

p -進多様体上の Riemann-Hilbert-de Rham 対応

東大理 都築 暢夫 (Nobuo Tsuzuki)

§1. はじめに

p -進局所体上の代数多様体 (以下、 p -進多様体) の上の幾何的な起源をもつ p -進連続層はある種のよい構造をもっていると考えられている。ここでは、 p -進多様体上の p -進連続層に対して de Rham 層の概念を定義して、それに微分加群を対応させる。さらに、de Rham 層の概念が各種の演算について安定であり、de Rham 層から微分加群への対応は演算と可換になることをしめす。これは、複素多様体上の局所系と微分加群の対応に類似している。しかし、この de Rham 層と微分加群の対応は 1 : 1 ではなく、“stable 層” と呼ばれるべきものに制限しないと 1 : 1 のよい対応はないと思われる。

最初に p -進局所体の絶対 Galois 群の de Rham 表現について説明する。([I] に詳しくかかっている。)

[Ta] において J.Tate は p -divisible group の Tate-加群の Hodge-Tate 分解を発見した。その後、J.-M. Fontaine は Hodge-Tate 表現、de Rham 表現、crystalline 表現等を定式化して、 p -進多様体の p -進 étale cohomology に対するいくつかの予想を立てた[Fo1][Fo2]。Fontaine の予想は、彼自身、W.Messing、S.Bloch、加藤 和也、兵頭 治、G.Faltings ら各氏によりそのかなりの部分が既に解決されている。

Faltings は、[Fa2] の中でいわゆる Fontaine の de Rham 予想を示した。(多様体が、good reduction の場合に、de Rham 予想より精密な crystalline 予想が成りたつこと、および、その層化と相対化が [Fa2] の主要内容である。) 正確に述べるために記号を定める。 K を混標数 $(0, p)$ 完備離散付値体で剰余体 k は完全体とする。 $\bar{K}$ を K の代数閉包とする。 B_{dR} を Fontaine の定義した Galois 群 $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ の作用と減少 filtration をもつ巨大な K -algebra (実は剰余体が $\mathbb{C}_p = \widehat{\bar{K}}$ なる完備離散付値体) とする。このとき、 p -進 $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ 表現 V が de Rham 表現とは、自然な写像

$$B_{dR} \otimes_K (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\text{Gal}(\bar{K}/K)} \longrightarrow B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

が同型になることをいう。ただし、 $(\cdot)^{\text{Gal}(\bar{K}/K)}$ は $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ -不変部分をあらわす。 X を K 上の完備非特異多様体として、 $X_{\bar{K}} = X \otimes_K \bar{K}$ とする。また、 $\text{IH}_{dR}^*(X/K)$ を X の K 上の de Rham cohomology とする。

定理. (Faltings) 上の状況のもとで、 p -進 etale cohomology 群

$$H^* = H^*(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) = \varprojlim H^*(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}_p$$

は de Rham 表現である。さらに、 $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ -作用、filtration および chern class map を保つ標準的な同型

$$B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^* \cong B_{\text{dR}} \otimes_K \mathbb{H}_{\text{dR}}^*(X/K)$$

が存在する。ただし、 $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ は左辺には対角的 ($\sigma \in \text{Gal}(\overline{K}/K) \mapsto \sigma \otimes \sigma$) に作用して、右辺の filtration は B_{dR} のそれと $\mathbb{H}_{\text{dR}}^*(X/K)$ の Hodge filtration との積 filtration とする。

注意. de Rham 予想は 多様体の reduction の様子によらずに成り立つ。

以下では、de Rham 予想の層化と相対化の方針を述べる。

Fontaine の理論の層化および相対化は、兵頭がその緒をひらいた。彼は、[H]で Hodge-Tate 分解のそれをおこなった。Hodge-Tate 構造は、de Rham 構造の gr^0 -部分商であるから、兵頭の理論の一般化として de Rham 予想の層化と相対化とを考える。

Faltings の bounded etale 拡大の理論を用いて局所理論・Fontaine の環 B_{dR} の高次元化にあたる環 $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$ を構成する。 $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$ は Galois 群の作用、減少 filtration、および connection をもつ位相環である。もちろん、兵頭の理論の環 S_∞ は $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$ の gr^0 -部分商になる。 $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$ の構成および性質は §2 で示す。 $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$ を用いて局所的に de Rham 表現を定義する。これは rigid etale local な概念である。また、 $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$ の connection を利用して de Rham 表現に微分加群を対応させる。

