

非線形境界条件を伴うトポロジー最適化問題*

岡 大将 (Tomoyuki Oka)

東京大学大学院工学系研究科

(Graduate school of engineering, The University of Tokyo)

1 序

本稿では、次の最小化問題、

$$(P) \quad \inf_{\chi_\Omega \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} \left\{ F(\chi_\Omega) := \int_D \kappa_\Omega(x) \nabla u_\Omega(x) \cdot \nabla u_\Omega(x) dx \right\}$$

について考察する. ここで, $D \subset \mathbb{R}^d$ は滑らかな境界 ∂D を持つ有界領域, $d \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ は $\Omega \subset D$ となるような開集合とし,

$$\kappa_\Omega = \alpha(1 - \chi_\Omega) + \beta\chi_\Omega, \quad \beta > \alpha > 0, \quad \chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{\Omega}, \\ 0, & x \in D \setminus \overline{\Omega} \end{cases}$$

とする. また, $\mathcal{U}_{\text{ad}}$ は次の体積制約を伴う関数空間,

$$\mathcal{U}_{\text{ad}} := \{\chi_\Omega \in L^\infty(D; \{0, 1\}) : \|\chi_\Omega\|_{L^1(D)} = V_{\text{max}}\}$$

とし, $V_{\text{max}} > 0$ とする. 最後に, 状態変数 $u_\Omega \in H^1(D) \cap L^p(\partial D)$ は次の非線形境界条件を伴う楕円型方程式,

$$(E) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa_\Omega \nabla u_\Omega) = f & \text{in } D, \\ -\kappa_\Omega \nabla u_\Omega \cdot \nu = |u_\Omega|^{p-2} u_\Omega & \text{on } \partial D \end{cases}$$

に対する弱解とし, $f \in L^2(D)$, $p \geq 2$, ν は外向き単位法線ベクトルを表すものとする.

最小化問題 (P) のように, 与えられた目的汎関数 $F : \mathcal{U}_{\text{ad}} \rightarrow \mathbb{R}$ を最小化するような集合 $\Omega \subset D$ を決定する問題, すなわち, F を最小化する最適な材料配置を決定する問題は, **最適設計問題 (optimal design problem)** として知られており, 集合 $\Omega \subset D$ を特性関数 $\chi_\Omega \in L^\infty(D)$ を用いて表現している観点から, $\Omega \subset D$ の位相の変化も許容しているため, 工

* 本研究は, 喜多航佑氏 (早稲田大学) 及び, 松島慶氏 (東京大学) との共同研究に基づく. また, 本研究は, 科学研究費補助金 (JP20J10143) の助成を受けたものである.

学的にはトポロジー最適化問題 (topology optimization problem) としてよく知られている. トポロジー最適化問題の研究は, 斉次 Dirichlet 境界条件に置き換えた (E) に対する結果や混合境界条件を伴うベクトル値に拡張した線形弾性体方程式に対する結果がよく知られている ([2, 5]). 目的汎関数 F を最小化する χ_Ω (以下, 最適解と記す) の存在性については, [18, 2] で均質化問題 (homogenization problem) に基づいて議論されている. 均質化問題は, (周期的に) 振動するような係数行列場を伴う偏微分方程式に対して, 振動 (周期) パラメータに関する極限方程式 (以下, 均質化方程式と記す) を厳密に導出する問題である. 均質化問題では, 一般に係数行列場に対して周期性が課されており, 形式的な漸近展開に基づいた漸近展開法 [9] に端を発し, two-scale 収束 [21, 1] や, unfolding 法 [14, 15] などの関数解析的手法が考案され, 均質化方程式や係数行列場の極限に対応する均質化行列が厳密に導出されている. さらに, 局所周期性 [24] や概周期性 [12] のように係数行列場に課す周期性を一般化した結果も知られており, 確率的な設定でも解析が行われている [23]. しかしながら, $\kappa_\Omega I$ は一様楕円性程度の情報しか持たないため, これらの理論が適用できず, 結果として均質化行列を明示的に表現することが困難になる. [19] では, H -収束と呼ばれる収束概念を導入し, より一般的な枠組みにも対応した均質化理論を構築し, [18, 2] では, H -収束性を用いて最適解の存在性について考察している. すなわち, この結果は最適な材料配置を決定するための基礎を成し, これまでに様々な数値解析手法が考案されている ([8, 2, 11, 5]).

一方, 時間発展問題に対して, [16] に基づき, 熱方程式に対する最適解の存在性やその材料配置が [20] で考察されており, さらに, [6] では, その長時間挙動や定常問題への収束性についても考察されている. しかしながら, 非線形問題に対する同様な結果は見当たらなかったため, 本稿では, そのモデルケースとして, Stefan-Boltzmann の法則に基づく非線形境界条件を伴うトポロジー最適化問題に注目し, その第一歩として, 定常問題に対する最適解の存在性やその材料配置について焦点を当てるに至った.

本稿では, (P) の最適解の存在性について議論する準備として, 対応する均質化問題を考える. 次に, 均質化問題に於いて得られた結果を応用して (P) の最適解の存在性について考察する. さらに, 最適解が成す材料配置について考察し, Robin 境界条件の場合と比較することで, 境界条件の線形性と非線形性の違いによって材料配置がどのように変化するのかについて数値的に考察する.

