

氏 名	みね たく や 峯 拓 矢
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 2419 号
学位授与の日付	平 成 14 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	The uniqueness of the integrated density of states for the Schrödinger operators for the Robin boudnary conditions (ロバン境界条件についてのシュレディンガー作用素の状態密度)
論文調査委員	(主 査) 教 授 井 川 満 教 授 西 田 孝 明 教 授 重 川 一 郎

論 文 内 容 の 要 旨

The uniqueness of the integrated density of states for the Schrödinger operators for the Robin boudnary condition
(ロバン境界条件についてのシュレディンガー作用素の状態密度)

d 次元ユークリッド空間 ($d \geq 1$) 上の, 磁場を表すベクトルポテンシャル a と電場を表すスカラーポテンシャル V をもった Schrödinger 作用素

$$Hu = -(\nabla - ia)^2 u + Vu$$

を考える. この Schrödinger 作用素の状態密度関数 (integrated density of states, 以下 IDS と略記) とは, 次の極限で定義される実数直線上の単調非減少関数 $\rho^\#(\lambda)$ のことである:

$$\rho^\#(\lambda) = \lim_{\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d} \frac{N_\Omega^\#(\lambda)}{|\Omega|} \quad (1)$$

ここで, Ω は $\mathbb{R}^d$ 内の有界な開集合であり, $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ は Ω を全空間 $\mathbb{R}^d$ に広げていく極限操作を表す. $N_\Omega^\#(\lambda)$ は, H を有界領域 Ω に制限し, 適当な境界条件 ($\#$) の下で自己共役作用素として実現した作用素 $H_\Omega^\#$ の, エネルギー $\lambda (\in \mathbb{R})$ 以下の (重複度を込めた) 固有値の数である. 従って, $\rho^\#(\lambda)$ は「 λ 以下のエネルギーを持つ固有状態の, 単位体積当りの数」を表し, その微分が状態個数のエネルギー密度を表すことから integrated density of states と名付けられている.

境界条件 ($\#$) の代表的なものとして, Dirichlet 境界条件 $u|_{\partial\Omega} = 0$, Neumann 境界条件 $(\nabla - ia)u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$ および Robin 境界条件 $(\nabla - ia)u \cdot n|_{\partial\Omega} = -\sigma u|_{\partial\Omega}$ が挙げられる. ここで n は $\partial\Omega$ の単位外法線ベクトルを表し, σ は境界 $\partial\Omega$ 上の実数値関数とする.

峯氏が考察した問題は, 種々の境界条件の下で計算した $IDS\rho^\#(\lambda)$ が一致するか, ということである. すなわち, 「IDS の定義の一意性」の問題である.

この問題について, 磁場 a が存在しない時には, Benderskii-Pastur '70, Kirsch-Martinelli '82, Shubin '82らによる肯定的結果がある. 磁場が存在する時峰君は土居, 岩塚両氏との共同研究により, Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件に対する IDS が一致する為の十分条件を与えた (参考文献). また, この結果より, Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件を持つ作用素の間にある作用素 $H_\Omega^\#$ については, $\rho^D = \rho^\# = \rho^N$ が成り立つ事が直ちに従う.

従って, 次なる問題は, 二次形式の意味で Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件を持つ作用素の間にはない作用素が問題になる. その代表例が Robin 境界条件を持つ H_Ω^R である.

主論文で峰君は, Robin 境界条件をも許した場合の「IDS の一意性」のための十分条件を与えた.

以下のような条件を導入する.

(A1) ポテンシャルに対する仮定:

$$a \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d), \quad V \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}), \quad V \geq 0$$

(A2) 領域の形状に関する仮定 :

1. $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ のとき, $|\partial\Omega|/|\Omega|$ は 0 に収束する.
2. 領域の境界は $d-1$ 次元集合上の Lipschitz 連続関数のグラフとして表され, その Lipschitz 定数は Ω に依存しないある定数以下である.