$\mathfrak{B}_{\text{dR}}$ を用いた de Rham 表現の定義は model 上 rigid etale local であることから層化される。また、de Rham 予想の層化および相対化についての主結果とその証明の概略は §4 で述べる。

§2. 環 $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$

Fontaine の環 B_{dR} の高次元化である環 $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$ を局所的に構成し、その性質を示す。

記号は §1 のままとする。

R を O_K (K の整数環) 上有限生成平坦な整閉整域で、 $R[1/p]$ が K 上非特異かつ幾何的既約とする。さらに、 R の d 個 ($d = \text{rel.dim}_{O_K} R$) の単元 u_i の対数微分 $d\log(u_i)$ により微分加群 $\Omega_{R[1/p]/K}^1$ が生成されると仮定する。以後、簡単のために Ω^* で $\Omega_{R[1/p]/K}^*$ をあらわす。

$\bar{R}$ を $R[1/p]$ の最大 étale 拡大の中での R の整閉包として、

$$R_\infty = (R \bigotimes_{O_K} O_{\bar{K}})[u_i^{p^{-\infty}}] \text{ の } \bar{R} \text{ における整閉包}$$

と定める。ただし、 $u_i^{p^{-\infty}}$ は u_i の p べき根とする。

R は O_K 上 smooth とは限らないので、 $\bar{R}$ は R_∞ 上 almost étale 拡大とはならない[Fa1]。このため $\bar{R}$ に含まれる R_∞ の拡大 C でよい条件を満たすものをとってくる必要がある。 C は整閉整域で R 上 Galois 拡大であり、 u_i が C のよい単元の系とする。すなわち、ある p べき p^e が存在して、 C に含まれる R_∞ の正規拡大 A で $\frac{1}{p}$ を添加すると R_∞ 上 finite étale になるものに対して、

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}) \quad & \text{tr}_{A[1/p]/R_\infty[1/p]}(A) \subset p^e R_\infty \\ (\mathcal{I}) \quad & (A \bigotimes_{R_\infty} A)[1/p] \rightarrow A[1/p] \quad (x \otimes y \mapsto xy) \end{aligned}$$

に対するべき等元 e_{A/R_∞} は p^e 倍すると整元になる。

をみたすものとする。もちろん、 R が O_K 上 smooth (good reduction の場合) のときには $C = \bar{R}$ とできる。

さらに、 $\Gamma = \text{Gal}(C/R)$ 、 $\Delta = \text{Gal}(C/R \bigotimes_{O_K} O_{\bar{K}})$ とおく。

この状況のもとで、 R と C とに關手的な以下の性質がなりたつ環 $\mathfrak{B}_{\text{dR}} = \mathfrak{B}_{\text{dR}}(R, C)$ を構成する。ただし、 $S_\infty = S_\infty(R, C)$ を兵頭氏の定義した環として[H]、 $B_{\text{dR}} = B_{\text{dR}}(R, C)$ を Faltings の定義した環とする[Fa2]。

($\mathcal{A}$) $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$ は B_{dR} -algebra で、減少 filtration $\{\mathfrak{B}_{\text{dR}}^r\}$ 、 Γ -作用、Griffith transversality を満たす integrable な B_{dR} -connection をもつ。また、 $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$ には、 B_{dR} の integral 構造と可換なそれがいり、 $(\mathfrak{B}_{\text{dR}}^r, p)$ -進位相に関して完備である。

($\mathcal{I}$) 次数付き Γ -algebra の標準的な同型

$$\text{gr} \cdot \mathfrak{B}_{\text{dR}} \cong \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} S_\infty(r)$$

がある。ただし、 (r) は Tate-twist とする。

($\mathcal{U}$) 連続 cohomology 群は次のようになる。

$$\begin{aligned} H^i(\Delta, \mathfrak{B}_{\text{dR}}) &= \begin{cases} (\hat{R}[1/p] \bigotimes_K B_{\text{dR}}(O_K))^\Gamma & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases} \\ H^i(\Gamma, \mathfrak{B}_{\text{dR}}) &\cong \begin{cases} \hat{R}[1/p] & (i = 0 \text{ または } 1) \\ 0 & (i \neq 0, 1) \end{cases} \end{aligned}$$