2 均質化定理

本章では, (E) に対応する均質化問題として次の方程式,

$$(E_\varepsilon) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f & \text{in } D, \\ -A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nu = |u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon & \text{on } \partial D \end{cases}$$

を考える. ここで, $A_\varepsilon \in L^\infty_{\text{sym}}(D; \mathbb{R}^{N \times N})$ は

$$\alpha|\xi|^2 \leq A_\varepsilon(x)\xi \cdot \xi \leq \beta|\xi|^2 \quad \text{for all } \xi \in \mathbb{R}^d$$

を満たす対称行列とする. まず, (E_ε) に対する弱解を次のように定義する.

定義 2.1 ((E_ε) の弱解). 与えられた $f \in (H^1(D))^*$ に対して, 関数 $u_\varepsilon \in K := \{w \in H^1(D) : |w|^p \in L^1(\partial D)\}$ が (E_ε) の弱解であるとは,

$$(1) \quad a_\varepsilon(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + J(v) - J(u_\varepsilon) \geq \langle f, v - u_\varepsilon \rangle \quad \text{for all } v \in K$$

を満たすときである. ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(D)}$,

$$a_\varepsilon(u, v) = \int_D A_\varepsilon(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx, \quad J(u) = \int_{\partial D} \frac{1}{p} |u(x)|^p \, d\sigma$$

を表す.

注意 2.2 ((E_ε) の弱形式). 変分不等式 (1) を満たすならば, 任意の $\varphi \in K$ に対して, $v = u \pm \lambda\varphi \in K$ とすると, $\lambda \rightarrow 0_+$ として

$$(2) \quad \int_D A_\varepsilon(x) \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla \varphi(x) \, dx + \int_{\partial D} |u_\varepsilon|^{p-2} u_\varepsilon(x) \varphi(x) \, d\sigma = \int_D f(x) \varphi(x) \, dx$$

が成り立ち, 弱形式を満たす. 弱形式 (2) の代わりに (1) を用いて弱解を定義する理由については注意 2.7 を参照されたい.

次の (E_ε) に対する適切性について考察する.

定理 2.3 ((E_ε) の適切性). 方程式 (E_ε) の弱解が一意に存在する.

証明の概要. 与えられた $f \in (H^1(D))^*$ に対して, 次の最小化問題,

$$(3) \quad \inf_{v \in K} \left\{ E(v) := \frac{1}{2} a_\varepsilon(v, v) - \langle f, v \rangle + J(v) \right\}$$

を考える. このとき, $E: K \rightarrow (-\infty, \infty]$ は凸, 下半連続, $E \not\equiv \infty$ であり,

$$\lim_{v \in K, \|v\|_{L^2(D)} \rightarrow \infty} E(v) = +\infty$$

が成り立つ. 従って, 直接法 ([13, Corollary 3.23]) により, (3) を満たす $u \in K$ の存在性が得られる. さらに, [17, Theorem 1.6] を用いると (1) が成り立つ. 弱解の一意性については, $r \mapsto |r|^{p-2}r$ の単調性から従い, 証明が完了する. $\square$

均質化定理を証明する準備として, 以下の収束概念を導入する.

定義 2.4 (H -収束, [19]). 各 $\varepsilon > 0$ に対して, $A_\varepsilon \in L^\infty(D; \mathbb{R}^{d \times d})$ が $A_{\text{hom}} \in L^\infty(D; \mathbb{R}^{d \times d})$ に H -収束するとは, 任意の $\omega \Subset D$ と任意の $f \in H^{-1}(\omega)$ に対して,

$$-\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f \quad \text{in } H^{-1}(\omega)$$

の弱解 u_ε が

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\rightarrow u_{\text{hom}} && \text{weakly in } H_0^1(\omega), \\ A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon &\rightarrow A_{\text{hom}} \nabla u_{\text{hom}} && \text{weakly in } L^2(\omega)^d \end{aligned}$$

を満たすときであり, $A_\varepsilon \xrightarrow{H} A_{\text{hom}}$ と記述する. ここで, u_{hom} は次の均質化方程式,

$$-\operatorname{div}(A_{\text{hom}} \nabla u_{\text{hom}}) = f \quad \text{in } H^{-1}(\omega)$$

の弱解とする.

H -収束を用いることで以下の均質化定理が得られる.

定理 2.5 (均質化定理). 関数 $u_\varepsilon \in K$ を (E_ε) の弱解とする. このとき, (再び ε と記すが, (ε) の) ある部分列と $u_{\text{hom}} \in K$ 及び, 均質化行列 $A_{\text{hom}} \in L^\infty(D; \mathbb{R}^{d \times d})$ が存在して,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\rightarrow u_{\text{hom}} && \text{weakly in } H^1(D), \\ A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon &\rightarrow A_{\text{hom}} \nabla u_{\text{hom}} && \text{weakly in } L^2(D)^d \end{aligned}$$

が成り立つ. さらに, $u_{\text{hom}} \in K$ は次の均質化方程式,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_{\text{hom}} \nabla u_{\text{hom}}) = f & \text{in } D, \\ -A_{\text{hom}} \nabla u_{\text{hom}} \cdot \nu = |u_{\text{hom}}|^{p-2} u_{\text{hom}} & \text{on } \partial D \end{cases}$$

の弱解となる.

