

Unitary cobordism と complex K-theory の関係についての注意

阪大 理 柴田 勝征

§ 1. 序

我々は [7] §7 において、ある種の equivariant map の非存在を証明する為に、unitary cobordism theory に値を持つ特性類の計算を行なった。同様の Cobordism 特性類は、さらに Munkholm-Nakaoka [4] による Borsuk-Ulam の定理の拡張、Nakaoka [5] による immersion と imbedding の問題への応用にと発展させられた。

ところが、[7] における我々の cobordism を用いた直接計算と、[4], Appendix における、同じ invariant を complex K-theory へ落としてから行なった計算とは、同じ数値を与えている。

この小論の目的は、上に述べた数値の一致の理由を明らかにし、合わせて、[4], [5], において complex K-theory を用いて得られた計算結果は、unitary cobordism theory を用いて計算してもそれ以上改良できない事示す事である。

§ 2. Euler classes in $U^*()$ and $K^*()$

以下、我々は CW 複体とそれらの間の連続写像の全体でつくるカテゴリーの中で考えてゆく事にする。

Quillen [6] によれば、Boardman map

$$B : U^*() \longrightarrow K^*()[[t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots]]$$

という stable, natural and multiplicative な functor が存在して、complex line bundle L の Euler class $e(L)$ に対しては

$$B(e(L)) = \gamma^1(L) + t_1 \gamma^1(L)^2 + t_2 \gamma^1(L)^3 + \dots$$

となる。ここに $\gamma^1(L) = 1_C - L$ である。従って

補題 2.1 (Hattori [3])

$$B(e(V)) = \gamma^{\dim V}(V) \cdot \gamma_{\#}(V - \dim V)$$

但し、 $\gamma^{\dim V}(V) = \sum (-1)^i \lambda^i(V)$

$$\gamma_{\#}(V - \dim V) = \prod_{i=1}^{\dim V} (1 + t_1(1 - V_i) + t_2(1 - V_i)^2 + \dots)$$

そして V は形式的に、 $V = \sum_{i=1}^{\dim V} V_i$ と、line bundles の和に書けている。

さて次に、Conner-Floyd [2] によって定義された natural and multiplicative transformation

$$\mu_c : U^*() \longrightarrow K^*()$$

について考えよう。

— 定理 2.2. —

X が CW 複体で、Boardman map

$$B : U^*(X) \longrightarrow K^*(X)[[\mathbb{C}]]$$

が単射になっていると仮定する。このとき、 X 上の complex vector bundles $V_1, \dots, V_k$ と任意の non-negative integers の列 $i_1, \dots, i_k$ ($\forall k \geq 1$) に対して、次の 2 条件は同値である：

$$(1). \quad e(V_1)^{i_1} \dots e(V_k)^{i_k} = 0 \quad \text{in } U^*(X).$$

$$(2). \quad \mu_c(e(V_1)^{i_1} \dots e(V_k)^{i_k}) = 0 \quad \text{in } K^*(X).$$

(証明) $(1) \Rightarrow (2)$ は明らか。Conner-Floyd [2] により、 $\mu_c(e(V)) = \gamma^{\dim V}(V)$ が知られているから、前の補題 2.1 を用いると、 $(2) \Rightarrow B(e(V_1)^{i_1} \dots e(V_k)^{i_k}) = 0$. ところが B は単射と仮定しているから、(1) を得る。Q.E.D.

§ 3. Atiyah - Hirzebruch スペクトル列

Atiyah - Hirzebruch [1] は

$$E_2^{p,q} \cong H^p(X; K^q(pt)) \implies K^{p+q}(X)$$

となるスペクトル列 $\{E_2^{p,q}, d_2^{p,q}\}$ を構成した。それと同様の構成により、

$$\hat{E}_2^{p,q} \cong H^p(X; U^q(pt)) \implies U^{p+q}(X)$$

$$\tilde{E}_2^{p,q} \cong H^p(X; (K^*(pt)[[t]])_q) \implies (K^*(X)[[t]])_{p+q}$$

となるスペクトル列 $\{\hat{E}_2^{p,q}\}$, $\{\tilde{E}_2^{p,q}\}$ が得られる事はよく知られている。但し、 $\dim t_i = -2i$ として、 $(\quad)_q$ は、 q 次元成分を表わしている。Conner - Floyd map μ_c と Boardman map B は、スペクトル列の準同型

$$\mu_c: \{\hat{E}_2^{p,q}\} \rightarrow \{E_2^{p,q}\}, \quad B: \{\hat{E}_2^{p,q}\} \rightarrow \{\tilde{E}_2^{p,q}\}$$

を引き起こす。これらについて、Tom Dieck は次の2つの命題を主張した ([8])。証明の為には、Yoshimura [10] の様な厳密な議論が必要であるが、ここでは省略する。

命題 3.2.

次の3条件は同値である：

- (1). スペクトル列 $\{E_2^{p,q}\} \implies K^*(X)$ は collapse する。

- (2). スペクトル列 $\{\hat{E}_2^{pq}\} \Rightarrow U^*(X)$ は collapse する。
 (3). スペクトル列 $\{\hat{E}_2^{pq}\} \Rightarrow K^*(X)[[\mathbb{U}]]$ は collapse する。

命題 3.3.