ここで、 $B_{dR}(O_K)$ は Fontaine の定義した環で $\wedge$ は p -進完備化をあらわす。

(エ) B_{dR} -connection $\mathfrak{B}_{dR} \rightarrow \Omega^1 \otimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}_{dR}$ から決まる Γ -加群の複体

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathfrak{B}_{dR} & \rightarrow & \Omega^1 \otimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}_{dR} & \rightarrow & \Omega^2 \otimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}_{dR} \rightarrow \cdots \\ \text{degree} & & (0) & & (1) & & (2) \end{array}$$

を DR とおき、その第 r -filtration DR^r を

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathfrak{B}_{dR}^r & \rightarrow & \Omega^1 \otimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}_{dR}^{r-1} & \rightarrow & \Omega^2 \otimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}_{dR}^{r-2} \rightarrow \cdots \\ & & (0) & & (1) & & (2) \end{array}$$

で定めると、自然な複体射 $B_{dR} \rightarrow DR$ は filtered quasi-isomorphism となる。

(オ) 非退化な pairing

$$DR \times DR \longrightarrow DR$$

が存在する。(cup 積)

(カ) $(R_1, C_1), (R_2, C_2)$ を先の条件を満たす対とするととき

$$DR(R_1) \overset{L}{\otimes} DR(R_2) \longrightarrow DR(R_1 \overset{\otimes}{\underset{O_K}{R_2}})$$

は、filtered quasi-isomorphism である。(Künneth formula)

注意. R が $W(k)$ 上 bad reduction の場合いを扱うためには、 $\overline{R}$ は R_∞ 上必ずしも almost etale 拡大でないので (R, C) を考える必要がでてくる。

Hodge-Tate 理論の高次元化において古典理論の $\mathbb{C}_p$ に対応するのは $\widehat{R}[1/p]$ ではなく S_∞ である。その理由は、標数 p に reduction したときに環 R は完全 (p -乗写像が全射) でないから、 p -基底に対応して連続 cohomology 群

$$H^i(\Gamma, \widehat{C}[1/p](r))$$

は古典的な場合のように消えない。 $(S_\infty$ ならば $((i, r) \neq (0, 0), (1, 0))$ をのぞいて消える。) de Rham 構造の gr^0 -部分商が Hodge-Tate 構造であることを考えると、 $\mathfrak{B}_{dR}$ は上の性質 (ア)-(カ) を満たす必要がある。さらに、 $\mathfrak{B}_{dR}$ の B_{dR} -connection は de Rham 表現に対して $\widehat{R}$ 上の locally free 層の複体に対応するので自然に定まる。

以下、 $\mathfrak{B}_{dR}$ を構成する。

$R_0 = O_K[T_i^{\pm 1}; i = 1, \dots, d]$, $C_0 = O_K[T_i^{\pm p^{-\infty}}]$ とおき、 $T_i^{p^{-n}} \mapsto u_i^{p^{-n}}$ で環準同型

$$\begin{array}{ccc} R_0 & \longrightarrow & R \\ \cap & & \cap \\ C_0 & \longrightarrow & C \end{array}$$

を定める。また、 C_0 への Γ の作用は C への作用から自然に導かれるものとする。最初に、

$$S = \text{projective limit } (C_0/pC_0 \xleftarrow{p \text{ 乗}} C_0/pC_0 \xleftarrow{p \text{ 乗}} \dots)$$

とすると、 S の元は $s_n = s_{n+1}^p$ なる C_0/pC_0 の元の列 $s = \{s_n\}$ であらわされる。 $C_0 = C_0^p + pC_0$ (C_0/pC_0 は完全環) であるから、環準同型

$$\begin{array}{ccc} W_n(S) & \longrightarrow & C_0/p^n C_0 \\ [s_1, \dots, s_n] & \mapsto & \tilde{s}_{1n}^{p^{n-1}} + p\tilde{s}_{2n}^{p^{n-2}} + \dots + p^{n-1}\tilde{s}_{nn} \end{array}$$