証明. 変分不等式 (1) に対して, $v = u_\varepsilon$ を選ぶと, ある $\delta > 0$ と $C_0 \in \mathbb{R}$ が存在して

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + \delta \|u_\varepsilon\|_{L^2(\partial D)}^2 \leq C_0 + \langle f, u_\varepsilon \rangle$$

が成り立ち, $\|u_\varepsilon\|_{H^1(D)} \leq C$ が得られる. 従って, (再び ε と記すが (ε) の) ある部分列及び, $u_{\text{hom}} \in H^1(D)$ が存在して,

$$(4) \quad \begin{aligned} u_\varepsilon &\rightarrow u_{\text{hom}} && \text{weakly in } H^1(D), \\ u_\varepsilon &\rightarrow u_{\text{hom}} && \text{strongly in } L^2(D) \cap L^2(\partial D) \end{aligned}$$

が成り立つ. さらに, [19, Theorem 2]) により $A_\varepsilon \xrightarrow{H} A_{\text{hom}}$ が成り立つ. 特に, 任意の $\varphi \in H_0^1(D)$ に対して $u_\varepsilon \pm \varphi \in K$ より, (1) で $v = u_\varepsilon \pm \varphi$ を選ぶと

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, \varphi) = \langle f, \varphi \rangle \quad \text{for all } \varphi \in H_0^1(D)$$

が成り立ち,

$$(5) \quad -\operatorname{div}(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f \quad \text{in } H^{-1}(D)$$

を意味する. 従って, [19, Theorem 1] を (5) に適用すると,

$$(6) \quad A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightarrow A_{\text{hom}} \nabla u_{\text{hom}} \quad \text{weakly in } L^2(D)^d,$$

$$(7) \quad \int_D (A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon)(x) \varphi(x) \, dx \rightarrow \int_D (A_{\text{hom}} \nabla u_{\text{hom}} \cdot \nabla u_{\text{hom}})(x) \varphi(x) \, dx$$

が任意の $\varphi \in C_c^\infty(D)$ に対して成り立つ. ここで, $0 \leq \varphi \leq 1$ となる $\varphi \in C_c^\infty(D)$ を (7) で選ぶと,

$$\int_D (A_{\text{hom}} \nabla u_{\text{hom}} \cdot \nabla u_{\text{hom}})(x) \varphi(x) \, dx \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \quad \text{for all } \varphi \in C_c^\infty(D)$$

が成り立ち, 次の下半連続性,

$$(8) \quad a_{\text{hom}}(u_{\text{hom}}, u_{\text{hom}}) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)$$

が得られる. さらに, K は $H^1(D)$ 上の閉凸集合より, $u_{\text{hom}} \in K$ が成り立ち, 以下の J の $L^2(\partial D)$ 上での弱下半連続性,

$$J(u_{\text{hom}}) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J(u_\varepsilon)$$

が得られ, 弱解の定義及び, (4), (6), (8) を組み合わせると,

$$a_{\text{hom}}(u_{\text{hom}}, v - u_{\text{hom}}) + J(v) - J(u_{\text{hom}}) \geq \langle f, v - u_{\text{hom}} \rangle \quad \text{for all } v \in K$$

が成り立つ. すなわち, 注意 2.2 によって, $u_{\text{hom}} \in K$ は任意の $\varphi \in K$ に対して,

$$\int_D A_{\text{hom}}(x) \nabla u_{\text{hom}}(x) \cdot \nabla \varphi(x) \, dx + \int_{\partial D} |u_\varepsilon(x)|^p \varphi(x) \, d\sigma = \int_D f(x) \varphi(x) \, dx$$

を満たし, 証明が完了する. □

注意 2.6 (非線形境界条件の一般化). 定理 2.5 は適切な仮定の下で, 極大単調作用素で記述される非線形境界条件へと拡張することができる.

注意 2.7 (エネルギー収束). 定理 2.5 の証明に於いて, (8) の逆, すなわち,

$$(9) \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq a_{\text{hom}}(u_{\text{hom}}, u_{\text{hom}})$$

を得ることは, 斉次 Dirichlet 境界条件の場合でさえ困難であることに注意する (ただし, この事実は均質化方程式が導出されると直ちに従う). そのため, 定義 2.1 のように変分不等式

を用いた弱解の定義を採用している．実際，弱形式を用いて弱解を定義する場合， u_{hom} が満たす均質化方程式を導出する際に，

$$|u_\varepsilon|^{p-2}u_\varepsilon \rightarrow |u_{\text{hom}}|^{p-2}u_{\text{hom}} \quad \text{weakly in } L^2(\partial D)$$

が要求されるが，一般に困難であることが正則性の観点から示唆される．

一方， u_{hom} が均質化方程式の弱形式を満たすことが判明すると，

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0_+} a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \langle f, u_\varepsilon \rangle - \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0_+} J(u_\varepsilon) \\ &\leq \langle f, u_{\text{hom}} \rangle - J(u_{\text{hom}}) = a_{\text{hom}}(u_{\text{hom}}, u_{\text{hom}}) \end{aligned}$$

となり，(9) が成り立つ．

注意 2.8 (均質化行列の定性的性質)．均質化行列 $A_{\text{hom}} \in L^\infty(D; \mathbb{R}^{d \times d})$ は， H -収束性に基づいて得られる観点から，斉次 Dirichlet 境界条件の場合と同等の性質を持つことに注意する．すなわち，明示的な表現は得られていないが，定数係数行列として取り扱うことができ，また， A の対称性により，

$$(10) \quad \underline{A}\xi \cdot \xi \leq A_{\text{hom}}\xi \cdot \xi \leq \overline{A}\xi \cdot \xi \quad \text{for all } \xi \in \mathbb{R}^d$$

が成り立つ．ここで， $\underline{A}$ 及び， $\overline{A}$ は， A の調和平均と算術平均を表す ([2, Theorem 1.3.14])．

