

簡略化した大気循環モデルにおける予測可能性の時間変動

山根 省三・余田 成男

TEMPORAL VARIATIONS OF PREDICTABILITY IN A SIMPLIFIED ATMOSPHERIC CIRCULATION MODEL

By Shozo YAMANE and Shigeo YODEN

Synopsis

Relations between temporal variations in the atmospheric predictability and quasi-stationary (QS) states, such as weather regimes, is investigated both with low-dimensional dynamical systems and with a simplified atmospheric circulation model introduced by Legras and Ghil (1985). As a measure of the predictability, we use the Lorenz index α , introduced by Lorenz (1965), which gives an ensemble average of the perturbation growth rate for a prescribed time interval. As to QS states, we apply the concept established by Mukougawa (1988).

In the one-dimensional dynamical system there is the obvious relation that α increases monotonically during the QS state. However, in the multi-dimensional dynamical system there is no obvious relation between α and the QS state. Considering the trajectory only on the attractor, each QS state has its own relationship. In some chaotic solutions of the Legras and Ghil model there is the same relation as in the one-dimensional dynamical system.

1. はじめに

数値天気予報モデルの予報誤差は大気の状態に依存して変動することが知られている¹⁾。その変動の力学的構造はまだ十分には解明されていないが、大気循環変動の特徴の一つである天候レジームとの関連が考えられている。

Legras and Ghil²⁾ (以下 LG と呼ぶ) は低次元の大気循環モデルを用いて天候レジームと予測可能性の変動について調べた。彼らは、モデルのカオス解に見られる準定常な状態が相空間内で不安定定常解や“ghost”と呼ばれる定常解の痕跡に近いことを示し、これらが現実大気为天候レジームの対応物であると考えた。この考えは Mukougawa³⁾ により一般化され、“ghost”は非定常極小点として数学的に定義された。LG はまた、線型化方程式で係数行列の最大固有値を求めて予測可能性の指標とし、準定常状態の前後で予測可能性が変化することを示した。

Mukougawa, Kimoto and Yoden⁴⁾ は、3次元のロレンツモデルの間欠性カオス解を具体例として、準定常状態と予測可能性の関連を調べた。ポアンカレ断面を利用して準定常状態を定義し、予測可能性の指標として平均的な誤差成長率であるロレンツインデックスを用いて、準定常状態に入る段階でロレンツインデックスが極小になるという関係が存在することを示した。しかし、同グループによる現業の数値天気予報モデルを用いた誤差成長率の変動に関する研究⁵⁾では、ブロッキングレジームになる前に予報誤差が大きくなる事例を

報告している。

本研究では、これらの研究を進展させて、非線型大気モデルにおける準定常状態の力学を調べて予測可能性との関連を明らかにする。まず、低次元力学系を具体例として、極小点（定常点または非定常極小点）のまわりでの誤差成長率の変動を考察する。そして、25 次元の LG モデルのカオス解で、ロレンツインデクスと極小点との関係を調べる。

2. 極小点とロレンツインデクスの理論的關係

2.1 定義

n 次元の力学系を考える。

$$\dot{x} = f(x) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ であり、 $(\cdot)$ は時間微分演算子 d/dt を表わしている。肩文字 $(\cdot)^T$ は転置を意味する。

極小点とは、 n 次元位相空間中で $\|x\|$ の値が極小となる点のことである³⁾。ただし、 $\|a\| = (a^T a)^{1/2}$ とする。極小点は $\|x\| = 0$ の定常点と、 $\|x\| \neq 0$ の非定常極小点に分類される。

Lorenz⁶⁾が導入した局所的な誤差成長率の指標をロレンツインデクスと呼んでいる^{4), 5), 7)}。以下に、ロレンツインデクスの定義を簡単に記す。

方程式 (1) を満たす解 $x(t)$ に対して、微小な擾乱（誤差） $y(t)$ の時間発展を考える。

$$\dot{y} = Jy \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 J はヤコビアン行列である ($J_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$)。方程式 (2) を $t = t_0$ から $t = t_0 + \tau$ まで積分すると、