は全射となる。ここで、 $W_n(S)$ は長さ n の S -係数 Witt vector で $\tilde{s}$ は C_0/pC_0 の元 s の C_0 への持ち上げをあらわす。ideal (p) の自然な P.D.-構造と可換な上の全射の核に対する P.D.-包絡環を B_n として、 $I_n^{[m]}$ を第 m 次 P.D.-ideal とする。次に、

$$D_{0m} = (\varprojlim_n B_n / I_n^{[m]})[1/p]$$

とおく。 C は $R_\infty (= R_0 \otimes C_0 \text{ の } \bar{R} \text{ における整閉包})$ 上 bounded etale covering より、全射

$$D_{0m} \longrightarrow \hat{C}_0[1/p]$$

に対して、 p -進完備なその持ち上げ $\hat{R}[1/p]$ -algebra D_m で整構造を持ち、図式

$$\begin{array}{ccc} D_{0m} & \longrightarrow & \hat{C}_0[1/p] \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_m & \longrightarrow & \hat{C}[1/p] \text{ (全射)} \end{array}$$

が可換になるものが唯一存在する。射影系 $\{D_m\}$ に対してその射影極限を

$$B_{\text{dR}}^+ = B_{\text{dR}}^+(R, C) = \varprojlim_m D_m$$

であらわす。ところで、

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_p(1) &\longrightarrow W_n(S) \\ \zeta = \{\zeta_n\} &\mapsto [\zeta^n, 0, \dots, 0] \end{aligned}$$

から、 Γ -準同型

$$\alpha: \mathbb{Z}_p(1) \longrightarrow B_{\text{dR}}^+$$

が定まる。この写像は全射 $B_n \mapsto C_0/p^n C_0$ による $\zeta = \{\zeta_n\} \in \mathbb{Z}_p(1)$ の B_n への持ち上げ $\tilde{\zeta}_n$ に対して $(\tilde{\zeta}_n)^{p^n}$ をとったものの射影系により定まるものである。 $\mathbb{Z}_p(1)$ の生成元 ζ を一つ固定して、 B_{dR}^+ の元

$$t = \log(\alpha(\zeta)) = \sum (-1)^{k-1} \frac{(\alpha(\zeta) - 1)^k}{k}$$

を定める。これは $\alpha(\zeta) - 1 \in I_n^{[1]}$ より P.D.-環の性質で B_n において有限和となり、 B_{dR} の中で収束する。

環 $B_{\text{dR}} = B_{\text{dR}}(R, C)$ とその filtration を

$$\begin{aligned} B_{\text{dR}} &= B_{\text{dR}}^+[t^{-1}] \\ B_{\text{dR}}^* &= t^r B_{\text{dR}}^+ \end{aligned}$$

で定義する。これは、 $\mathbb{Z}_p(1)$ の生成元 ζ のとり方によらず決まる。このとき、 $\log \circ \alpha$ によって、

$$\widehat{C}[1/p](r) \cong gr^r B_{\text{dR}}$$

が導かれる。これが Faltings の B_{dR} である。

さて、 $E = B_{\text{dR}}^+[V_i; i = 1, \dots, d]$ とおき、

$$E \longrightarrow \widehat{C}[1/p]$$

を $V_i \mapsto 0$ かつ B_{dR}^+ 上では通常として定める。さらに、

$$J_m = \{x_1 \cdots x_m; x_i \in \ker(E \rightarrow \widehat{C}[1/p])\} \text{ で生成される ideal}$$

として、 $E_m = E/J_m$ とする。すると、 E_m は p -進完備な D_m -algebra になる。環準同型 $R_0[1/p] \rightarrow E_m$ を

$$T_i \mapsto \frac{[\{u_i^{p^{-n+1}}\}, 0, \dots]}{1 + V_i}$$

で定めると、 $R[1/p]$ は $R_0[1/p]$ 上 etale より $\widehat{R}[1/p] \rightarrow E_m$ に延びる。
 $E_\infty = \varprojlim_m E_m$ とする。さきに固定した $t \in B_{\text{dR}}^1$ を用いて、 $E_\infty[t^{-1}]$ の中で、

$$E_\infty^+ = \bigcup_{m \geq 0} t^{-m} \ker(E_\infty \rightarrow E_m)$$

とおく。 D_m の整構造は $E_\infty^+/t^m E_\infty^+$ の整構造を導き、各 $E_\infty^+/t^m E_\infty^+$ は p -進完備な D_m -algebra となる。この m に関する完備化を

$$\mathfrak{B}_{\text{dR}}^+ = \varprojlim_m E_\infty^+/t^m E_\infty^+$$

とする。これより、求める環 $\mathfrak{B}_{\text{dR}} = \mathfrak{B}_{\text{dR}}(R, C)$ が

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{\text{dR}} &= \mathfrak{B}_{\text{dR}}^+[t^{-1}] \\ \mathfrak{B}_{\text{dR}}^\tau &= t^\tau \mathfrak{B}_{\text{dR}}^+ \end{aligned}$$