3 最適解の存在性

本章では，定理 2.5 を用いて，最適解の存在性について考察する．目的汎関数 $F: \mathcal{U}_{\text{ad}} \rightarrow \mathbb{R}$ の非負値性から最小化列 $(\chi_\Omega^\varepsilon)$ を取ることができ， $\|\chi_\Omega^\varepsilon\|_{L^\infty(D)} \leq 1$ より，(再び $\varepsilon > 0$ と記述するが， (ε) のある部分列及び，密度 $\theta \in L^\infty(D; [0, 1])$ が存在し，

$$(11) \quad \chi_\Omega^\varepsilon \rightarrow \theta \quad \text{weakly-* in } L^\infty(D; [0, 1])$$

が成り立ち， $\theta \notin \mathcal{U}_{\text{ad}}$ である．しかしながら，注意 2.7 から目的汎関数の収束性が得られるため，(P) の緩和問題として，次の最小化問題，

$$(RP) \quad \inf_{(\theta, \kappa_{\text{hom}}) \in \mathcal{RD}} F^*(\theta, \kappa_{\text{hom}})$$

を考える．ここで， $F^*: L^\infty(D; [0, 1]) \times \mathbb{R}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ は

$$F^*(\theta, \kappa_{\text{hom}}) = \int_D \kappa_{\text{hom}}(x) \nabla u_{\text{hom}}(x) \cdot \nabla u_{\text{hom}}(x) \, dx$$

として与えられる緩和目的汎関数を表し, $u_{\text{hom}} \in K$ は均質化方程式の弱解, $\mathcal{RD}$ は

$$\mathcal{RD} := \left\{ (\theta, \kappa_{\text{hom}}) \in L^\infty(D; [0, 1] \times \mathbb{R}^{d \times d}) : \begin{array}{l} \text{there exists} \\ (\chi_\Omega^\varepsilon, \kappa_\Omega^\varepsilon) \in L^\infty(D; \{0, 1\} \times \{\alpha, \beta\}) \\ \text{such that} \\ \kappa_\Omega^\varepsilon = \alpha(1 - \chi_\Omega^\varepsilon) + \beta\chi_\Omega^\varepsilon, \\ \chi_\Omega^\varepsilon \rightarrow \theta \text{ weakly-* in } L^\infty(D; [0, 1]), \\ \kappa_\Omega^\varepsilon I \xrightarrow{H} \kappa_{\text{hom}} \text{ and } \|\theta\|_{L^1(D)} = V_{\text{max}} \end{array} \right\}$$

として与えられる緩和設計空間とする. このとき, 以下が成り立つ.

定理 3.1 (最適密度の存在定理). 定理 2.5 の仮定の下, (RP) の最適解 (最適密度) が少なくとも一つ存在する. さらに,

$$(12) \quad \inf_{\chi_\Omega \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} F(\chi_\Omega) = \min_{(\theta, \kappa_{\text{hom}}) \in \mathcal{RD}} F^*(\theta, \kappa_{\text{hom}})$$

が成り立ち, (RP) に対する任意の最適解は (P) の最小化列の極限によって特徴づけられる.

証明. 最小化問題 (P) に対する最小化列 $(\chi_\Omega^\varepsilon)$ を取ると, (11) が成り立つ. また, 注意 2.7 より, $A_\varepsilon = \kappa_\Omega^\varepsilon I$ として定理 2.5 を適用すると, (再び $\varepsilon > 0$ と記すが, (ε) のある部分列及び, $(\theta^*, \kappa_{\text{hom}}^*) \in L^\infty(D; [0, 1] \times \mathbb{R}^{d \times d})$ が存在して

$$\kappa_\Omega^\varepsilon I \xrightarrow{H} \kappa_{\text{hom}}^*, \quad \int_D \theta^*(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_D \chi_\Omega^\varepsilon(x) dx = V_{\text{max}}$$

が成り立ち,

$$(13) \quad \inf_{\chi_\Omega \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} F(\chi_\Omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} F(\chi_\Omega^\varepsilon) = F^*(\theta^*, \kappa_{\text{hom}}^*)$$

が得られる. 特に, この連続性は最小化列でなくとも成り立つことに注意する.

緩和問題 (RP) に対する最適解が存在することを示す. 緩和設計空間 $\mathcal{RD}$ の定義により, 任意の $(\theta, \kappa_{\text{hom}}) \in \mathcal{RD}$ に対して, $(\chi_\Omega^\varepsilon, \kappa_\Omega^\varepsilon) \in L^\infty(D; \{0, 1\} \times \{\alpha, \beta\})$ が存在し,

$$(14) \quad \chi_\Omega^\varepsilon \rightarrow \theta \quad \text{weakly-* in } L^\infty(D; [0, 1]) \quad \text{and} \quad \kappa_\Omega^\varepsilon I \xrightarrow{H} \kappa_{\text{hom}}$$

が成り立ち, 特に, [20, Proposition 2.1] より, $\|\chi_\Omega^\varepsilon\|_{L^1(D)} = V_{\text{max}}$ となる $(\chi_\Omega^\varepsilon)$ を構成することができる (すなわち, $\chi_\Omega^\varepsilon \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$). 従って, F の連続性によって

$$F^*(\theta, \kappa) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} F(\chi_\Omega^\varepsilon) \geq \inf_{\chi_\Omega \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} F(\chi_\Omega)$$

が成り立ち, (13) と組み合わせると, (RP) の最適解の存在性及び, (12) が得られる.

