quad \chi^\varepsilon(\theta) = 0, \quad |\theta - \pi/2| < \varepsilon$$

を置き代える近似であるが、この近似の下では、(1.1) に対する初期値問題のみならず種々の初期値-境界値の時間的大域解の存在が知られている。

non-cutoff の場合、即ち $\delta \geq 1$ の場合は (1.1) について殆んど結果がない。本稿では $Q \in$ Gevrey class で定義すれば (1.1) の時間的大域解を持つことを示す。既に述べた様に Q は pseudo-differential operator なる ε derivative loss が起る。従って (1.1) を解くには Nishida-Nirenberg-Obshamirov の abstract non-linear Cauchy-Kowalewski 定理 [3] と同様の工夫を要す。即ち (1.1) を Banach scale で設定しなければならぬ。但し Q の (微分に関する) 階数は 1 より小な ε [3] より簡単に、通常の縮小写像の原理で解ける。Banach scale は Gevrey class の指標を ε に関して線型に変化させたものを用いる。類似の scale は Boltzmann 方程式では [1], [4] で、また weakly hyperbolic equation でも (Bronstein, Kajitani...) 用いられている。

本稿では更に (1.5) で $\varepsilon \rightarrow 0$ としたときの解の収束について触れる。詳しく証明は [6] を参照して頂きたい。

2. Gevrey class の Q の評価.

以下では $g(v, \theta)$ は v, θ についての可測で n 次を仮定する.

$$(2.1) \quad |g(v, \theta)| \leq C(1+v^{-\mu}+v^{\delta})|\cos \theta|^{-\delta'},$$

但し $C \geq 0$ は定数, $\mu, \delta, \delta' \geq 0$ についての

$$(2.2) \quad 0 \leq \mu < n, \quad 0 \leq \delta < 2, \quad 1 \leq \delta' < 2$$

が成り立つ.

$$(2.3) \quad \delta + 3\delta' < 5,$$

を仮定する. この仮定の下で $Q[f, g]$ を評価する. 本節では f, g は ξ のみの関数とする. 1.1.4 を

$$(2.4) \quad \|f\|_{\alpha} = \sup_{\xi} p_{\alpha}(\xi) |f(\xi)|, \\ p_{\alpha}(\xi) = e^{\alpha \langle \xi \rangle^2}, \quad \alpha > 0, \quad \langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2},$$

と定義する.

$u = p_{\alpha} f, w = p_{\alpha} g$ とおくと, (1.3) より $\langle \xi \rangle^2 + \langle \xi' \rangle^2 = \langle \eta \rangle^2 + \langle \eta' \rangle^2$ ので

$$(2.5) \quad Q[f, g] = \frac{1}{2} p_{\alpha}^{-1} \{ \Gamma_{\alpha}^{(1)}[u, w] + \Gamma_{\alpha}^{(1)}[w, u] + \Gamma_{\alpha}^{(2)}[u, w] \\ + \Gamma_{\alpha}^{(2)}[w, u] \},$$

となる. 但し

$$(2.6) \quad \Gamma_{\alpha}^{(1)}[u, w] = \int_{\mathbb{R}^n \times S^{n-1}} g(v, \theta) p_{\alpha}(\xi')^{-1} \{ u(\eta) - u(\xi) \} w(\eta') d\xi' d\omega,$$

及 $u, \Gamma_{\alpha}^{(2)}[u, w]$ は上で $\{ u(\eta) - u(\xi) \} w(\eta') \in \{ u(\eta') - u(\xi') \} w(\eta)$ の置き

代えたもののである. 仮定 (2.1) (2.2) の下で次の成り立つ.

Lemma 2.1. $\forall \alpha > 0, \forall \delta \in (\delta' - 1, 1], \exists C \geq 0, \forall \varepsilon > 0,$

$$|\Gamma_{\alpha}^{(1)}[u, w](\xi)| \leq C \langle \xi \rangle^{\delta + \delta'} \{ (\langle \xi \rangle^{\delta} + \varepsilon^{-\delta}) \|f\|_{\alpha} +$$

$$+ \varepsilon^{1-\delta} \|\nabla_{\xi} f\|_{\alpha} \{ \|g\|_{\alpha} \}. \quad j=1, 2.$$

== 2° $C = C_{\alpha}$ は $\alpha > 0$ について単調減少で, $C_{\alpha} \rightarrow \infty (\alpha \rightarrow 0)$,
 $C_{\alpha} \rightarrow 0 (\alpha \rightarrow \infty)$ である.