と定まる。

$\sigma \in \Gamma$ の $\{u_i^{p^{-n}}\}$ への作用を $\zeta \in \mathbb{Z}_p(1)$ とする。このとき、 $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$ への Γ の作用を

$$\sigma(1 + V_i) = \alpha(\zeta)(1 + V_i)$$

で定める。

また、 D_m -準同型

$$E_m \longrightarrow \Omega^1 \otimes_{R[1/p]} E_{m-1}$$

を、 $1 + V_i \mapsto -d\log(u_i) \otimes (1 + V_i)$ で定めると、これは $\mathfrak{B}_{\text{dR}}$ 上で integrable な B_{dR} -connection

$$\nabla : \mathfrak{B}_{\text{dR}} \longrightarrow \Omega^1 \otimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}_{\text{dR}}$$

を定める。その定義より Griffith-transversality $\nabla(\mathfrak{B}_{\text{dR}}^\tau) \subset \Omega^1 \otimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}_{\text{dR}}$ を

みたす。

兵頭氏の環 S_∞ との関係は次のようになる。

Γ -加群の標準的な拡大

$$0 \rightarrow \widehat{C}[1/p] \rightarrow M \rightarrow \Omega^1 \otimes_{R[1/p]} \widehat{C}[1/p](-1) \rightarrow 0$$

$$M = \varprojlim_n (\Omega_{C/R}^1)_{p^n\text{-torsion}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p(-1)$$

により [Fa1]、環 $S_\infty = S_\infty(R, C)$ は、

$$S_\infty = \varinjlim_m \operatorname{Sym}_{\widehat{C}[1/p]}^m M$$

$$\operatorname{Sym}_{\widehat{C}[1/p]}^m M \rightarrow \operatorname{Sym}_{\widehat{C}[1/p]}^{m+1} M \quad [x_1 \otimes \cdots \otimes x_m] \mapsto [1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_m]$$

で定義される。 $\widehat{C}[1/p]$ -加群の準同型

$$\ker(E_2 \rightarrow E_1) \rightarrow \left(\varprojlim_n (\Omega_{C/R}^1)_{p^n\text{-torsion}} \right) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

を $t \mapsto \{d\log(\zeta_n)\}$ ($\{\zeta_n\}$ は t を定めるとき固定した 1 のべき根)、 $V_i \mapsto \{d\log(u_i^{p^{-n}})\}$ で定めると、これは Γ -準同型となり $\otimes \mathbb{Q}_p(-1)$ することにより同型

$$\ker(E_2 \rightarrow E_1)(-1) \rightarrow M$$

を得る。積構造から、 Γ -同型

$$\ker(E_{m+1} \rightarrow E_m) \rightarrow \operatorname{Sym}_{\widehat{C}[1/p]}^m M$$

が誘導され、これより Γ -同型

$$gr^0 \mathfrak{B}_{dR} \cong S_\infty$$

が得られる。

また、 S_∞ の連続 cohomology 群は、

定理. (兵頭)

$$H^i(\Delta, S_\infty) = \begin{cases} (R \otimes_{O_K} \widehat{O_K})[1/p] & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases}$$

$$H^i(\Gamma, S_\infty(r)) \cong \begin{cases} \widehat{R}[1/p] & (i, r) = (0, 0) \text{ または } (1, 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる。

$\mathfrak{B}_{dR}$ の位相に関する論議と spectral 系列

$$E_1^{a,b} = H^{a+b}(\Delta, S_\infty(a)) \longrightarrow H(\Delta, \mathfrak{B}_{dR})$$

により $\mathfrak{B}_{dR}$ の連続 cohomology 群を求まる。

注意. 今まで述べてきた局所理論の相対化についてふれる。

$$(R, C) \rightarrow (R', C')$$

をさきの条件をみたす対の間の環準同型で、 $R'[1/p]$ は $R[1/p]$ 上 smooth かつ幾何的既約とする。 $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}(R', C')$ 、 $B_{\mathrm{dR}}(R', C')$ をそれぞれ $\mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}}$ 、 B'_{dR} であらわし、 $\Gamma' = \mathrm{Gal}(C'/R')$ 、 $\Delta' = \mathrm{Gal}(C'/R' \otimes_R C)$ 、 $\Omega^* = \Omega^*_{R'[1/p]/R[1/p]}$ と記号を定める。この状況で連続 cohomology 群は

$$H^i(\Delta, \mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}}) = \begin{cases} (\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{B_{\mathrm{dR}}} B'_{\mathrm{dR}})^\wedge & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases}$$

$$H^i(\Gamma, \mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}}) \cong \begin{cases} (\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\widehat{R}[1/p]} \widehat{R}'[1/p])^\wedge & (i = 0 \text{ または } 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる。 Γ -加群の減少 filtration 付き複体 DR'