一方, $(\theta, \kappa_{\text{hom}}) \in \mathcal{RD}$ を (RP) に対する最適解とすると, ある $\kappa_\Omega^\varepsilon = \alpha\chi_\Omega^\varepsilon + \beta(1 - \chi_\Omega^\varepsilon)$ となる $\chi_\Omega^\varepsilon \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ が存在して, (14) が成り立ち, 部分列を取り直すことで $F^*(\theta, \kappa) =$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} F(\chi_\Omega^\varepsilon)$ が得られる. 従って, $(\chi_\Omega^\varepsilon)$ は (P) に対する最小化列であることが判明し, 証明が完了する. $\square$

注意 3.2. 定理 3.1 から (RP) は (P) と等価であり, 緩和することによって, 元の問題を変えないことが分かる. しかしながら, 以下について注意する必要がある.

- (i) 元の問題 (P) と同じ最小値を与える (RP) の最適解 (最適密度) が少なくとも 1 つ存在することを主張するものであり, 最適解の一意性や局所解の存在性については言及していない.
- (ii) 最適密度を用いた材料表現では, 拡散係数が $\alpha > 0$ でも $\beta > 0$ でもない中間領域を認めることを意味する. 従って, 元の問題の観点から, 明瞭な材料表現を行うために, いわゆるグレースケール問題が生じない (RP) の最小値に一致するような $\chi_\Omega \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ を構成する必要がある.
- (iii) 最適密度 θ^* は, (11) から $\theta^* \notin \mathcal{U}_{\text{ad}}$ となり, 不良設定問題であることが示唆され, [2] では, 自明な最適解しか構成できないような反例が構成されている. 一般に, 元の問題に対する最適解は存在しないため, 良設定問題として取り扱うためには何らかの正則化や幾何学的な制約が要求される. [7] では, 材料間の周長に対する制約を加えることで最適解の存在定理が証明されている.

4 形状解析

本章では, 拡散係数が $\alpha > 0$ と $\beta > 0$ の材料のみで緩和問題 (RP) の最小値に一致するような $\chi_\Omega \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ の構成方法について考察する.

4.1 感度解析

本節では, (RP) の最適密度の構成方法について考察する. 定理 3.1 及び, (10) によって, $F^*(\theta^*, \kappa_{\text{hom}}^*) = \min_{(\theta, \kappa_{\text{hom}}) \in \mathcal{RD}} F^*(\theta, \kappa_{\text{hom}})$ となる $(\theta^*, \kappa_{\text{hom}}^*) \in L^\infty(D; [0, 1] \times \mathbb{R}^{d \times d})$ が存在し, $F^*(\theta^*, \kappa_{\text{hom}}^*) \leq F(\theta)$ が成り立つ. そこで, 次の最小化問題,

$$(15) \quad \min_{\substack{\theta \in L^\infty(D; [0, 1]), \\ \|\theta\|_{L^1(D)} = V_{\text{max}}}} F(\theta)$$

を考える. このとき, 設計感度 $F'(\theta)$ に対して以下が成り立つ.

命題 4.1 (設計感度). 関数 $u_\theta \in K$ 及び, $v_\theta \in H^1(D)$ をそれぞれ状態方程式,

$$(16) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa_\theta \nabla u_\theta) = f & \text{in } D, \\ -\kappa_{\text{hom}} \nabla u_\theta \cdot \nu = |u_\theta|^{p-2} u_\theta & \text{on } \partial D, \end{cases}$$

及び, 随伴方程式,

$$(17) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa_\theta \nabla v_\theta) = f & \text{in } D, \\ -\kappa_\theta \nabla v_\theta \cdot \nu = (p-1)|u_\theta|^{p-3}u_\theta v_\theta + p|u_\theta|^{p-2}u_\theta & \text{on } \partial D \end{cases}$$

の弱解とする. ただし, $\kappa_\theta = \alpha(1-\theta) + \beta\theta \in L^\infty(D; [\alpha, \beta])$ とする. このとき,

$$(18) \quad F'(\theta)(x) = -(\beta - \alpha) \nabla u_\theta(x) \cdot \nabla v_\theta(x) \quad \text{for a.e. } x \in D$$

が成り立つ.

証明. 汎関数 F と等価な Lagrangian $\mathcal{L} : L^\infty(D; [0, 1]) \times K \times H^1(D) \rightarrow \mathbb{R}$ として

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta, u_\theta, v) &= F(\theta) + \int_D \kappa_\theta(x) \nabla u_\theta(x) \cdot \nabla v(x) \, dx \\ &\quad + \int_{\partial D} |u_\theta|^{p-2} u_\theta(x) v(x) \, dx - \int_D f(x) v(x) \, dx \end{aligned}$$

を導入する. このとき, 任意の $\psi \in H^1(D)$ に対して,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{u_\theta} \mathcal{L}(\theta, u_\theta, v), \psi \rangle_{H^1(D)} &= \int_D f(x) \psi(x) \, dx - \int_{\partial D} p|u_\theta|^{p-2} u_\theta(x) \psi(x) \, d\sigma \\ &\quad + \int_D \kappa_\theta(x) \nabla \psi(x) \cdot \nabla v(x) \, dx + \int_{\partial D} (p-1)|u_\theta|^{p-3} u_\theta(x) \psi(x) v(x) \, d\sigma \end{aligned}$$

より, $\nabla_{u_\theta} \mathcal{L}(\theta, u_\theta, -v_\theta) = 0$ から $F'(\theta) = \nabla_\theta \mathcal{L}(\theta, u_\theta, -v_\theta)$ に注意すると,

$$F'(\theta)(x) = -(\beta - \alpha) \nabla u_\theta(x) \cdot \nabla v_\theta(x) \quad \text{for a.e. } x \in D$$