$$y(t_0 + \tau) = M(x(t_0), \tau) y(t_0) \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。ここで、 $M(x(t_0), \tau)$ は誤差行列である⁶⁾。ロレンツインデクス $\alpha(x(t_0), \tau)$ はランダムに分布した初期擾乱の評価時間 τ 後の成長率 $\|y(t_0 + \tau)\| / \|y(t_0)\|$ をアンサンブル平均した値として定義される。これは、擾乱の共分散行列 MM^T のトレースに相当する。

$$\alpha(x(t_0), \tau) \equiv (n^{-1} \text{tr}[MM^T])^{1/2} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ロレンツインデクス α は初期状態 $x(t_0)$ と評価時間 τ に依存する。ただし、線型系の場合には、ヤコビアン行列 J が一定なので、ロレンツインデクスは初期状態に依存しない。

2.2 1 次元系の場合

評価時間 τ を一定として、ロレンツインデクス $\alpha(x(t_0), \tau)$ と極小点との関連を考察する。低次元の力学系を用いて、極小点の近くではロレンツインデクスが初期状態 $x(t_0)$ にどのように依存しているかをみる。1 次元系の場合、(3) は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} y(t_0 + \tau) &= y(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t_0 + \tau} \frac{df}{dx} dt\right) = y(t_0) \exp\left(\int_{f(x(t_0))}^{f(x(t_0 + \tau))} \frac{df}{f}\right) \\ &= y(t_0) \frac{f(x(t_0 + \tau))}{f(x(t_0))} = y(t_0) \frac{\dot{x}(t_0 + \tau)}{\dot{x}(t_0)} \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

よって、ロレンツインデクス α について次の関係式が得られる。

$$\alpha(x(t_0), \tau) = \frac{\|y(t_0 + \tau)\|}{\|y(t_0)\|} = \frac{\dot{x}(t_0 + \tau)}{\dot{x}(t_0)} \quad \dots\dots\dots (6)$$

これより、解 $x(t)$ が (非定常) 極小点に近づいているときは $\alpha < 1$ であり、離れているときは $\alpha > 1$ であることが分かる。従って、解 $x(t)$ が極小点に近づいてやがて離れるならば、その期間において α は単調に増加する傾向にある⁴⁾。

2.3 2次元系の場合

2次元系の場合には、(6) のような一般的な関係式は得られない。そこで、具体例として次の力学系を考える。

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^2 - 2x_1x_2 \\ x_2^2 - 2x_1x_2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

これは、定常点 $(0, 0)^T$ の近傍での α について考察するために人為的に作った2次の非線形項を含む力学系である。この力学系には、体積変化率一定の散逸特性 ($\nabla \cdot f = -0.2$) を持たせている。

Fig. 1(a) の等値線は2次元平面上での $\alpha(\tau = 0.5)$ の分布を示している。線型系であれば α は一様であるが、この場合には非線形項により、第2象限が小さく第4象限が大きな一方向に傾いた分布となっている。初期値を $(\pm 0.01, \pm 0.1)^T$ とする4つの解 $x(t)$ を $0 \leq t \leq 2.4$ の範囲で示す (**Fig. 1(a)** の点線：1~4)。いずれの解もまず極小点 (定常点) に近づき、やがて離れていく。この期間について α と極小点からの距離との関係を **Fig. 1(b)** に示す。解1は1次元系の場合と同様で、解が極小点に近づき離れる間 α は単調に増加している。いっぽう、解3では逆に単調減少する α となっている。また、解2が最も極小点に近づいた辺りで、 α は極大を示し、解4では極小となる。