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}} & \rightarrow & \Omega^1 \otimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}} & \rightarrow & \Omega^2 \otimes_{R[1/p]} \mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}} \rightarrow \cdots \\ \text{degree} & & (0) & & (1) & & (2) \end{array}$$

も同様に定義されて、自然な複体射 $(\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{B_{\mathrm{dR}}} B'_{\mathrm{dR}})^\wedge \rightarrow DR'$ が filtered quasi-isomorphism になる。また、cup 積、Künneth formula もある。

§3. de Rham 表現

V を p -進 Γ -表現、すなわち、 Γ -作用をもつ有限次元 $\mathbb{Q}_p$ -ベクトル空間とする。

定義. V が Γ に関する de Rham 表現とは、自然な写像

$$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\widehat{R}[1/p]} (\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \longrightarrow \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

が同型になることをいう。

Tate-twist $\mathbb{Q}_p(r)$ は、 $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}(r) = \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}\{r\}$ (filtration の r 回 twist) と $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ の性質 (ウ) より de Rham 表現となる。

de Rham 表現の圏は、直和、tensor 積、双対、引きもどしに関して閉じている。

de Rham 表現 V に対して

$$\mathrm{DR}(V) = (\mathrm{DR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\Gamma}$$

と定める。すると、これは locally free $\widehat{R}[1/p]$ -加群の filtration 付きの複体になる。 $\mathrm{DR}(\cdot)$ は、cup 積および Künneth formula をもつ。

de Rham 層を定義するにあたって次の補題が重要である。

補題. $\Pi(R_\lambda, C_\lambda)$ を先の条件をみたす対で、 $\Pi \mathrm{Spec} R_\lambda \rightarrow \mathrm{Spec} R$ を rigid etale covering とする。このとき、 V が $(\mathrm{Spec} R)_{\mathrm{et}}$ 上の de Rham 表現であることと、各 λ に対して V が $(\mathrm{Spec} R_\lambda)_{\mathrm{et}}$ 上の de Rham 表現であることは同値である。

これより、de Rham 層の概念は rigid etale 的な性質になる。

注意. §2 の最後の注意と同様に今まで述べてきた局所理論の相対化もある。

§4. 比較定理

X を K 上の完備非特異多様体で、 $\mathfrak{X}$ をその O_K 上の proper flat model とする。 $[\mathrm{Fa}2][\mathrm{Fa}3]$ より、 $\Pi(R_\lambda, C_\lambda)$ で §2 の条件をみたし、 $\Pi \mathrm{Spec} R_\lambda \rightarrow \mathfrak{X}$ が rigid etale covering になるものが存在する。

定義. V を X_{et} 上の smooth $\mathbb{Q}_p$ -層とする。 V が de Rham 層とは、各 (R_λ, C_λ) 上で V が de Rham 表現になることをいう。

§3 の補題より、この定義は rigid etale covering のとり方によらない。

V を de Rham 層とする。各 $(\mathrm{Spec} R_\lambda[1/p])_{\mathrm{et}}$ 上で $(\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\Gamma}$ は、locally free 層となるから $\mathfrak{X}$ の rigid etale site 上の locally free 層となる。 X は K 上 proper より代数化可能で、 X 上の locally free 層が得られる[EGA III]。同様に、複体 $\{\mathrm{DR}(V)_\lambda\}$ も代数化可能で、 X 上の locally free 層の減少 filtration 付きの複体となる。この複体を $\mathrm{DR}(V)$ とかくことにする。

(R, C) を §2 の条件をみたす対として、 $f: X \rightarrow \mathrm{Spec} R[1/p]$ を proper smooth morphism とする。 $\overline{X} = X \otimes_{R[1/p]} \overline{R}[1/p]$ とおく。