が得られ, 証明が完了する. □

注意 4.2 (最適性). 体積制約汎関数として $G(\theta) = \|\theta\|_{L^1(D)} - V_{\max}$ と定め, $F(\theta) + \lambda G(\theta)$ として無制約問題に置き換えると, 初期密度 $\theta_0 \in L^\infty(D; [0, 1])$ に対して,

$$(19) \quad \theta_n = \theta_{n-1} - k(F'(\theta_{n-1}) - \lambda_{n-1}) \quad \text{for } k > 0$$

として $|\theta_n| \leq 1$ かつ体積制約を満たすように Lagrange 乗数 λ_n と θ_n を更新すると, (15) の (局所) 最適密度の候補が構成される. 例えば, ∇v_θ を ∇u_θ で置き換えることができると, [5] に基づき (15) の最適密度の候補を (RP) の最適密度として特徴づけることができ, この置き換えは少なくとも $|f|$ が十分小さいときに正当化される. しかしながら, 注意 3.2 の (ii) で指摘したように, (19) による密度の更新方法はグレースケール問題を引き起こすため, 適切に二値化する必要がある.

4.2 非線形拡散に基づくレベルセット法

本節では、最小化問題 (15) の最適密度 θ^* に対して、 $F(\theta^*) = F(\chi_\Omega)$ となるような $\chi_\Omega \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ について考察する。グレースケール問題を解決する方法の一つとしてレベルセット法 ([3, 4]) が知られており、レベルセット法では、次のレベルセット関数、

$$(20) \quad \phi(x) \begin{cases} > 0, & x \in \Omega, \\ = 0, & x \in \partial\Omega, \\ < 0, & x \in D \setminus \overline{\Omega} \end{cases}$$

が導入される。このとき、(20) を用いると $\chi_\Omega \in L^\infty(D; \{0, 1\})$ は

$$(21) \quad \chi_\phi(x) := \chi_{[\phi \geq 0]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi(x) \geq 0, \\ 0 & \text{if } \phi(x) < 0 \end{cases}$$

として置き換えられる。このとき、 $F(\theta^*)$ に達成するような (20) が構成できると、(21) を用いた材料表現を行うことでグレースケールを含まない領域を構成できる。すなわち、目的汎関数が減少するようなレベルセット関数の更新方法を考案すれば十分である。本稿では、注意 3.2 の (iii) 及び、勾配流の考え方にに基づき、正則化項として目的汎関数に Dirichlet エネルギーを摂動させた次の非線形拡散方程式、

$$(22) \quad \begin{cases} \partial_t \phi^q - \tau \Delta \phi + F'(\phi) = 0 & \text{in } D \times (0, +\infty), \\ \phi|_{\partial D} = 0, \quad \phi|_{t=0} = \phi_0 \in L^\infty(D) \end{cases}$$

を用いてレベルセット関数を更新するものとする。特に、 $0 < q < 1$ とした多孔質媒体方程式を用いることにし、拡散係数の退化性を応用することにより、材料配置を数値的に更新していく過程で材料間の界面の振動を抑えることが可能になる (詳細は [22] を参照)。

4.3 数値アルゴリズム

本節では、(22) に基づいてレベルセット関数を更新し、材料配置を決定するための数値アルゴリズムについて記述する。ここでは、(15) の最小値に近づくような二相構造を構成するために次の最小化問題、

$$(23) \quad \inf_{\phi \in V} \left\{ F(\phi) := \int_D \kappa_\phi(x) \nabla u_\phi(x) \cdot \nabla u_\phi(x) dx \right\}$$

を考える。ここで、 $\kappa_\phi := \alpha(1 - \chi_\phi) + \beta\chi_\phi$ 、状態変数 u_ϕ は κ_θ を κ_ϕ で置き換えた (16) の弱解、 $V := \{\phi \in H^1(D : [-1, 1]) : G(\phi) := \|\chi_\phi\|_{L^1(D)} - V_{\max} = 0\}$ とする。特に、 $\mathcal{L}(\phi, \lambda) := F(\phi) + \lambda G(\phi)$ として (23) 無制約問題に置き換えて数値解析を行うものとする。具体的な手順は以下の通りである。

Step 1. 初期レベルセット関数 ϕ_0 及び, 体積制約値 $V_{\max}$ を指定する. 本稿では, $\phi_0 \equiv 1$, $V_{\max} = 0.45|D|$ とする.

Step 2. 状態変数 u_ϕ を決定する. ここでは, $f \geq 0$ とし, Newton-Raphson 法に基づき, 任意の $\psi \in K$ に対して,

$$\int_D \kappa_\phi(x) \nabla u_{m+1}(x) \cdot \nabla \psi(x) dx + \int_{\partial D} \tilde{u}_{m+1}^{p-1}(x) \psi(x) d\sigma = \int_D f(x) \psi(x) dx$$

を m 回解く. ただし, $\tilde{u}_{m+1}^r = u_m^r + r u_m^{r-1}(u_{m+1} - u_m)$, $r > 0$ とし, 本稿では $m = 5$, $\alpha = 0.01$, $\beta = 1$ として取り扱う.

Step 3. 随伴変数 v_ϕ を決定する. ここで, v_ϕ は κ_θ と u_θ をそれぞれ κ_ϕ と u_ϕ で置き換えた (17) の解を意味する.