従って、2次元系では前節で得た1次元系の α と極小点との一般的な関係は存在しない。この結論は多次元系でも同様である。

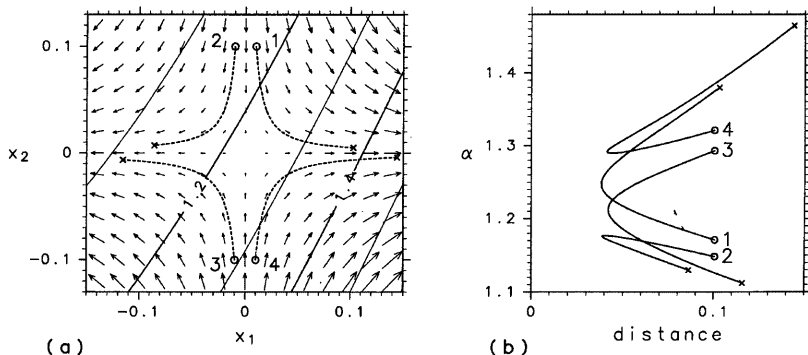


Fig. 1 (a) Distribution of the Lorenz index α for $\tau = 0.5$ in a two-dimensional nonlinear dynamical system. Arrows show the flowfield of (7). In each quadrant a solution $x(t)$ is drawn with a dashed curve from an initial value $(\pm 0.01, \pm 0.1)^T$ denoted by $\bigcirc$ to $t = 2.4$ denoted by $\times$. (b) Relation between the Lorenz index $\alpha(\tau = 0.5)$ and the distance of the solution from the stationary solution $(0, 0)^T$. Numbers and markers are same as those indicated in (a).

3. Legras and Ghil モデルによる解析

3.1 モデルの概要

LG モデルの支配方程式は、強制と散逸と表面地形効果を含む球面上の相当順圧渦度方程式であり、その無次元化した方程式は次で表される。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 - r^{-2})\phi + \rho J[\phi, \nabla^2 \phi] + J[\phi, \mu(1+h)] = \alpha \nabla^2(\phi^* - \phi) \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 λ : 経度、 μ : サイン緯度、 t : 時刻、 $\phi(\lambda, \mu, t)$: 流線関数、 $\phi^*(\mu)$: 強制流線関数、 $h(\lambda, \mu)$: 表面地形、 ∇^2 : 水平ラプラシアン、 $J[a, b]$: ヤコビアン、 r : 変形半径、 α^{-1} : 緩和時間、 ρ : 強制の強さを表す無次元数である。

従属変数を球面調和関数で展開し、全波数9で三角波数切断(T9)を行なってスペクトルモデルを作る。更に、流れ場の赤道対称性と経度方向の π 周期性を仮定して系の自由度を小さくする。これによりモデルは実25次元の力学系となる。低次モデルなので非線型項は相互作用係数法で計算する。

強制は $\phi^* = -\kappa\mu^3$ の形で与える。これは緯度約 50° で極大値を持つ帯状流強制で、係数 κ の値は $\rho = 0.2$ のときの強制帯状流の極大値が次元つきで 60 ms^{-1} となるように固定する。地形は $h = 4h_0\mu^2(1 - \mu^2)\cos 2\lambda$ で与え、その振幅は $h_0 = 0.1$ とする。他の定数もLGと同じ値を用いる: $r' = 1100 \text{ km}$, $\alpha' = 0.05 \text{ 日}^{-1}$ (プライムは次元つきの量を意味する)。強制の強さ ρ を実験パラメータとして $0.1 \leq \rho \leq 0.3$ の範囲で変化させ、解の依存性や予測可能性の変動の特徴を調べることにする。

3.2 時間発展漸近解の力学的構造 (×0.01)

$0.1 \leq \rho \leq 0.3$ のパラメータ領域で系の極小点を Mukougawa³⁾と同じ方法により求めた。Fig. 2 は得られた分岐図である。非定常極小点に関しては、実際には40以上の枝が得られたが、ここでは以下に示す時間発展漸近解に比較的距离が近い4つの枝のみを示している。定常点の枝S6とS7の極限点から分岐した非定常極小点の枝M4が、LGの得た“ghost”に相当していることが分かる。

ルンゲ・クッタ・ギル法により数値的に時間積分を行ない、時間発展解の漸近的な振舞いを調べた。得られた漸近解を分類した結果を Fig. 3 に示す。 ρ が小さいときには解は安定定常解S1へ漸近する。 ρ を大きくしていくと、あるところでホップ分岐が起こり周期解が出現する。もう一度ホップ分岐が起こって準周期解となり、そして複雑な過程を経てカオス解となる。さらに ρ を増加させると、初期値に依存して安定定常解S6と準周期解の2つの異なる漸近解が存在するパラメータ領域 ($0.172 < \rho$