証明. $u = p_{\alpha} f$ の Hölder ノルム の 補間不等式 と し て

$$|u(\eta) - u(\xi)| \leq 2|\eta - \xi|^{\delta} \{ (\alpha^{\delta} (|\xi|^{\delta} + |\eta - \xi|^{\delta}) + \varepsilon^{-\delta}) \|f\|_{\alpha} \\ + \varepsilon^{1-\delta} \|\nabla_{\xi} f\|_{\alpha} \}$$

が得られる. 但し $\alpha > 0$, $\delta \in [0, 1]$, $\varepsilon > 0$. しか ε (2.6) から従う

$$|\Gamma_{\alpha}^{(1)}[u, w](\xi)| \leq \int |g(v, \theta)| p_{\alpha}(\xi')^{-1} |u(\eta) - u(\xi)| |w(\eta')| d\xi' d\omega$$

に代入する. (1.3) より $|\eta - \xi| = v|\cos \theta|$. また $|w(\eta')| \leq \|g\|_{\alpha}$. よって
 上式右辺は

$$2(1+\alpha^{\delta}) \{ (I_1 (|\xi|^{\delta} + \varepsilon^{-\delta}) + I_2) \|f\|_{\alpha} + \varepsilon^{1-\delta} I_1 \|\nabla_{\xi} f\|_{\alpha} \} \|g\|_{\alpha}$$

で評価される. 但し

$$I_k = \int |g(v, \theta)| p_{\alpha}(\xi')^{-1} |v|^k |\cos \theta|^k d\xi' d\omega, \quad k=1, 2.$$

== 2° (2.1) を満足すると

$$(2.7) \quad \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (1+v^{-n} + v^{\delta}) v^{k\delta} e^{-\alpha \langle \xi' \rangle^2} d\xi' \int_0^{\pi} |\cos \theta|^{-\delta+k\delta} d\theta.$$

$-\delta+k\delta > -1$ ならば $\int_0^{\pi} \theta$ に関する積分は収束する. また

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi - \xi'|^{\lambda} e^{-\alpha \langle \xi' \rangle^2} d\xi' \leq C \langle \xi \rangle^{\lambda}$$

が $\lambda > -n$ について成り立つ. したがって Lemma 2.1 の $j=1$ について成り立つ. $j=2$ も同様に証明できる. (証終)

Lemma 2.2. $\forall \alpha > 0$, $\forall \delta \in (0-1, 1]$, $\exists C \geq 0$, $\forall \beta \in [0, \alpha]$,

$$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0,$$

$$\|Q[f, g]\|_{\alpha-\beta} \leq C \beta^{-(\delta+\delta)/2} \{ (\beta^{-\delta/2} + \varepsilon_1^{-\delta} + \varepsilon_2^{-\delta}) \|f\|_{\alpha} \|g\|_{\alpha} \\ + \varepsilon_1^{1-\delta} \|\nabla_{\xi} f\|_{\alpha} \|g\|_{\alpha} + \varepsilon_2^{1-\delta} \|f\|_{\alpha} \|\nabla_{\xi} g\|_{\alpha} \}.$$

但し $C = C_{\alpha}$ は Lemma 2.1 と同様の α 依存性を得る.

証明. (2.5) の左辺を Lemma 2.1 を用いて評価する. 但し

$\Gamma_{\alpha}^{(j)}[u, w]$ については $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\Gamma_{\alpha}^{(j)}[w, u]$ については $\varepsilon = \varepsilon_2$ と置く.

更に $\rho_{\alpha}(\xi)^{-1} = \rho_{\alpha-\beta}(\xi)^{-1} e^{-\beta \langle \xi \rangle^2}$, 及び $\lambda \geq 0$ に対し

$$\langle \xi \rangle^{\lambda} e^{-\beta \langle \xi \rangle^2} \leq C_{\lambda} \beta^{-\lambda/2}, \quad C_{\lambda} = \sup_{s \geq 0} s^{\lambda} e^{-s^2}$$

が成り立つことに注意すればよい. (証了)

上の Lemma は Q の derivative loss 及び weight loss を

生じると示して示している. 同様の空間での Q の評価が必要である. これは次の Gevrey class で可能となる.