$K^*(X)$ に関するスペクトラル列 $\{E_2^{pq}\}$ が collapse すれば、Boardman map $B: U^*(X) \longrightarrow K^*(X)[[\mathbb{U}]]$ は単射である。

従って、2.2 と 3.3 から、次の系を得る。

系 3.4.

X が CW 複体で $K^*(X)$ (3.2 により、 $U^*(X)$ としても同値) に関する Atiyah-Hirzebruch スペクトラル列が collapse すると仮定する。 X 上の complex vector bundles $V_1, \dots, V_k$ と任意の non-negative integers の列 $i_1, \dots, i_k$ に対して次の 2 条件は同値である：

- (1). $e(V_1)^{i_1} \dots e(V_k)^{i_k} = 0$ in $U^*(X)$.
 (2). $\mu_c(e(V_1)^{i_1} \dots e(V_k)^{i_k}) = 0$ in $K^*(X)$.

§4. 応用例

例 4.1 (Vick [9], Shibata [7], Munkholm-Nakaoka [4])

ある種の equivariant map の非存在に関する問題であるが、計算のポイントは、 p を素数とし、 $n \geq 1$, $(p, n) = 1$, $a \geq 1$, $k \geq 0$ を整数とし、 f を標準的被覆 $S^{2n+1} \rightarrow L^n(p^{a+1}n)$ に associate された complex line bundle とする時に、

$$e(f^{p^a n})^{k+1} = 0 \text{ in } U^*(L^j(p^{a+1}n)) \quad 0 \leq j \leq n$$

となる様な n の最大値を求める事であった。系 3.4 によれば、これは

$$\gamma^1(f^{p^a n})^{k+1} = 0 \text{ in } K^*(L^j(p^{a+1}n)) \quad 0 \leq j \leq n$$

となる様な n の最大値を求める事と同値である。

例 4.2 (Munkholm-Nakaoka [4])

上の例と同じ記号を用いると、問題は、奇数 g と整数 $m, n \geq 1$ に対して、 $U^*(L^n(g))$ において

$$e(f)^j \left(\prod_{i=1}^{g-1/2} e(f^i) \right)^m = 0 \quad \forall j > d$$

となる様な d の最小値を求める事であった。系 3.4 により、これは、 $K^*(L^n(g))$ において

$$\gamma^1(f)^j \left(\prod_{i=1}^{g-1/2} \gamma^1(f^i) \right)^m = 0 \quad \forall j > d$$

となる様な d の最小値を求める事と同値である。

例 4.3 (Nakaoka [5])

[5] において示された、写像 $f: M \rightarrow N$ が *topological immersion* と *homotopic* になり得るための *integrality condition* は、[5] における証明の中で明らかのように、invariant $\psi_f = i^* z^{-1}(e((id \times f)^* \nu_1'))$ が消える事 ($\psi_f = 0$) と同値である。但し、ここに

$$U^*(B_G \times N) \xrightarrow{(id \times f)^*} U^*(B_G \times M) \xleftarrow[\cong]{z} U^*(E_G \times_G W) \\ \xrightarrow{i^*} \varinjlim U^*(E_G \times_G (W-M))$$

であって、 G は order k の *cyclic group*, W は $M = \Delta M$ の M^k における *equivariant neighbourhoods* の族を動き、 ν_1' は $B_G \times N$ の上の、ある *complex vector bundle* である。さて、

$$\underline{\mu}_G = \varinjlim \{ \mu_c : U^*(E_G \times_G (W-M)) \rightarrow K^*(E_G \times_G (W-M)) \} \\ \underline{B}_G = \varinjlim \{ B : U^*(E_G \times_G (W-M)) \rightarrow K^*(E_G \times_G (W-M))[[\#]] \}$$

と定義しよう。いままでの例と同様に、我々は次の命題を証明する。

多様体 M が (i) $H^{2j+1}(M; \mathbb{Z}) = 0 \quad (\forall j \geq 0)$
(ii) $\text{Torsion}(H^{2j}(M; \mathbb{Z})) = 0 \quad (\forall j \geq 0)$
を満足する時、次の2条件は同値である：

$$\boxed{\begin{array}{l} (1). \psi_f = 0 \text{ in } \varinjlim U^*(E_G \times_G (W-M)). \\ (2). \mu_G(\psi_f) = 0 \text{ in } \varinjlim K^*(E_G \times_G (W-M)). \end{array}}$$

上の条件(2)は、 K -theory における Nakacka の integrality と同値になっている事は容易にわかる。

(命題の証明)

(1) $\Rightarrow$ (2) は明らか。従って、 $\mu_G(\psi_f) = 0$ を仮定する。

$$0 = \mu_G(\psi_f) = i^* \iota^{-1} \mu_c(e((\text{id} \times f)^* \nu_1')),$$

$$\underline{B}(\psi_f) = i^* \iota^{-1} B(e((\text{id} \times f)^* \nu_1'))$$

$$= i^* \iota^{-1} \{ \mu_c(e((\text{id} \times f)^* \nu_1')) \} \cdot i^* \iota^{-1} \{ \delta_{\#}((\text{id} \times f)^* \nu_1' - \dim \nu_1') \}$$