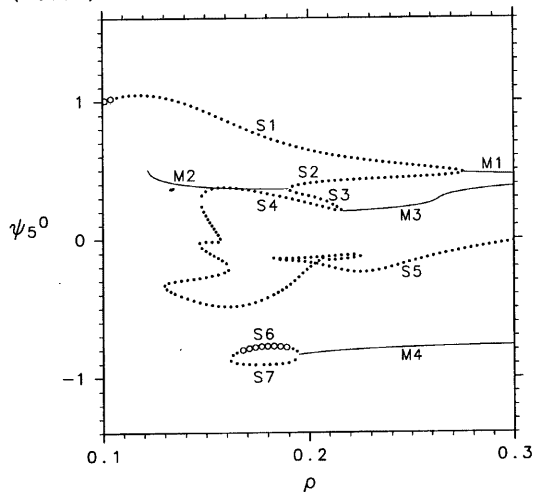


Fig. 2 Dependence of minimum points on ρ . The ordinate refers to ψ_5^0 which is one of 25 variables. Minimum points are classified into stationary solutions (○: stable, ×: unstable) or non-stationary minimum points (solid curve). Some branches are labeled with S (stationary solutions) or M (non-stationary minimum points).

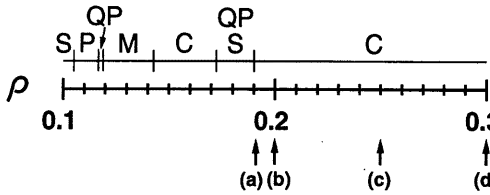


Fig. 3 Dependence of asymptotic solutions on ρ . Symbols represent, respectively, S : stable stationary solution, P : periodic solution, QP : quasi-periodic solution, M : multiple stable solutions, and C : chaotic solution. Points marked with (a) ~ (d) indicate the values of ρ for which asymptotic solutions are investigated in detail ; (a) $\rho = 0.191$, (b) 0.2, (c) 0.25, (d) 0.3.

< 0.190) となり, $\rho > 0.190$ では再びカオス解となる。

Fig. 3 の (a) ~ (d) の 4 つのカオス解 ($\rho = 0.191$ (a), 0.2 (b), 0.25 (c), 0.3 (d)) について詳しい解析を行なった。 ψ_s^0 の時系列 (一部) とそのパワースペクトル密度を Fig. 4 に示す。(a) のカオス解の時間変動はホモクリニック的な軌道として特徴づけられる。すなわち, 数百日の周期で不安定定常点 S6 に近づきやがて離れるという軌道をほぼ繰り返し続けている。変動のスペクトルは, ρ とともに高周波数領域のパワーが増加する傾向がある。より複雑なカオス解 (b) ~ (d) でも, 極小点に近づき離

れるという軌道の振る舞いが残っている。不安定定常点 S6 が非定常極小点 M4 に取って代わられている。

3.3 極小点とロレンツ インデックスの関係

Fig. 4 に示した (a) ~ (d) のカオス解に対して, 1 日毎に初期状態 $x(t_0)$ をとりいくつかの評価時間 τ に対してロレンツインデックス α を求めた。得られた α の統計量を Fig. 5 に示す。 α の幾何平均 (実線)

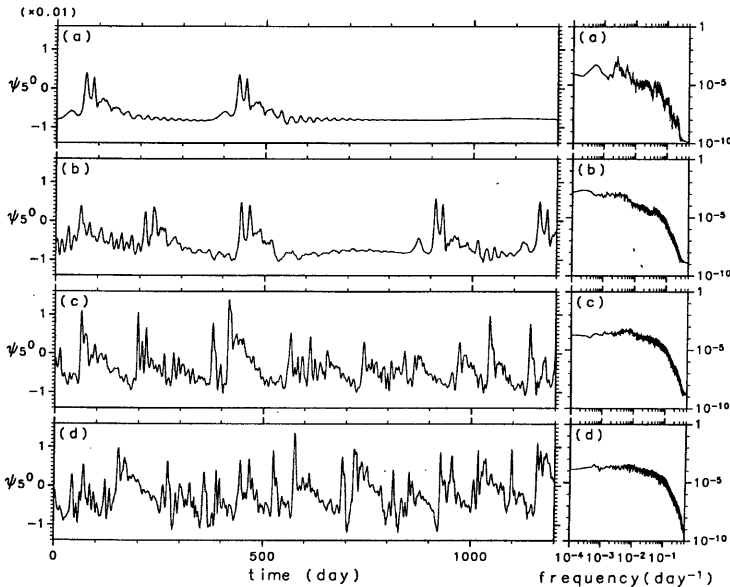


Fig. 4 Temporal variation and power spectral density of $\psi_s^0(t)$. (a) ~ (d) are same as those indicated in Fig.3.