(A3) 境界関数に関する仮定 :

1. σ_Ω は, 境界 $\partial\Omega$ 上の実数値 L^∞ 級関数である.
2. $\sigma_\Omega^- = \max(\text{ess. sup}(-\sigma_\Omega), 0)$ とおくと $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ のとき

$$\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|} \cdot (\sigma_\Omega^-)^d \rightarrow 0, \quad (2)$$

あるいは

$$\frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|} \cdot (\sigma_\Omega^-)^{d-1} \rightarrow 0 \quad (3)$$

結果は次の通りである (定理の番号は主論文のものである).

定理 1. 1. (A1), (A2), (A3) の 1 および 2 の (2) が成り立つとする. この時, $\mathbb{R}$ 上の測度としての極限 $d\rho^p$ と $d\rho^s$ は, 一方が存在すれば他方も存在し, かつ両者は一致する.

定理 1. 3. (A1), (A2), (A3) の 1 および 2 の (3) が成り立ち, かつ $a=0$ とする. この時, 定理 1. 1 と同じ主張が成り立つ.

論文審査の結果の要旨

峯氏は, d 次元ユークリッド空間 ($d \geq 1$) 上の, ベクトルポテンシャル a とスカラーポテンシャル V をもった Schrödinger 作用素

$$Hu = -(\nabla - ia)^2 u + Vu$$

の状態密度関数 (integrated density of states, 以下 IDS と略記) の定義の一意性を考察している.

IDS の定義では, まず H の有界領域での自己共役実現をつくり, その固有値の挙動を計ることがなされる. H の有界領域での自己共役実現をつくるためには, 必然的に境界条件を導入しなければならないのであるが, IDS の物理的意味を考えれば, IDS が導入された境界条件に依存してはならない. すなわち, 「IDS の定義の一意性」は IDS の考察における最も基本的な課題である.

「IDS の定義の一意性」の研究は, ベクトルポテンシャルが無い場合, すなわち $a=0$ の場合, これは磁場が無いことを意味するが, Benderskii-Pastur '70, Kirsch-Martinelli '82, Shubin '82 などに依るものがあり, 肯定的な結果が示されている. 磁場がある場合, すなわちベクトルポテンシャル a が消えていない場合は, 峰君が土居, 岩塚両氏となした共同研究がある. ここでは, Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件が考察の対象とする境界条件である. 彼らの結果は, これらの境界条件を導入して定義された IDS が一致する為の十分条件を与えた (参考文献). また, この結果より, Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件を持つ作用素の間にある作用素を用いて作られた IDS は全て一致することになる.

従って, 残された課題は, 二次形式の意味で Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件を持つ作用素の間にある作用素を用いて定義された IDS の考察である. その代表例が Robin 境界条件を持つ場合である.

主論文で峰君は, Robin 境界条件をも許した場合の「IDS の一意性」のための十分条件を与えた.

峰君が十分条件として与えている条件は, 実用上理にかなったものであり, 定理の存在意味は大きい.

その証明の主たる困難点は, 当然のこととして, Robin 境界条件が, Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件を持つ作用素の間にある作用素を与える故に, Robin 境界条件のもとでの自己共役実現を, Dirichlet 境界条件, あるいは Neumann 境界条件のもとでの自己共役実現を用いて評価する部分にある.

峰君は多くの優れた着想により, この困難点を克服して「IDS の一意性」の結論に到達している. 彼の着想の 1 つとして, $u \in W_{a,V}^1(\Omega)$ に対する境界へのトレースの評価式

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega, ds)}^2 \leq C_2(\epsilon^{-1}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \epsilon\|(\nabla - ia)u\|_{L^2(\Omega)}^2)$$

がある.

このように, 峰君の研究は, Schrödinger 作用素の基本的問題の研究において意味深い結果を得ており, またその証明において, 多くの独創的着想と優れた考察力を示している. 以上より, この論文は博士(理学)を授与するに十分な研究成果を挙げているものと認められる.