

不変式環上のリーマン仮説類似について

九州大学・理学部数学科 奥田 隆幸 (Takayuki Okuda)
(Department of Mathematics, Faculty of Science,
Kyushu University.)

1 概要

線形符号が self-dual であるとき、weight enumerator(x, y の 2 変数斉次多項式) は、MacWilliams 変換で不変であるが、 x, y の 2 変数斉次多項式で MacWilliams 変換で不変なものを、formally self-dual な formal weight enumerator(以下、self-dual な f.w.e.) と呼ぶ。Iwan M. Duursma は、self-dual な f.w.e. に対して、zeta 多項式と呼ばれる 1 変数多項式を定義した。

この zeta 多項式は、ある関数等式を満たすことが分かっており、特に zeta 多項式が実係数になるとき、その零点は、ある原点中心の円周に対して対称に存在する。更に、さまざまな self-dual な f.w.e. に対して、zeta 多項式の零点が全て、円周上に存在することが知られている。このとき、この f.w.e. はリーマン仮説類似を満たす、という。

しかし数値計算上、ある self-dual な f.w.e. の無限列がリーマン仮説類似を満たす (全ての zeta 多項式の全ての零点が、同一円周上に乗る) であろうと予想されながら、まだ証明されていない例がいくつかある。

TypeIV extremal で $length \equiv 0(mod 6)$ の場合には、全ての零点が同一円周上に乗るという事が証明されている (Duursma 2003[4]) が、 $length \equiv 2, 4(mod 6)$ の場合は未解決であった。この報告では、TypeIV extremal で $length \equiv 4(mod 6)$ の場合に、zeta 多項式の零点の振る舞いが、 $length \equiv 0(mod 6)$ の場合と対応している事を示し、特に、 $length \equiv 4(mod 6)$ の場合にも、全ての zeta 多項式の零点が、同一円周上に乗るということを紹介したい。

2 リーマン仮説類似の定義

線形符号に対して weight enumerator を定義すると、線形符号の性質に応じて weight enumerator もいろいろな性質を持つ。特に、self-dual な線形符号の weight enumerator は、MacWilliams 変換で不変である。

weight enumerator の形式的な一般化として、次の定義を導入する。

formal weight enumerator

$\mathbb{C}_n[x, y]$ を x, y の 2 変数 n 次斉次多項式全体のベクトル空間とする。

$\mathbb{C}_n[x, y]$ の元 $F(x, y)$ を $length = n$ の formal weight enumerator (以下 f.w.e.) といい、 $F(x, y) = a_0 x^n + a_d x^{n-d} y^d + a_{d+1} x^{n-d-1} y^{d+1} + \dots$ (ただし $a_d \neq 0$ とし、 a_0 はどのような数であってもよいとする) と書ける場合に、最小距離 d_F を $d_F = d$ と定義する。

更に $F(x, y)$ が $q \in \mathbb{N}$ に対する MacWilliams 変換で不変、つまり

$$\sigma_q := \frac{1}{\sqrt{q}} \begin{pmatrix} 1 & q-1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

に対し、 $\sigma_q \cdot F(x, y) = F(x, y)$ となるとき、 $F(x, y)$ は q で formally self-dual な f.w.e という。(以下、 q で self-dual な f.w.e.)

ただし $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot F(x, y) := F(ax + by, cx + dy)$ とする。

この q で self-dual な f.w.e. に対して、zeta 多項式と呼ばれる 1 変数多項式を次の様に定義する。

zeta 多項式

q で self-dual な f.w.e. である $F(x, y)$ に対し、zeta 多項式と呼ばれる 1 変数多項式 $P_F(T)$ を、以下の性質を持つものとして定める

$$\begin{aligned} & \cdot \deg P_F(T) \leq n - d_F \\ & \cdot \frac{F(x, y) - A_0 x^n}{q-1} = [T^{n-d_F}] \frac{P_F(T)}{(1-T)(1-qT)} (xT + y(1-T))^n \end{aligned}$$