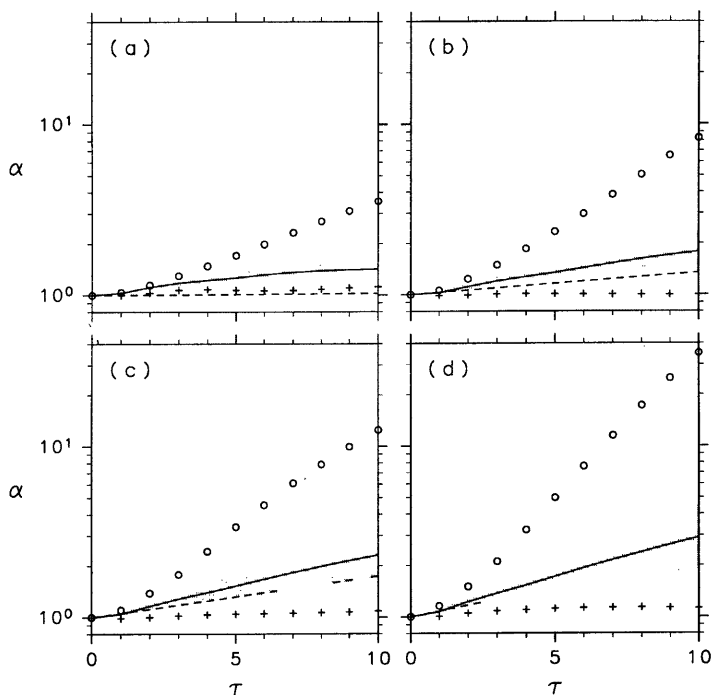


Fig. 5 Statistics of time-variations of the Lorenz index α along the solution of 9950-day period. The abscissa denotes the time interval τ . The geometric mean is indicated by a solid curve. The shaded area is the range of mean ± 1 standard deviation. Symbols $\bigcirc$ and $\times$ show the maximum and the minimum, respectively. The error growth of the largest Lyapunov exponent is indicated by a broken line. (a)~(d) are same as those indicated in Fig.3.

は評価時間 τ に対して指数関数的な成長を示している。これはカオス解特有の性質と考えられるが、短かな評価時間での誤差成長は著しく、最大リアプノフ指数の成長率（破線）よりも大きくなっている。ここで、リアプノフ指数は Shimada and Nagashima⁸⁾ の方法を用いて求めている。また、これらのカオス解では、 ρ とともに平均的な α が大きくなる性質があることが分かる。

ロレンツインデックスは初期状態に依存して時間的に変動する。Fig. 5 には解析期間内における α の最大値、最小値、および標準偏差も示している。それぞれのカオス解で α が大きく変動し、変動幅が評価時間とともに大きくなっている。

Fig. 6 はこれらのカオス解のアトラクタ上でのロレンツインデックス α ($\tau = 3$ 日) の分布を示したものである。(a) の場合、軌道は反時計まわりで、極小点 (S6) に近づきやがて離れるという運動を繰り返している。軌道が極小点に近づいているときに α が小さく、離れているときには大きい。(b)~(d) のカオス軌道でも、(a) と同様に反時計まわりに極小点 (M4) への接近を繰り返す構造が存在する。 α と極小点との関係も (a) と同様の特徴が残っている。