主定理. V を X_{et} 上の de Rham 層とすると、 $H^i(\overline{X}, V)$ は $R[1/p]$ 上の de Rham 表現となる。さらに、次の標準的な同型

$$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^i(\overline{X}, V) \cong \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\widehat{R}[1/p]} H^i(X, \mathrm{DR}(V))$$

が存在する。この同型は、Galois 群の作用、filtration、chern class map を保つ。ただし、 $\mathbb{H}^*(X, \mathrm{DR}(V))$ は $\mathrm{DR}(V)$ の hypercohomology とする。

証明は [Fa1][Fa2] の論議と同様である。その概略は以下のようになっている。

両辺の cohomology は $\mathfrak{X}$ 上の hyper rigid etale covering の hyper c ech cohomology で計算できる。 $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ の局所理論により、両者を計算する複体を rigid etale local に結ぶ。

$\mathfrak{X}$ 上の rigid etale local な Δ' -cochain の図式

$$\begin{array}{ccc} C^*(\Delta', (\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}} B'_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) & \xrightarrow{a} & C^*(\Delta', \mathrm{DR}' \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \\ & \xleftarrow{b} & C^*(\Delta', \mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}} \otimes_{\widehat{R}'[1/p]} \mathrm{DR}'(V)) \\ & \xleftarrow{c} & \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\widehat{R}[1/p]} \mathrm{DR}'(V) \end{array}$$

を考える。上の図式で Δ' 、 $\mathfrak{B}'_{\mathrm{dR}}$ 、 DR' は §2 の最後の注意の中の記号で、それぞれ R'/R の相対 Galois 群、環 $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}(R', C')$ 、 $\widehat{R}'[1/p]/\widehat{R}[1/p]$ 上の相対複体を表す。この図式で a と c とは環 $\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}$ の性質より quasi-isomorphism であり、 b は de Rham 層の定義より同型となる。

Δ' -cochain $C^*(\Delta', V)$ の rigid etale hypercovering を走らせた hypercohomology 群は、rigid etale cohomology の性質より etale cohomology 群 $\mathbb{H}^*(\overline{X}, V)$ と自然に同型となる。(torsion のときの差が十分小さい p -べき) 先の Δ' -cochain と cochain 射

$$C^*(\Delta, V) \rightarrow C^*(\Delta', (\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}}} B'_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$$

とを合わせ、自然な変換

$$\mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{H}_{\mathrm{ t}}^i(\overline{X}, V) \longrightarrow \mathfrak{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\widehat{R}[1/p]} \mathbb{H}^i(X, \mathrm{DR}(V))$$

を得る。具体的な計算により、vector bundle の chern class が上の自然な変換で可換になることが示せる。このことと normal cone の変形理論とから characteristic class の可換性が導かれる。これより、両者の Poincar e 双対性が可換になることがいえる。したがって、上の変換は直和因子への同型となる。対角成分の特性類の可換性より、逆写像も Poincar e 双対性と可換になり定理を得る。

参考文献

- [BO] Berthelot, P. and Ogus, A., "Note on crystalline cohomology," Princeton University Press, 1978.

- [Fa1] Faltings, G., *p-adic Hodge theory*, J. Am. Math. Soc. **1** (1988), 255–299.
- [Fa2] Faltings, G., *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations*, Algebraic and Analysis, Geometry and Number Theory, Johns Hopkins University Press (1990), 25–80.
- [Fa3] Faltings, G., Letter.
- [Fo1] Fontaine, J.-M., *Modules Galoisien, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate*, Astérisque **65** (1979), 3–80.
- [Fo2] Fontaine, J.-M., *Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local, construction d'un anneau Barsotti-Tate*, Ann. of Math. **115** (1982), 529–577.
- [H] Hyodo, O., *On variation of Hodge-Tate structures*, Math. Ann. **284** (1989), 7–22.
- [I] Illusie, L., *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique [d'après G. Faltings, J.-M. Fontaine et al.]*, Séminaire Bourbaki 1989 / 90, exposé n°726.
- [Ta] Tate, J., *p-divisible groups*, Proceedings of a Conference on Local Fields (1967), 158–183, Springer, Berlin.
- [Tsu] Tsuzuki, N., *Variation of p-adic de Rham structures*, Preprint.
- [EGA III] Grothendieck, A. and Dieudonné, J., *Eléments de Géométrie Algébrique III*, Publ. Math. IHES **11** (1961); **17** (1963).