Step 4. 目的汎関数 $F(\phi_n)$ と体積制約汎関数 $G(\phi_n)$ を計算する.

Step 5. 収束判定を行う. 本稿では,

$$\|\phi_n - \phi_{n-1}\|_{L^\infty(D)} \leq \eta, \quad |G(\phi_n)| \leq \eta$$

を収束条件として採用し, $\eta = 1.0 \times 10^{-2}$ を選ぶ. 収束条件を満たさない場合は, Step 6 に進む.

Step 6. 非線形拡散方程式 (22) を解く. 本稿では, 拡張 Lagrange 法及び, (18) に基づいて, $\phi_n = \phi(x, n\Delta t)$ として時間離散化した (形式的な) 線形化方程式,

$$(24) \quad \int_D q|\phi_n(x)|^{q-1} \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{\Delta t}(x) \psi(x) dx + \int_D \tau \nabla \phi_{n+1}(x) \cdot \nabla \psi(x) dx \\ = \int_D (\kappa_{\phi_n}(x) \nabla u_{\phi_n}(x) \cdot \nabla v_{\phi_n}(x) - \lambda) \psi(x) dx \quad \text{for all } \psi \in H_0^1(D)$$

を解く. ただし, u_{ϕ_n} は Step 2 で解いた u_{m+1} を表す.

Step 7. 線形化方程式 (24) の解を $|\phi_{n+1}| \leq 1$ として制限し, レベルセット関数を $\phi_n = \phi_{n+1}$ として更新し, Step 2 に戻る.

4.4 数値結果

前節の数値アルゴリズムに基づいて汎用有限要素解析ソフトウェア FreeFEM++ を用いて計算した結果を図 1, 図 2 に示す. 図 1 の (a), (b) から, $f \geq 0$ を定数倍することによって, 最適化された材料配置が変更されていることが分かる. この結果は, 図 1 の (c), (d) が示す Robin 境界条件の場合とは大きく異なる結果であり, 境界条件の線形性と非線形性の違いが材料配置へ影響を及ぼすことを意味する. また, 初期レベルセット関数として $\phi_0 \equiv 0$ を選んでいる観点から, 体積制約を満たすために目的汎関数はまず増大し, その後減少して収束していることが図 2 から分かる. 特に, (15) の目的汎関数 $F(\theta_n)$ の収束値と同程度の値に収束している観点から, 二相の近似材料配置が構成できていることが分かる.

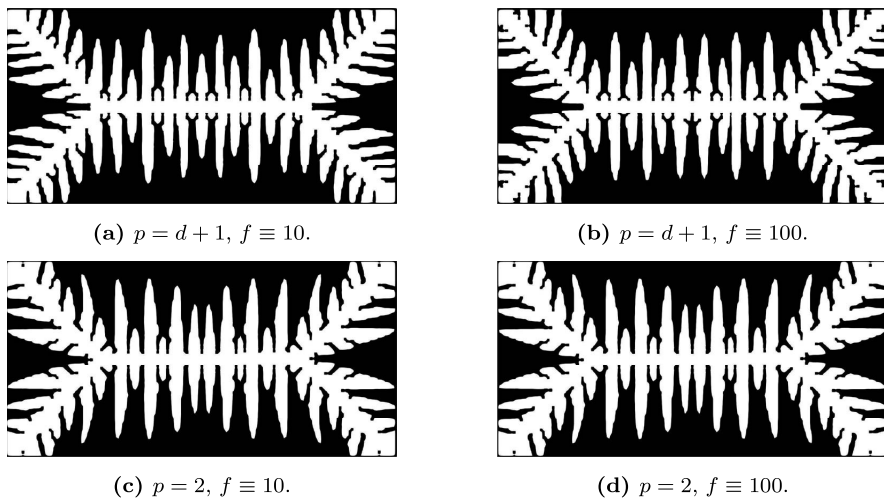


図 1: 数値解析例 (白色 : $[\chi_{\phi_n} = 0]$, 黒色 : $[\chi_{\phi_n} = 1]$).

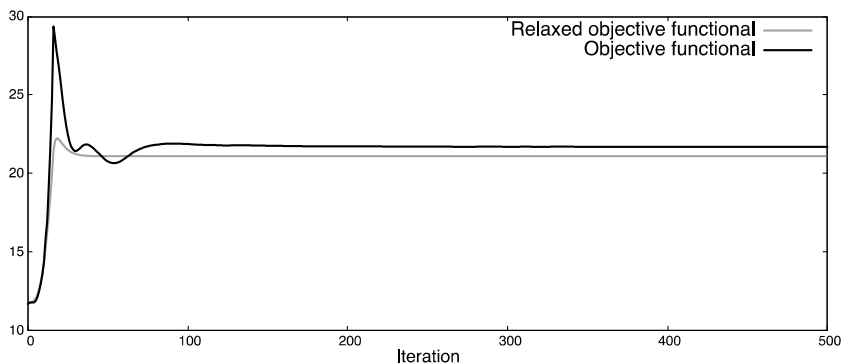


図 2: 目的汎関数 $F(\phi_n)$ と緩和目的汎関数 $F(\theta_n)$ の収束履歴 ($p = d + 1, f \equiv 10$).