このような α と極小点との関係をより明瞭に示すために、それぞれのカオス解で極小点に最も近づいた

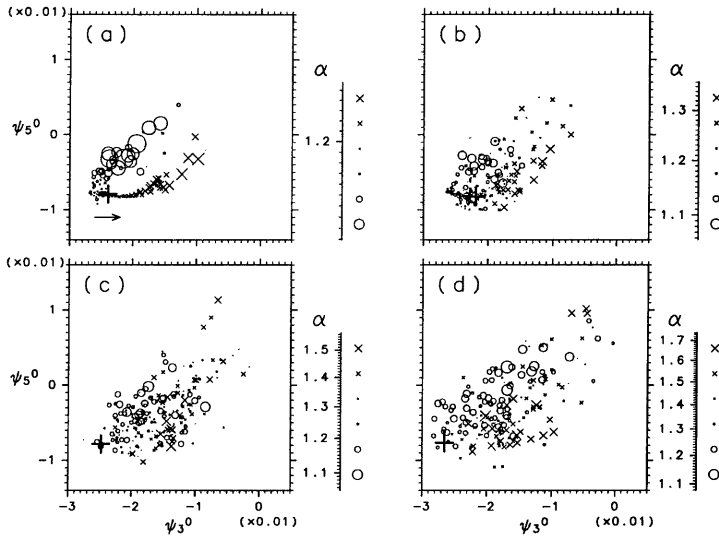


Fig. 6 Distribution of the Lorenz index α on the asymptotic solutions. The markers and their size represent the value of α . The solutions are projected onto the ψ_3^0 - ψ_5^0 plane in 25 dimensional phase space. The symbol + denotes the minimum point; (a) S6, (b) ~ (d) M4. Time interval τ of the Lorenz index is 3 days. The arrow in (a) shows the direction of the trajectory. (a) ~ (d) are same as those indicated in Fig.3.

10の期間だけを抽出し、 α と極小点からの距離との関係求めた（Fig. 7）。 ρ が大きくなると極小点に近づくにくくなるが、いずれの場合においても軌道が極小点に近づいて離れる間 α は増加する傾向にある。このような関係は1次元力学系で得られたものと同様であり、また、前節でみた2次元力学系の場合にはFig. 1の解1と同様の関係である。

4. 考察

1次元力学系では、軌道が極小点に近づき離れる間 α は単調に増加するが、2次元以上の力学系になると α と極小点との間には特定の関係が存在しないことを2節で示した。ところが、25次元のLGモデルにおけるカオス解では、軌道が極小点に近づき離れる間 α は増加する傾向が見られる（Fig. 7）。これは1次元力学系と同様の関係である。

このことは次のように考えられる。カオス解の軌道は、相空間内のランダム運動とは異なり、ある決まったアトラクタ上に限られる。このため、極小点へ近づき離れる方向はおおよそ決まっており、その方向に沿った α と極小点の関係のみが顕著に現れることになる。例えば、Fig. 1(b)の1~4の4つ軌道は対等と見なしていたが、個々のアトラクタにより特定の軌道が選択されれば、 α と極小点との間にもそれに対応した特定の関係が存在することになる。LGモデルにおけるカオス解では、その特定の関係がたまたま1次元力学系の場合と同様であったものと思われる。

Mukougawa et al.⁴⁾は、ロレンツモデルのアトラクタ上でロレンツインデックス α を求めている。彼らの結果（彼らのFig. 7）は、定常点 $(0, 0, 0)^T$ の近傍で α が大きな値を持つことを示している。従って、

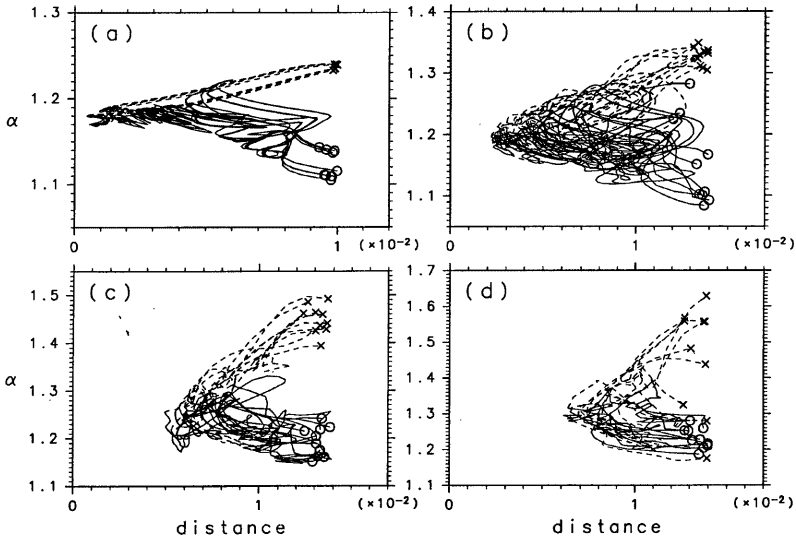


Fig. 7 Relation between the Lorenz index α and the distance from the minimum point ; (a) S6, (b) ~ (d) M4. Solid curves indicate the approaching trajectories and broken curves indicate the departing trajectories. Similar to those in Fig.1 (b), symbols $\circ$ and $\times$ show start and end point, respectively. Time interval τ of the Lorenz index is 3 days. (a) ~ (d) are same as those indicated in Fig.3.