ただし 式の右辺は、 T に関する形式的冪級数 $\frac{P_F(T)}{(1-T)(1-qT)} (xT + y(1-T))^n$ の、第 $n - d_F$ 次の係数 (これは x, y の n 次斉次多項式となる) を表すものとする。

この定義によって zeta 多項式は一意的に定まる事が知られている。

zeta 多項式の計算例

$F(x, y) := x^8 + 14x^4y^4 + y^8$ (e8 code の weight enumerator) とすると

$length = n = 8, d_F = 4, F$ は $q = 2$ で self-dual である。

このとき $P_F(T) = p_0 + p_1T + \cdots + p_4T^4$ としてよい。2 番目の式の左辺は $\frac{F(x, y) - x^8}{2-1} = 14x^4y^4 + y^8$ となるが、右辺に現れる形式的冪級数は

$$\begin{aligned} \frac{P_F(T)}{(1-T)(1-2T)}(xT + y(1-T))^8 = \\ \cdots + \{70p_0x^4y^4 \\ + (-112p_0 + 56p_1)x^3y^5 \\ + (112p_0 - 84p_1 + 28p_2)x^2y^6 \\ + (48p_0 + 56p_1 - 32p_2 + 8p_3)xy^7 \\ + (9p_0 - 13p_1 + 11p_2 - 5p_3 + p_4)y^8\}T^4 + \cdots \end{aligned}$$

となる。ここで x, y に対する係数比較を順にしてやると

$$p_0 = \frac{1}{5}, p_1 = \frac{2}{5}, p_2 = \frac{2}{5}, p_3 = 0, p_4 = 0$$

となる。従って

$$P_F(T) = \frac{1}{5}(2T^2 + 2T + 1)$$

さて、2 変数多項式 $F(x, y)$ から 1 変数多項式 $P_F(T)$ を定義したのであるが、 $F(x, y)$ には MacWilliams 変換での不変性が要請されていた。この不変性は、zeta 多項式に、次の関数等式として受け継がれる。

関数等式

$g := \frac{1}{2}(n - 2d_F + 2)$ とする。

このとき

$$\begin{aligned} \deg P_F(T) &= 2g = n - 2d_F + 2 \\ P_F(T) &= q^g P_F\left(\frac{1}{qT}\right) T^{2g} \end{aligned}$$

となる。

特に 2 番目の等式を $P_F(T)$ の関数等式と呼ぶ。

これより、 α が $P_F(T)$ の零点である事と、 $\frac{1}{q\alpha}$ が $P_F(T)$ の零点である事と同値であり、

更に $P_F(T)$ が実係数なら、 α が $P_F(T)$ の零点である事と、 $\frac{1}{q\alpha}$ が $P_F(T)$ の零点である事と同値である。

この同値性から分かるように、zeta 多項式の零点にとって $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{1}{\sqrt{q}}\}$ という円は特別な意味を持つ。実は、さまざまな self-dual な f.w.e. に対して、zeta 多項式の零点が、この円周上にあることが知られている。

リーマン仮説類似

$F(x, y)$ を q で self-dual な f.w.e. とする、
 $P_F(T)$ の全ての零点が $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{1}{\sqrt{q}}\}$ に乗るとき、
 $F(x, y)$ はリーマン仮説類似を満たすという。

3 TypeIV extremal f.w.e. と、そのリーマン仮説類似

今回、特に注目するのは、TypeIV extremal と呼ばれる、 $q = 4$ で self-dual な f.w.e. の無限列である。

TypeIV f.w.e.