Definition 2.3. $f \in \mathcal{G}_{\alpha, \beta}^{(\nu)}$, $\nu \geq 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$,

$$\Leftrightarrow f \in C^{\infty}(\mathbb{R}_x^n),$$

$$\|f\|_{\alpha, \beta, \nu} \equiv \sum_{l \in \mathbb{N}^n} \frac{\rho^{|l|}}{(l!)^{\nu}} \|\partial_{\xi}^l f\|_{\alpha} < +\infty.$$

Theorem 2.4. $\forall \alpha > 0$, $\forall \delta \in (\delta-1, 1]$, $\forall \nu \geq 1$, $\exists C \geq 0$,

$\forall \beta \in (0, \alpha)$, $\forall \rho > 0$, $\forall \sigma \in (0, \rho)$, $\forall f, g \in \mathcal{G}_{\alpha, \beta}^{(\nu)}$,

$$\|Q[f, g]\|_{\alpha-\beta, \rho-\sigma, \nu} \leq C a_0(\beta, \rho, \sigma) \|f\|_{\alpha, \rho, \nu} \|g\|_{\alpha, \rho, \nu},$$

$$a_0(\beta, \rho, \sigma) = \beta^{-(\delta+\delta)/2} \{ \beta^{-\delta/2} + (1+\rho) \rho^{\nu\delta-1} \sigma^{-\nu\delta} \}.$$

証明. (1.2) で $\xi' \rightarrow \eta = \xi - \xi'$ なる変数変換を行う. 簡単のため $g = f$ の場合を記すと

$$Q[f, f] = \int g(|y|, \theta) \{f(\xi - \zeta)f(\xi - \eta - \zeta) - f(\xi)f(\xi - \eta)\} dy d\omega,$$

但し $\cos \theta = y \cdot \omega / |y|$, $\zeta = (y \cdot \omega) \omega$ は ξ に独立となる. 故に積分記号下の微分により,

$$\partial_{\xi}^l Q[f, f] = \sum_{k+m=l} \frac{l!}{k!m!} Q[\partial_{\xi}^k f, \partial_{\xi}^m f],$$

が $l \in \mathbb{N}^n$ により成り立つ. Lemma 2.2 で

$$f \rightarrow \partial_{\xi}^k f, \quad g \rightarrow \partial_{\xi}^m g, \quad \varepsilon_1 = (1 + |k|)^{-\nu}, \quad \varepsilon_2 = (1 + |m|)^{-\nu}$$

とおく. また

$$(2.8) \quad k!m! / (k+m)! \leq 1, \quad \forall k, m \in \mathbb{N}^n$$

に注意すると次を得る.

$$\begin{aligned} \|Q[f, g]\|_{\alpha-\beta, \rho-\sigma, \nu} &\leq \sum_{k, m \in \mathbb{N}^n} \frac{(\rho-\sigma)^{|k|+|m|}}{(k!m!)^{\nu}} \|Q[\partial_{\xi}^k f, \partial_{\xi}^m g]\|_{\alpha-\beta} \\ &\leq C \beta^{-(\delta+\delta)/2} (\|f\|_{\alpha, \rho, \nu} \|g\|_{\alpha, \rho, \nu} + \|f\|_{\alpha, \rho, \nu} \|g\|), \end{aligned}$$

ただし,

$$\|f\| = \beta^{-\delta/2} \|f\|_{\alpha, \rho, \nu} + \|f\|_1 + \|f\|_2,$$

$$\|f\|_1 = \sum_l \frac{(\rho-\sigma)^{|l|}}{(l!)^{\nu}} (1+|l|)^{\nu\delta} \|\partial_{\xi}^l f\|_{\alpha},$$

$$\|f\|_2 = \sum_l \frac{(\rho-\sigma)^{|l|}}{(l!)^{\nu}} (1+|l|)^{-(1-\varepsilon\delta)\nu} \|\partial_{\xi}^l \nabla_{\xi} f\|_{\alpha}.$$

$\varepsilon = \varepsilon'$, $0 < \sigma < \rho$ ならば

$$(2.9) \quad \sup_{s \geq 0} (1 - \sigma/\rho)^s (s+1)^{\nu} \leq C_{\nu} (\rho/\sigma)^{\nu}, \quad C_{\nu} = \sup_{s \geq 0} e^{-s} (s+1)^{\nu}$$

が成り立つ. $\square$

$$[f]_1 \leq C_{\nu, \delta} \rho^{\nu \delta} \sigma^{-\nu \delta} \|f\|_{\alpha, \rho, \nu},$$

$$[f]_2 \leq C_{\nu, \delta} \rho^{\nu \delta - 1} \sigma^{-\nu \delta} \|f\|_{\alpha, \rho, \nu}.$$

以上をまとめると定理を得る。(証了)

(2.9) を用いると

$$\|\nabla_{\xi} f\|_{\alpha, \rho, \sigma, \nu} \leq C_{\nu} \rho^{\nu-1} \sigma^{-\nu} \|f\|_{\alpha, \rho, \nu}$$

がわかる。これと定理 2.4 を比較すると Q は次数 $\delta \in (\delta-1, 1]$ の

pseudo-differential operator であることがわかる。尚、この定理

は (2.3) を仮定する必要はない。

3. 局所解の構成.