軌道が極小点（定常点）に近づいているとき α は増加し、離れているとき α は減少するという関係が存在する。これは **Fig. 1(b)** の解 2 と同様の関係である。このことから、2 次元以上の力学系では α と極小点の関係が必ずしも一通りでないことが分かる。また、Kimoto et al.⁵⁾ は、現業予報結果の解析により、ブロッキングレジームになる前に誤差成長率が大きくなることを報告している。ブロッキングレジームは現実大気の典型的な準定常状態であるので、これは **Fig. 1(b)** の解 3 と同様の関係を連想させるものである。

以上から、多次元系のアトラクタ上の軌道に沿って α と極小点の関係を調べればある特定の関係が見られるが、その関係は必ずしも一通りでないことが分かった。

5. まとめ

極小点と予測可能性の指標であるロレンツインデックス α との関係について、低次元力学系をもとに解析した。1 次元力学系では、軌道が極小点に近づき離れる間 α が単調に増加することは自明である。ところが、2 次元力学系になると α と極小点には特定の関係は存在せず、**Fig. 1(b)** に示した 4 通りすべての関係が可能である。これは、3 次元以上の多次元系でも同様である。多次元系でもアトラクタ上の軌道に限って α と極小点の関係を調べればある特定の関係が見られるが、その関係は必ずしも一通りでない。

この理論的帰結をもとに、LG モデルのカオス解を具体例として α と極小点との関係を調べた。25 次元の LG モデルにおけるカオス解は、1 つの極小点に再帰的に接近するホモクリニック的な軌道で特徴づけられるが、軌道が極小点に近づいて離れる間 α は増加する傾向にある (**Fig. 7**)。これは 1 次元力学系と同様の関係であるが、理論的に得た 4 通りの解のうちの一つが得られたものと考えられる。

今後は簡略化しない多次元の大気循環モデルを用いて同様の解析を行ない、準定常状態（天候レジーム）と予測可能性の変動との関係を調べる予定である。

謝 辞

ここで用いたスペクトルモデルは石岡圭一氏（東京大学大学院数理科学研究科）のコードをもとに作成したものである。また、作図には地球流体電脳ライブラリを用いた。数値実験およびそのデータ処理は、京都大学電波科学計算機実験装置（KDK）を用いて行なった。ここに記して謝意を表す。

参考文献

- 1) 余田成男・木本昌秀・向川 均・野村真佐子：カオスと数値予報——局所的リアブノフ安定性と予測可能性——，天気，Vol.39, 1992, pp.593-604.
- 2) Legras, B. and M. Ghil : Persistent anomalies, blocking and variations in atmospheric predictability, J. Atmos. Sci., Vol.42, 1985, pp.433-471.
- 3) Mukougawa, H. : A dynamical model of "quasi-stationary" states in large-scale atmospheric motions, J. Atmos. Sci., Vol.45, 1988, pp.2868-2888.
- 4) Mukougawa, H., M. Kimoto and S. Yoden : A relationship between local error growth and quasi-stationary states : Case study in the Lorenz system, J. Atmos. Sci., Vol.48, 1991, pp.1231-1237.
- 5) Kimoto, M., H. Mukougawa and S. Yoden : Medium-range forecast skill variation and blocking transition : A case study, Mon. Wea. Rev., Vol.120, 1992, pp.1616-1627.
- 6) Lorenz, E.N. : A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model, Tellus, Vol.17, 1965, pp.321-333.
- 7) Yoden, S. and M. Nomura : Finite-time Lyapunov stability analysis and its application to atmospheric predictability, J. Atmos. Sci., Vol.50, 1993, pp.1531-1543.
- 8) Shimada, I. and T. Nagashima : A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems, Prog. Theor. Phys., Vol.61, 1979, pp.1605-1616.