1 の n 乗根 $\xi_n := \exp(\frac{2\pi i}{n})$ に対し、 $\tau_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi_n \end{pmatrix}$ としておく。

$F(x, y)$ を $length = n$ の f.w.e. としたとき、 $F(x, y)$ が $q = 4$ で self-dual というのは $\sigma_4 \cdot F(x, y) = F(x, y)$ となる事であった。

更に $F(x, y)$ が even であるというのを $\tau_2 \cdot F(x, y) = F(x, y)$ となることと定義する。つまり、 $F(x, y) = F(x, -y)$ であることを even という。

そして $F(x, y)$ が Type IV であるというのを $q = 4$ で self-dual であり、尚且つ even であることと定義する。

$G_4 := \langle \sigma_4, \tau_2 \rangle$ として定義しておけば

$$F(x, y) \text{ が Type IV} \iff F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]^{G_4}$$

(ただし $\mathbb{C}[x, y]^{G_4}$ は G_4 の不変式環としている)

となる。このとき $\mathbb{C}[x, y]^{G_4} = \mathbb{C}[x^2 + 3y^2, (y(x^2 - y^2))^2]$ となることが知られている。

この他にも TypeI, TypeII, TypeIII が次の様に定義されているが、今回は詳しく触れない。(4),(5) 参照)

$$G_1 := \langle \sigma_2, \tau_2 \rangle$$

$$\text{Type I} \iff F(x, y) \in \mathbb{C}_n[x, y]^{G_1} = \mathbb{C}[x^2 + y^2, (xy(x^2 - y^2))^2]$$

$$G_2 := \langle \sigma_2, \tau_4 \rangle$$

$$\text{Type II} \iff F(x, y) \in \mathbb{C}_n[x, y]^{G_2} = \mathbb{C}[x^8 + 14x^4y^4 + y^8, x^4y^4(x^4 - y^4)^4]$$

$$G_3 := \langle \sigma_3, \tau_3 \rangle$$

$$\text{Type III} \iff F(x, y) \in \mathbb{C}_n[x, y]^{G_3} = \mathbb{C}[x^4 + 8xy^3, (y(x^3 - y^3))^3]$$

extremal

$F(x, y)$ が $length = n$ の Type IV f.w.e. であるとき、 $F(x, y)$ が extremal であるということを、 F の最小距離 d_F が、 $length = n$ の Type IV f.w.e. の中で最大、になるということで定義する。さらに $F_n^{IV}(x, y)$ と書いたら $length = n$ の Type IV extremal で monic な f.w.e. とする。(このようなものは一意的に存在する。従って extremal な f.w.e. の零点を調べたければ、 $F_n^{IV}(x, y)$ の零点を調べればよい)

このようなものを取り扱うのは、符号理論の観点から自然なことであるが、Duursma は次のような問題を考えた。

Duursma の問題

次の命題が真であれば証明し、偽であれば反例を挙げよ。

”Type j ($j = I, II, III, IV$) extremal f.w.e. は
全て リーマン仮説類似を満たす。”

この問題は、一般には未解決である。無限列として部分的に解決しているものでは [Duursma 2003(4)]

$length = 6k$ ($k \in \mathbb{N}$) の Type IV extremal f.w.e. は、リーマン仮説類似を満たす。

という結果があるが、その他は知られていなかった。(2007 年現在)

次節では、主結果として、TypeIV extremal で $length = 6k - 2$ の場合にも、肯定的に解決したことを報告する。

4 主結果

主結果の主張

$F_n^{IV}(x, y)$ と書いたら $length = n$ の Type IV extremal で monic な f.w.e. のことであつた。このとき任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し

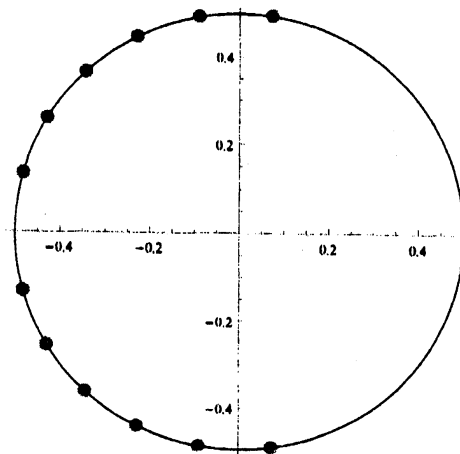
$$P_{F_{6k-2}^{IV}}(T) = \frac{4}{3}(T - \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}})(T - \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}})P_{F_{6k}^{IV}}(T)$$