まず (1.1) は (形式的に)

$$(3.1) \quad f(t) = U(t)f_0 + \int_0^t U(t-s)Q[f(s), f(s)]ds,$$

と同値であるのだからこれを解くことを考える。 = = =

$$(3.2) \quad U(t)f_0 = f_0(x-t\xi, \xi)$$

は $-\xi \cdot \nabla_x$ が生成する群である。 x, ξ の関数の Gevrey class を定義しよう。

Definition 3.1. $\alpha, \mu, \rho \geq 0, \kappa, \nu \geq 1$ とする。

$$f \in \mathcal{G}_{\alpha, \mu, \rho}^{(\kappa, \nu)} \Leftrightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n),$$

$$\|f\|_{\alpha, \mu, \kappa, \rho, \nu} = \sum_{k, l \in \mathbb{N}^n} \frac{\mu^{|k|} \rho^{|l|}}{(k!)^\kappa (l!)^\nu} \|\partial_x^k \partial_\xi^l f\|_\alpha < +\infty.$$

ただしノルム $\|\cdot\|_\alpha$ は (2.4) で x について $\sup$ を取ったもの

9 とする.

まず (3.2) の作用素 $U(t)$ をこの空間で考えよう.

Lemma 3.2. $f_0 \in \mathcal{S}_{\alpha, \mu, \rho, \nu}^{(k, \nu)}$, $\nu \geq k \geq 1$ とすると $|t| \leq \mu/\rho$ ならば

$$\|U(t)f_0\|_{\alpha, \mu', k, \rho, \nu} \leq \|f_0\|_{\alpha, \mu, k, \rho, \nu}$$

が成り立つ. ただし $\mu' = \mu'(t, \mu, \rho)$ は次のとおりである.

$$\mu' = \left\{ \mu^{1/k} - (\rho|t|)^{1/k} \right\}^k.$$

証明. (3.2) を ξ_j で微分するとわかるように,

$$\begin{aligned} \partial_{\xi}^l U(t)f_0 &= U(t) \{ (-t\partial_x + \partial_{\xi})^l f_0 \} \\ &= U(t) \left\{ \sum_{m+r=l} \frac{l!}{m!r!} (-t)^{lm} \partial_x^m \partial_{\xi}^r f_0 \right\}, \end{aligned}$$

かつ任意の $l \in \mathbb{N}^n$ について成り立つ. また $\partial_x^k U(t)f_0 = U(t) \partial_x^k f_0$

は明らか. 故に $\|U(t)f_0\|_{\alpha} = \|f_0\|_{\alpha}$ に注意すると

$$\|U(t)f_0\|_{\alpha, \mu', k, \rho, \nu} \leq \sum_{k, l} \sum_{m+r=l} \frac{(\mu')^{lk} \rho^{l\nu}}{(k!)^k (l!)^{\nu}} \frac{l!}{m!r!} |t|^{lm} \|\partial_x^m \partial_{\xi}^r f_0\|_{\alpha}$$

(2.8) を用いると

$$\leq \sum_{k, m, r \in \mathbb{N}^n} \frac{(\mu')^{lk} \rho^{l\nu} |t|^{lm}}{(k!)^k (m!r!)^{\nu}} \|\partial_x^{m+k} \partial_{\xi}^r f_0\|_{\alpha},$$

$m+k=s$ とおくと

$$= \sum_{s, r \in \mathbb{N}^n} \frac{(\mu')^{ls} \rho^{l\nu}}{(s!)^k (r!)^{\nu}} K_s \|\partial_x^s \partial_{\xi}^r f_0\|_{\alpha},$$

ただし,

$$K_s = \sum_{m \leq s} \frac{(s!)^k}{(m!)^{\nu} (s-m!)^k} \left(\frac{\rho|t|}{\mu'} \right)^{lm}.$$

$\nu \geq k \geq 1$ を仮定したので, 2項展開の公式を用いると

$$K_s \leq \left(\sum_{m \leq s} \frac{s!}{m!(s-m)!} \left(\frac{\rho|t|}{\mu'} \right)^{|m|/\kappa} \right)^\kappa = \left(1 + \left(\frac{\rho|t|}{\mu'} \right)^{1/\kappa} \right)^{\kappa|s|} \\ = \left(\frac{\mu}{\mu'} \right)^{|s|}$$

がわかる。これを上式に代入すればよい。(証了)