だから $\underline{B}(\psi_f) = 0$ 。故に、 $\underline{B}_\gamma$ が単射である事を言えばよい。

Exact 列 ([5] 参照)

$$\xrightarrow{\vee e(\nu_1)} H^{2p}(B_G \times M, U^{2g}_{(pt)}) \xrightarrow{i^* \iota^{-1}} \varinjlim H^{2p}(E_G \times_G (W-M), U^{2g}_{(pt)})$$

$$\xrightarrow{\delta} H^{2p+1-2(k-1)m}(B_G \times M, U^{2g}_{(pt)})$$

を考えると、我々の仮定 (i)(ii) によつて、偶数次元では、 $i^* \iota^{-1}$ は全射になっている。また条件 (i)(ii) は、スペクトル列 $\{\hat{E}_2^{p,q} \Rightarrow U^*(B_G \times M)\}$ が collapse する事をも意味す

るから、スペクトル列の準同型

$$\tau^{*}\tau^{-1} : \{\hat{E}_n^{p,q} \Rightarrow U^*(B_G \times M)\} \longrightarrow \{\hat{E}_n^{p,q} \Rightarrow \varinjlim U^*(E_G \times_{\mathbb{G}} (W-M))\}$$

を考えると、 $\{\hat{E}_n^{p,q} \Rightarrow \varinjlim U^*(E_G \times_{\mathbb{G}} (W-M))\}$ も偶数次元では collapse している。従って系 3.4 により $B_{\mathbb{G}}$ は $\varinjlim U^{ev}(E_G \times_{\mathbb{G}} (W-M))$ の上では単射であり、 $\mu_{\mathbb{G}}(\psi_f) = 0 \Rightarrow \psi_f = 0$ が言えた。Q.E.D.

例 4.4 (Nakaoka [5])

Null homotopic な写像 $f: M \rightarrow N$ が embedding と homotopic になるための必要条件 $\varphi_f = 0$ ([5] 参照) は、ある integrality condition を導くが、その逆は成り立たない。前例 4.3 と同様にして、

- 多様体 M が (i) $H^{2j+1}(M; \mathbb{Z}) = 0$ ($\forall j \geq 0$)
 (ii) $\text{Torsion}(H^{2j}(M; \mathbb{Z})) = 0$ ($\forall j \geq 0$)

を満足する時、次の 2 条件は同値である。

- (1). $\varphi_f = 0$ in $U^*(E_G \times_{\mathbb{G}} (M^k - \Delta M))$.
 (2). $\mu_{\mathbb{G}}(\varphi_f) = 0$ in $K^*(E_G \times_{\mathbb{G}} (M^k - \Delta M))$.

が証明できる。また、embedding に関する [5] の integrality condition は $\psi_f = 0$ (前例 4.3 参照) プラス $R_0^*(e(-\nu_1)e(\eta)^2)$

$=0$ in $U^*(M^k)$ と同値である。但し、 $\pi_0: B_G \times M^k \rightarrow M^k$ は projection で、 $-U_1$ と η は $B_G \times M^k$ 上の、ある complex vector bundles である。従って、前例と系 3.4 から、次の命題が得られる。

多様体 M が (i) $H^{2j+1}(M; \mathbb{Z}) = 0$ ($\forall j \geq 0$)

(ii) $\text{Torsion}(H^{2j}(M; \mathbb{Z})) = 0$ ($\forall j \geq 0$)

を満足する時、下の 2 条件は同値である：

(1). Embedding に関する [5] の integrality condition

(2). その K-theory version

参考文献

- [1] M.F. Atiyah and F. Hirzebruch : Vector bundles and homogeneous spaces, Proc. Symposium in Pure Math., AMS, 3 (1961), 7-38.
- [2] P.E. Conner and E.E. Floyd : The relation of cobordism to K-theories, Lecture Notes in Math., 28, Springer Verlag, Berlin, 1964.
- [3] A. Hattori : Equivariant characteristic numbers and integrality theorem for unitary T^n -manifold, to appear.

- [4] H. J. Munkholm and M. Nakaoka.: The Borsuk - Ulam theorem and formal group laws, *Osaka J. Math.* 9 (1972), 337-349.
- [5] M. Nakaoka : Characteristic classes with values in complex cobordism, *Proc. Int. Conf. Manifolds, Tokyo, 1973.*
- [6] D. Quillen : Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations, *Adv. in Math.* 7 (1971), 29-56.
- [7] K. Shibata : Oriented and weakly complex bordism algebra of free periodic maps, *Trans. AMS*, 177 (1973), 199-220.
- [8] T. tom Dieck : Bordism of G -manifolds and integrality theorems, *Topology* 9 (1970), 345-358.
- [9] J.W. Vick: An application of K -theory to equivariant maps, *Bull. AMS*, 75 (1969), 1017-1019.
- [10] Z. Yoshimura : On cohomology theories of infinite CW-complexes, I , *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ*, vol. 8 no. 2, 4 (1972).