である。特に、Duursma の結果を考慮すれば、

$length = 6k - 2 (k \in \mathbb{N})$ の Type IV extremal f.w.e. はリーマン仮説類似を満たす。

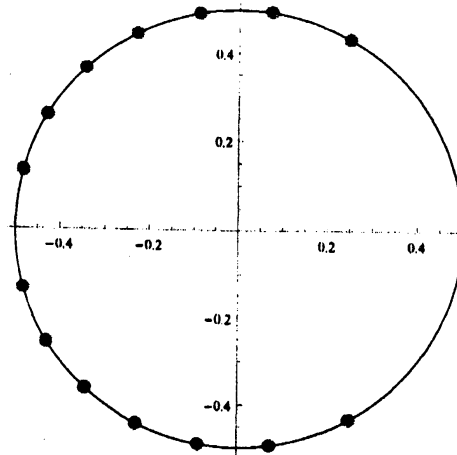
例; $P_{F_{42}^{IV}}(T)$ と $P_{F_{40}^{IV}}(T)$ の比較

$P_{F_{42}^{IV}}(T)$ の零点



(円の半径 = $\frac{1}{2}$)

$P_{F_{40}^{IV}}(T)$ の零点



(円の半径 = $\frac{1}{2}$)

零点の集合として、2点 $\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}, \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ 以外は完全に一致している。

主張の証明の核となるのは、次の補題である。

key lemma; F_{6k}^{IV} と F_{6k-2}^{IV} との関係

$$\frac{\partial_x^2 + \frac{1}{3}\partial_y^2}{6k(6k-1)} F_{6k}^{IV} = F_{6k-2}^{IV}$$

(ただし $\partial_x := \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y := \frac{\partial}{\partial y}$ としている)

この補題を認めれば、zeta 多項式の定義と関数等式の 1 番目の性質から、主張が得られる。

key lemma の証明の流れ

まず

(a) $F(x, y)$ が $length = n$ の TypeIV f.w.e. のとき、 $(\partial_x^2 + \frac{1}{3}\partial_y^2)F(x, y)$ は $length = n - 2$ の TypeIV の f.w.e.

(b) $d_F \geq 2$ のとき、 $d_{\partial_x^2 + \frac{1}{3}\partial_y^2 F} = d_F - 2$

を示す。

・ (a) の証明

$x^2 + \frac{1}{3}y^2$ は G_4^I の作用で不変である。ここで、よく知られた次の定理を用いる。(Duursma

2003(4) でも同じ定理を用いている)

定理 「 G を、 $\mathbb{C}_n[x, y]$ に作用している $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群とし、 $F(x, y) \in \mathbb{C}_n[x, y]^G$ とする。

このとき $p(x, y) \in \mathbb{C}_i[x, y]^{G^i}$ ($i \leq n$) とすると、 $p(\partial_x, \partial_y)F(x, y) \in \mathbb{C}_{n-i}[x, y]^G$ となる。」

この定理より $F(x, y)$ が $length = n$ の TypeIV f.w.e. なら $(\partial_x^2 + \frac{1}{3}\partial_y^2)F(x, y)$ は $length = n - 2$ の TypeIV f.w.e. であることが分かる。

・ (b) の証明

最小距離 d_F の定義より、 $d_{\partial_x F} = d_F$ と、 $d_F \geq 1$ なら $d_{\partial_y F} = d_F - 1$ であることが分かる。したがって $\partial_x^2 + \frac{1}{3}\partial_y^2$ は、 y に関して 2 階微分であるから

$$d_F \geq 2 \text{ なら、 } d_{\partial_x^2 + \frac{1}{3}\partial_y^2 F} = d_F - 2$$