$U(t)$ は簡単な作用素であるが空間 $\mathcal{Y}_{\alpha, \mu, \rho}^{(\kappa, \nu)}$ ではあまり良い性質を持つていない。さて $N_0, N \in$

$$N_0[f, g](t) = \int_0^t U(t-s) Q[f(s), g(s)] ds,$$

(3.3)

$$N[f](t) = U(t)f_0 + N_0[f, f](t),$$

と定義すると (3.1) は $f = N[f]$, 即ち N の不動点問題と見做される。まず N_0 を評価するために次のノルムを導入する。

$$(3.4) \quad \|f\| = \sup_{|t| \leq T} \|f(t)\|_{\alpha - \beta|t|, \mu - \lambda|t|, \kappa, \rho - \sigma|t|, \nu}$$

但し T は

$$(3.5) \quad T = \min \left(\frac{\alpha}{2\beta}, \frac{\mu}{2\lambda}, \frac{\rho}{2\sigma} \right),$$

もちろん $\alpha, \beta, \mu, \lambda, \rho, \sigma > 0, \kappa, \nu \geq 1$ である。さらに以下では

$$(3.6) \quad \kappa = 1, \quad 1 \leq \nu < (3 - \delta - \delta') / 2(\delta' - 1),$$

を仮定する。(2.3) (及び (2.2)) より $(3 - \delta - \delta') / 2(\delta' - 1) > 1$ だから上の不等式は意味をもつ。このとき $\delta' - 1 < (2 - \delta) / (1 + 2\nu) < 1$ が成り立つので

$$(3.7) \quad \delta' - 1 < \delta < (2 - \delta) / (1 + 2\nu)$$

なる δ が選べる。

ノルム (3.4) では t に応じて変化する空間 $\mathcal{Y}_{\alpha - \beta|t|, \mu - \lambda|t|, \rho - \sigma|t|}^{(\kappa, \nu)}$

を考えておくとになる。こうすると (3.3) の N_0 が同一ノルム III. III で同じ評価が可能になるのである。即ち

Lemma 3.3. (2.1)(2.2)(2.3) を仮定する。 $\alpha, \beta, \mu, \lambda, \rho, \sigma > 0$, $\lambda \geq \rho$ とし $T, \kappa, \nu, \delta \in (3.4) \sim (3.7)$ を満たすものとする

$$\|N_0[f, g]\| \leq C_0 a_1(\beta, \sigma) \|f\| \|g\|,$$

$$(3.8) \quad a_1(\beta, \sigma) = \beta^{-(\delta+\delta)/2} (\beta^{-\delta/2} + \sigma^{-\nu\delta}),$$

が成り立つ。但し C_0 は α, ρ へのみ依存する定数である。

証明。明らかに

$$\partial_x^k Q[f, g] = \sum_{m \leq k} \frac{k!}{m!(k-m)!} Q[\partial_x^m f, \partial_x^{k-m} g]$$

がすべての $k \in \mathbb{N}^n$ について成り立つ。よって (2.8) より

$$\|Q[f, g]\|_{\alpha, \mu, \kappa, \rho, \nu} \leq \sum_{k, m} \frac{\mu^{|k|+|m|}}{(k! m!)^\kappa} \|Q[\partial_x^k f, \partial_x^m g]\|_{\alpha, \rho, \nu}.$$

この右辺を定理 2.4 を用いて評価すると

$$(3.9) \quad \|Q[f, g]\|_{\alpha-\beta, \mu, \kappa, \rho-\sigma, \nu}$$

$$\leq C a_0(\beta, \rho, \sigma) \|f\|_{\alpha, \mu, \kappa, \rho, \nu} \|g\|_{\alpha, \mu, \kappa, \rho, \nu}$$

を得る。さして (3.3) の N_0 について Lemma 3.2 より

$$(3.10) \quad \|N_0[f, g](t)\|_{\alpha-\beta|t|, \mu-\lambda|t|, \kappa, \rho-\sigma|t|, \nu}$$

$$\leq \left| \int_0^t \|w(s)\|_{\alpha-\beta|t|, \mu''(t), \kappa, \rho-\sigma|t|, \nu} ds \right|,$$

を得る。但し $w(s) = Q[f(s), g(s)]$ とおいた。また

$$\mu''(t) = \{(\mu - \lambda|t|)^{1/\kappa} + (\rho - \sigma|t|)^{1/\kappa} |t-s|^{1/\kappa}\}^\kappa.$$