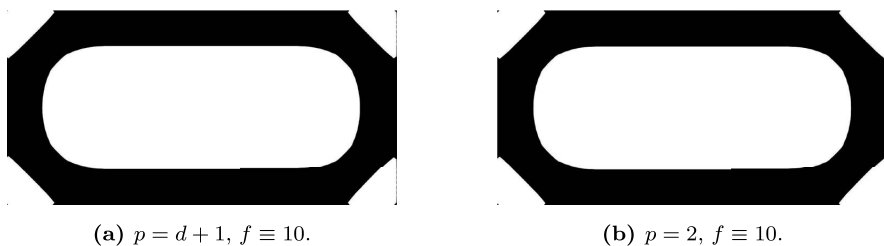


図 3: 数値解析例 ($\kappa_\phi = \alpha\chi_\phi + \beta(1 - \chi_\phi)$ に変更した場合).

注意 4.3 (数値解析の妥当性). 図 3 のように $\kappa_\phi \in L^\infty(D : \{\alpha, \beta\})$ の定義を変更すると, 境界条件の線形性や非線形性に依らず同じ材料配置が得られる. また, [5, Fig. 23] に類似の材料配置が得られている観点から数値解析の妥当性が示唆される. レベルセット関数の更新式 (24) は, 目的汎関数に対する Dirichlet エネルギーの摂動に基づいている観点から, $\tau > 0$ の値をより小さくすることによって, 図 2 の近似精度を向上することができる. 一方, $\tau > 0$ を小さくすることで図 1 で得られる材料配置は実際に再現することが困難な材料配置となることに注意する.

5 結論

本稿では, (P) に対する最小化問題について考察し, 以下の結果が得られた.

- 非線形境界条件を伴う楕円型方程式に対する均質化定理を証明した.
- 緩和問題 (RP) の最適解に対する存在定理を証明し, 緩和問題が元の問題 (P) と等価であることを明らかにした.
- 非線形拡散に基づくレベルセット法を用いて, 緩和問題に対するグレースケールを含まない近似材料配置を得るための数値アルゴリズムを構築した.
- 最適化された材料配置は, f を定数倍することによって変化することを数値的に明らかにし, Robin 境界条件の場合と比較することで, 非線形問題特有の性質であることを数値的に示した.

参考文献

- [1] G. Allaire, Homogenization and two-scale convergence, SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), 1482–1518.
- [2] G. Allaire, *Shape optimization by the homogenization method*, Vol. 146 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York (2002).
- [3] G. Allaire, F. Jouve, A.M. Toader, A level-set method for shape optimization, C. R. Acad. Sci. Paris **334** (2002), 125–1130.
- [4] G. Allaire, F. Jouve, A.M. Toader, Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, J. Comp. Phys. **194** (2004), 363–393.
- [5] G. Allaire, L. Cavallina, N. Miyake, T. Oka, T. Yachimura, The homogenization method for topology optimization of structures: old and new, Interdiscip. Inform. Sci. **25** (2019), 75–146.
- [6] G. Allaire, A. Münch, F. Periago, Long time behavior of a two-phase optimal

- design for the heat equation, *SIAM J. Control Optim.* **48** (2010), 5333–5356.
- [7] L. Ambrosio, G. Buttazzo, An optimal design problem with perimeter penalization, *Calc. Var.* **1** (1993), 55–69.
 - [8] M.P. Bendsøe, N. Kikuchi, Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.* **71** (1988), 197–224.
 - [9] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, Studies in Mathematics and Its Applications, vol. 5, North-Holland, Amsterdam, 1978.
 - [10] D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso, The periodic unfolding method in homogenization, *SIAM J. Math. Anal.* **40** (2008), 1585–1620.
 - [11] M.P. Bendsøe, O. Sigmund, *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
 - [12] A. Braides, Homogenization of some almost periodic coercive functional, *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat.* **9** (1985), 313–321.
 - [13] H. Brezis, *Functional Analysis. Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext. Springer, New York (2011).
 - [14] D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso, Periodic unfolding and homogenization, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **335** (2002), 99–104.
 - [15] D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso, The periodic unfolding method in homogenization, *SIAM J. Math. Anal.* **40** (2008), 1585–1620.
 - [16] A. Dall’Aglia, F. Murat, A corrector result for H-converging parabolic problems with time-dependent coefficients, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **25** (1997), 329–373.
 - [17] J.-L. Lions, *Optimal control of systems governed by partial differential equations*, Translated from the French by S. K. Mitter, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band **170** Springer-Verlag, New York-Berlin 1971.
 - [18] F. Murat, L. Tartar, Calcul des Variations et Homogénéisation, *Les Méthodes de l’Homogénéisation Théorie et Applications en Physique*, Coll. Dir. Etudes et Recherches EDF, **57**, Eyrolles, Paris, 319–369 (1985).
 - [19] F. Murat, L. Tartar, H-convergence, Topics in the mathematical modelling of composite materials, *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.* **31** (1997), 21–43.
 - [20] A. Münch, P. Pedregal, F. Periago, Relaxation of an optimal design problem for the heat equation, *J. Math. Pures Appl.* **89** (2008), 225–247.
 - [21] G. Nguetseng, A general convergence result for a functional related to the theory

- of homogenization, *SIAM J. Math. Anal.* **20** (1989), 608–623.
- [22] T. Oka, T. Yamada, Topology optimization method with nonlinear diffusion, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **408** (2023), 115940.
- [23] G.C. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan, Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients, In: *Random fields*, vol. I, II (Esztergom, 1979), vol. 27 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, North-Holland, Amsterdam, 835–873, 1981.
- [24] M. Ptashnyk, Two-scale convergence for locally periodic microstructures and homogenization of plywood structures, *Multiscale Model. Simul.* **11** (2013), 92–117.