・ key lemma の証明

$\mathbb{C}[x, y]^{G_4} = \mathbb{C}[x^2 + 3y^2, (y(x^2 - y^2))^2]$ であることから

(1) $length = 6k - 2$ のとき $d_F \geq 2k$ となる TypeIV f.w.e. は、定数倍を除き一意に存在する

という事と

(2) $length = 6k$ のとき $d_F \geq 2k + 2$ となる TypeIV f.w.e. は、定数倍を除き一意に存在する

ということが分かる。

まず (a) より $(\partial_x^2 + \frac{1}{3}\partial_y^2)F_{6k}^{IV}$ は $length = 6k - 2$ の TypeIV の f.w.e. である。

更に、(2) より F_{6k}^{IV} の最小距離は $d_{F_{6k}^{IV}} \geq 2k + 2$ であるが、(b) より $d_{(\partial_x^2 + \frac{1}{3}\partial_y^2)F_{6k}^{IV}} = d_{F_{6k}^{IV}} - 2 \geq 2k$

従って $(\partial_x^2 + \frac{1}{3}\partial_y^2)F_{6k}^{IV}$ は $length = 6k - 2$ の TypeIV の f.w.e. で、最小距離が $2k$ 以上のものである。

(1) よりこのようなものは定数倍を除いて一意に存在するから、extremal の定義と合わせて考えると、これは F_{6k-2}^{IV} の定数倍である。 F_{6k-2}^{IV} が monic であることを考えて調整すると

$$\frac{\partial_x^2 + \frac{1}{3}\partial_y^2}{6k(6k-1)} F_{6k}^{IV} = F_{6k-2}^{IV}$$

となる。

これで key lemma が示せた。

5 TypeI, TypeIII での類似の結果

主結果での議論は、TypeIV extremal f.w.e. の関係性を微分作用素で見つけ、それを zeta 多項式の関係に翻訳するというものであった。TypeI extremal, TypeIII extremal でも同様の議論によって、

$length = 8k$ の Type I extremal f.w.e. は、リーマン仮説類似を満たす。

$\Leftrightarrow length = 8k - 2$ の Type I extremal f.w.e. は、リーマン仮説類似を満たす。

$$\left(\frac{\partial_x^2 + \partial_y^2}{8k(8k-1)} F_{8k}^I = F_{8k-2}^I \text{ を用いる。} \right)$$

$length = 12k$ の Type I extremal f.w.e. は、リーマン仮説類似を満たす。

$\Leftrightarrow length = 12k - 4$ の Type I extremal f.w.e. は、リーマン仮説類似を満たす。

$$\left(\frac{\partial_x^4 + \partial_x \partial_y^3}{12k(12k-1)(12k-2)(12k-3)} F_{12k}^{III} = F_{12k-4}^{III} \text{ を用いる。} \right)$$

を示すことができる。しかし TypeII では、同様の関係性は成り立ちそうにない。

References

- (1) Iwan M. Duursma, Weight distributions of geometric Goppa codes, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (9) (1999) 3609-3639.
- (2) Iwan M. Duursma, From weight enumerators to zeta functions, Discrete Appl. Math. 111 (1-2) (2001) 55-73.
- (3) Iwan M. Duursma, A Riemann hypothesis analogue for self-dual codes, in: A. Berg, S. Litsyn (Eds.), Codes and Association Schemes (Piscataway, NJ, 1999), American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, pp. 115-124.
- (4) Iwan M. Duursma, Extremal weight enumerators and ultraspherical polynomials, Discrete Math. 268 (1-3) (2003) 103-127.
- (5) T. Harada, M. Tagami, A Riemann hypothesis analogue for invariant rings, Discrete Math. 307 (2007).