仮定により $\kappa=1$, $\lambda \geq \rho$, 故に $0 \leq s \leq t$ または $0 \geq s \geq t$ であるから

$$\mu''(t) \leq \mu - \lambda|t| + \lambda|t-s| = \mu - \lambda|s|$$

である。他方 (3.9) で

$$\alpha \rightarrow \alpha - \beta|s|, \quad \beta \rightarrow \beta|t-s|,$$

$$\vartheta \rightarrow \vartheta - \sigma|s|, \quad \sigma \rightarrow \sigma|t-s|$$

なる置き換えを行ひ、 $\alpha - \beta|s| - \beta|t-s| = \alpha - \beta|t|$ 等に注意すれば、

$$\|w(s)\|_{\alpha - \beta|t|, \mu|t|, \kappa, \vartheta - \sigma|t|, \nu}$$

$$\leq C_{\alpha - \beta|s|} a_0(\beta|t-s|, \vartheta - \sigma|s|, \sigma|t-s|) \|f\| \|g\|.$$

但し $C = C_\alpha$ は補題 2.1 のもの。故に $C_{\alpha - \beta|s|} \leq C_{\alpha/2}$ (3.5)

により $\alpha - \beta|s| \geq \alpha/2$ かつ $|s| \leq T$ で成立。) 又

$$a_0(\beta|t-s|, \vartheta - \sigma|s|, \sigma|t-s|)$$

$$\leq (1 + 2(1 + \vartheta)\varrho^{\nu\delta-1}) a_1(\beta, \sigma) a_2(|t-s|),$$

a_1 は (3.8) で定義した。また

$$a_2(\tau) = \tau^{-(\gamma+2\delta)/2} + \tau^{-(\gamma+\delta+2\nu\delta)/2}.$$

(3.7) で δ を定めたので $(\gamma+2\delta)/2 \leq (\gamma+\delta+2\nu\delta)/2 < 1$. よって

$$\sup_{|t| \leq T} \left| \int_0^t a_2(|t-s|) ds \right| < +\infty.$$

これらを (3.10) に代入すれば補題を得る。(証了)

さて $X_a, a > 0$ を

$$X_a = \{ f = f(t, x, z) \mid \|f\| \leq a \}$$

と定めると距離 $\|f-g\|$ で完備である。(3.3) の N について:

Lemma 3.4. $\alpha, \mu, \vartheta > 0$ かつ κ, ν は (3.6) のもの、また f_0

$\in \mathcal{Y}_{\alpha, \mu, \vartheta}^{(1, \nu)}$ とする。このとき N が X_a で縮小写像となるように

β, λ, σ 及び a を定めることが出来る。 T は (3.5) で定める。

証明. (3.8) で $\beta, \sigma \rightarrow \infty$ ならば $a_1(\beta, \sigma) \rightarrow 0$ となるから

$$d \equiv 1 - 4C_0 a_1(\beta, \sigma) \|f_0\|_{\alpha, \mu, 1, \beta, \nu} > 0$$

となる β, σ が選べる. $\lambda = 2$ で $a \in$

$$(3.11) \quad a = (1 - \sqrt{d}) / (2C_0 a_1(\beta, \sigma))$$

と定める. 最後に $\sigma \gg \rho$ と $\sigma \in$ を選ぶ. Lemma 3.2, 3.3 より

$$\|N[f]\| \leq \|f_0\|_{\alpha, \mu, 1, \rho, \nu} + C_0 a_1(\beta, \sigma) \|f\|^2$$

であるから $f \in X_a$ ならば, a の選ぶ方より $\|N[f]\| \leq a$, 即ち $N[f] \in X_a$ に従う. 即ち N は $X_a \subset X_a$ に写す. 同様に $f, g \in X_a$ ならば

$$(3.12) \quad \|N[f] - N[g]\| = \|N[f - g, f + g]\| \leq 2a C_0 a_1(\beta, \sigma) \|f - g\|$$

であるが, $2a C_0 a_1(\beta, \sigma) = 1 - \sqrt{d} < 1$. (証了).

以上から N は X_a で唯一つの不動点 $f = N[f]$ を持つ. これは (3.1) の解である. この f は x, ξ についてもちろぬ C^∞ であるが, 更に

$$(3.13) \quad f, f_t \text{ は } t \text{ について連続, } x, \xi \text{ について } C^\infty$$

であることが容易にわかるので (1.1) の古典解である. また

$$(3.14) \quad f \in C^0([-T, T]; \gamma_{\alpha/2, \mu/2, \rho/2}^{(1, \nu)}) \cap C^1([-T, T]; \gamma_{\alpha/2-\varepsilon, \mu/2-\varepsilon, \rho/2-\varepsilon}^{(1, \nu)})$$

が任意の $\varepsilon > 0$ について成り立つこともわかる.

更に N はこれ以外の不動点を持たない. 実際 $g \in X_{a'}, a' \neq a$ と N の f と異なる不動点とすると (3.12) と同様にして

$$\|f - g\| = \|N[f - g, f + g]\| \leq (a + a') C_0 a_1(\beta, \sigma) \|f - g\|$$

を得るが, β, σ を十分大きく取りなおすと $\|f - g\| = 0$ を得る.

最後に (3.6) で $\kappa = 1$ を仮定したのは, $\kappa > 1$ では Lemma 3.3が,

従って Lemma 3.4 が成り立たないからである。実際, (3.10) では $\mu - \lambda|t|$ の代りに,

$$\{\mu(t)^{1/\kappa} + (\rho - \sigma|t|)^{1/\kappa} |t-s|^{1/\kappa}\}^\kappa \leq \mu(s)$$

を満たす $\mu(t)$ ならばどんなものでもよいのであるが, これを

$$\mu(s)^{1/\kappa} - \mu(t)^{1/\kappa} \geq (\rho - \sigma|t|)^{1/\kappa} |t-s|^{1/\kappa}$$

と書くとみればわかるように, $\mu(t)^{1/\kappa}$ は $t > 0$ ($t < 0$) で単調減少 (増加) でなければならぬ。しかしもし $\kappa > 1$ ならばこの式は $\mu(t)^{1/\kappa}$ が至る所微分不可能であることを示し矛盾となる。

$\kappa = 1$ は x に関し2解析的であることを意味する。より正確に

は $f \in X_\alpha$ は $f(t) \in \mathcal{Y}_{\alpha-\rho|t|, \mu-\lambda|t|, \rho-\sigma|t|}^{(1, \nu)}$ を意味するから,

(3.15) $f(t, x, z)$ は x に関し $\mathbb{R}^n + i\{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| < \mu - \lambda|t|\}$ で解析的。

以上をまとめおく。

定理 3.5. (2.1) ~ (2.3) を仮定する。 $\alpha, \mu, \rho > 0$, ν は (3.6) を満たすとする。 $f_0 \in \mathcal{Y}_{\alpha, \mu, \rho}^{(1, \nu)}$ ならば $\beta, \delta, \lambda, T > 0$ が定まり,

(i) (1.1) は $[-T, T] \times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_z^n$ で古典解 f を持つ。

(ii) f は (3.13), (3.14), (3.15) の性質の他に, $|t| \leq T$ で

(iii) $f(t) \in \mathcal{Y}_{\alpha-\rho|t|, \mu-\lambda|t|, \rho-\sigma|t|}^{(1, \nu)}$

$$\|f(t)\|_{\alpha-\rho|t|, \mu-\lambda|t|, 1, \rho-\sigma|t|, \nu} \leq 2 \|f_0\|_{\alpha, \mu, 1, \rho, \nu}$$

を満たす。

この最後の不等式は (3.11) から $\alpha \leq 2 \|f_0\|$ が従うことによる。

より一般の f_0 に対する (局所) 解の存在については現在のところ

何もわかっていない。

4. Angular cutoff 近似の収束

(1.2) で $q(v, \theta)$ を (1.5) の $q^\varepsilon(v, \theta)$ で置き代えて得られる Q を Q^ε と記す。 $q^\varepsilon(v, \theta)$ は最早 $\theta = \pi/2$ での singularity を持たないので Q^ε は通常の積分作用素として扱えるので Q^ε に対する初期値問題 (1.1) はより一般の f_0 に対し局所解を持つことがわかってゐる [1]。さらに大域解も初期値問題のみならず種々の初期値-境界値問題に対して得られてゐる ([4], [5] 及びそこに掲げられてゐる参考文献を参照)。

本節では $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限について考察する。 $q(v, \theta)$ が (2.1) ~ (2.3) を満たせば $q^\varepsilon(v, \theta)$ ももちろんこれらも、しかも ε に関して一様に満たす。従つて Q^ε についても定理 3.5 が適用でき、特に ε によって定められた $\beta, \sigma, \lambda, T$ は ε に依存しない。こうして得られた解を f^ε と記す。すると $\|f^\varepsilon - f\| \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) が示せる。 f は定理 3.5 の本来の ($\varepsilon = 0$) の解である。もちろん初期値 f_0 は f^ε, f に共通の同一のもので考えられる。故に cutoff 近似 (1.5) は少くとも Gevrey class の枠内では正当化できたことになる。詳しくは次が示せる。

定理 4.1. $\|f^\varepsilon - f\| \leq C \varepsilon^{\delta - (\delta' - 1)}$. $C \geq 0$ は ε に依存しない定数、また δ は (3.7) で定めたものである。

証明. (3.3) で $Q \in Q^\varepsilon$ を置き代えたものを夫々 $N_0^\varepsilon, N^\varepsilon$ とする. また $\bar{N}_0^\varepsilon = N_0^\varepsilon - N_0$ とおく. $f = N[f]$, $f^\varepsilon = N^\varepsilon[f^\varepsilon]$ 故から $f^\varepsilon - f = N_0^\varepsilon[f^\varepsilon, f^\varepsilon] - N_0[f, f] = N_0^\varepsilon[f^\varepsilon + f, f^\varepsilon - f] + \bar{N}^\varepsilon[f, f]$. $f^\varepsilon, f \in X_a$ であり, また明らかに N_0^ε について Lemma 3.3 がこのまま成り立つから

$$\begin{aligned} \|f^\varepsilon - f\| &\leq C_0 a_1(\beta, \sigma) \|f^\varepsilon + f\| \|f^\varepsilon - f\| + \|\bar{N}^\varepsilon[f, f]\| \\ &\leq 2a C_0 a_1(\beta, \sigma) \|f^\varepsilon - f\| + \|\bar{N}^\varepsilon[f, f]\|, \end{aligned}$$

(3.11) より $2a C_0 a_1(\beta, \sigma) = 1 - \sqrt{a}$. よって

$$(4.1) \quad \|f^\varepsilon - f\| \leq \|\bar{N}^\varepsilon[f, f]\| / \sqrt{a}.$$

さて (1.2) に於いて $q(v, \theta)$ を $\bar{q}^\varepsilon(v, \theta) = q^\varepsilon(v, \theta) - q(v, \theta) = (1 - \chi^\varepsilon(\theta)) q(v, \theta)$ に置き代えたものを $\bar{Q}^\varepsilon$ とする. 上で定義した $\bar{N}_0^\varepsilon$ は (3.3) で Q を $\bar{Q}^\varepsilon$ に置き代えたものに他ならない. $\bar{Q}^\varepsilon$ に対して Lemma 2.1 が成り立つのは明らかだが, 特に $\bar{q}^\varepsilon = 0$, $|\theta - \pi/2| > \varepsilon$ 故から (2.7) の θ に関する積分は $\int_{J_\varepsilon} |\cos \theta|^{-\delta' + k\delta} d\theta$, $k=1, 2$, $J_\varepsilon = [\pi/2 - \varepsilon, \pi/2 + \varepsilon]$ で置き換えられる. この積分は上から $C\varepsilon^{1-\delta'+k\delta}$ で抑えられる. $C \geq 0$ は ε に依存しない定数. 故に Lemma 2.1, 2.2, Theorem 2.4 の C を $C\varepsilon^{1-\delta'+\delta}$ で置き換えよう. よって $\bar{N}_0^\varepsilon$ に対して Lemma 3.3 の C_0 を $C_0\varepsilon^{1-\delta'+\delta}$ で置き代えたものが成り立つ. これと (4.1) より定理を得る. (証了).

この定理の系として

定理 4.2. $f_0 \geq 0$ ならば $f(t) \geq 0$, $0 \leq t \leq T$.

証明 $f_0 \geq 0$ ならば $f^\varepsilon(t) \geq 0, 0 \leq t \leq T$ なることがわかる [1] ので,
定理 4.1 で $\varepsilon \rightarrow 0$ としこの定理を得る.

$f^\varepsilon \geq 0$ の証明は Q^ε が通常の積分作用素であることと本質的に
使っているもので f^ε を経由せず直接定理 4.2 を証明するのは難
しいと思われる.

References

- [1] K.Asano, Local solutions to the initial and initial boundary problems for the Boltzmann equation with an external force. J.Math.Kyoto Univ. (to appear).
- [2] H.Grad, Asymptotic theory of the Boltzmann equation. Rarefied Gas Dynamics I. (Laurmann, J.A., Ed), Academic Press, N.Y. 1963, 25-59.
- [3] T.Nishida, A note on a theorem of Nirenberg. J.Diff. Geometry, 112(1977), 629-633.
- [4] S.Ukai and K.Asano, The Euler limit and initial layer of the nonlinear Boltzmann equation. Hokkaido Math. J. ,12(1983), 311-332.
- [5] — and —. Steady solutions of the Boltzmann equation for a gas flow past an obstacle. Arch. Rational Mech. Anal., 84,(1983), 249-291.
- [6] S.Ukai. Local solutions in Gevrey classes to the nonlinear Boltzmann equation without cutoff. Japan J.Appl.Math., 1 (1984), 141-156.