

Moduli of algebraic vector bundles

京大 理

丸山 正樹

非特異, 射影的, 代数多様体上の vector bundles の moduli の存在について, なるべくわかりやすく説明する。

X を $\mathbb{C}$ 上の非特異, 射影的, 代数多様体とし, $\mathcal{O}_X(1)$ を X 上の ample 可逆層とする。すなわち, $m \gg 0$ について, 埋め込み

$$\iota: X \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$$

が存在して, $\iota^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n}(1)) \cong \mathcal{O}_X(m) = \mathcal{O}_X(1)^{\otimes m}$ 。ここで, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n}(1)$ は Hopf-直線束からきまる可逆層。以下, この $(X, \mathcal{O}_X(1))$ を固定する。又, X の位相は Zariski 位相のみを考える。

X 上の algebraic vector bundle of rank r を与えることは, X の open covering $\{U_i\}$ と $g_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, GL(r, \mathcal{O}_X))$ で $g_{ij} = g_{ik} g_{kj}$ となるものを与えることである。これはまた, X 上の rank r の locally free sheaf を与えることと同じである。従って, 以下 X 上の vector bundle と言ったら, X 上の coherent locally free sheaf のことを意味することにする。

X 上のすべての vector bundles の同型類の集合 VB_X を考える。 VB_X に何か代数的な構造 (例えば, algebraic varieties の無限個の和,

あるいは, algebraic scheme 等) が入るでしょう。その代数的な構造を持つ VB_X を VB_X と書こう。 VB_X が algebraic vector bundles の "moduli" と呼ばれる為には, 次の性質を持つべきであろう。

(1) $\mathbb{C}$ 上の variety (あるいは, scheme) T と, $X \times T$ 上の algebraic vector bundle E が与えられた時,

$$T \ni t \longrightarrow E|_{X \times \{t\}} \in VB_X$$

が, T から VB_X への "代数的" な写像になる。

(2) VB_X の構造は上の性質について, 最も "universal"。

例えば, VB_X の相異なる元 E_1, E_2 が curve でつながっている, すなわち, $\mathbb{C}$ 上の 1 次元 ^(連結) variety T , $X \times T$ 上の algebraic vector bundle E , T の点 t_1, t_2 が存在して, $E|_{X \times \{t_1\}} = E_1$, $E|_{X \times \{t_2\}} = E_2$ ならば, E_1 と E_2 は VB_X の点として curve でつながっている。

さて, VB_X は存在するか? $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ としてみよう。 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ 上の vector bundle E をとると, A. Grothendieck の定理により, $E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1}(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1}(\alpha_n)$ となる。従って, $VB_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1}$ は可算集合。すなわち, $VB_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1}$ は存在したとしても, 離散的な構造しか入らない。一方, Y を非特異代数曲線とすれば, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times Y$ 上の vector bundle F で, ある $y_0 \in Y$ について, $F|_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \{y_0\}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1}(\alpha) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1}(-\alpha)$, $F|_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \{y\}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1}$, $\forall y \in Y$ となるものがある。ここで, α は勝手な整数を取れる。故に, 上の性質 (1) を考えると, $VB_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1}$

は離散的な構造を持つ得ない。従って, $VB_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ は存在しない。

VB_X は一般に存在しないから, VB_X の適当な部分集合子を取って, 子に次の性質を持つ代数的構造を入れた F を考える。

(1) 子 $\mathbb{C}$ 上の variety (あるいは scheme) T と, $X \times_{\mathbb{C}} T$ 上の algebraic vector bundle E で, $\forall t \in T, E|_{X \times \{t\}} \in F$ となるものか" 与えられた時,

$$T \ni t \longrightarrow E|_{X \times \{t\}} \in F$$

が, T から F への "代数的" な写像になる。

(2) 子 F はの構造は上の性質について, 最も "universal"。

子はなくべく大きく, かつ F が良い性質を持つほど良い。

定義 1 X 上の vector bundle E が "simple" $\iff \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(E, E) = \text{End}_{\mathcal{O}_X}(E) \cong \mathbb{C}$ (定数を掛ける endomorphisms が丁度 $\text{End}_{\mathcal{O}_X}(E)$ となる)。

Local moduli の一般論から言って simple vector bundle は良いものである。実際, 上の子として simple vector bundles の同型類の集合をとれば, それは, analytic spaces の category で "moduli" となる様な, analytic space (Hausdorff と $\mathbb{P}^1$ はない) の構造を持つことが知られている。

我々の目標は algebraic variety (又は scheme) の category での moduli の構成であるので, 上の simple という性質では不十分である。

以下の議論を統一的に扱い, 結果が自然になるものには,

vector bundle (locally free coherent sheaf) だけでなく, torsion free coherent sheaf を考える方が良い。

X 上の torsion free coherent sheaf $E (\neq 0)$ を取る。 X の non-empty open set U が存在して, $E|_U$ は U 上の vector bundle になる。 $E|_U$ の rank を E の rank と言い, $r(E)$ で表わす。 $E(m) = E \otimes \mathcal{O}_X(m)$ とすると,

$$\chi(E(m)) = \sum (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, E(m))$$

は m についての多項式になる ($\deg \chi(E(m)) = \dim X$)。そこで,

$$P_E(m) = \chi(E(m)) / r(E)$$

と置く。

定義 2. X 上の coherent sheaf $E (\neq 0)$ が $(\mathcal{O}_X(1))$ に関して stable (semi-stable) $\Leftrightarrow$

(1) E は torsion free

(2) E の $\forall$ coherent subsheaf $E' (0 \neq E' \neq E)$ に対して,

$$P_{E'}(m) < P_E(m), \quad \forall m \gg 0$$

$$(P_{E'}(m) \leq P_E(m), \quad \forall m \gg 0).$$

注意 $E: \text{stable} \Rightarrow E: \text{simple}$. しかし, 逆は一般に成立しない。

Torsion free coherent sheaves の category で考える時, 性質 (1) の E としては, " T 上 flat" な $X \times_{\mathbb{C}} T$ 上の coherent sheaf を取る。すなわち, flat family で algebraic につながっているものは, F

の中で algebraic $\hookrightarrow$ ながっている。

$X \times_{\mathbb{C}} T$ 上に T -flat な coherent sheaf E が与えられ, T は connected であるとする。この時, $E(m) = E \otimes_{\mathcal{O}_T} p_1^* \mathcal{O}_X(m)$ ($p_1: X \times_{\mathbb{C}} T \rightarrow X$ は projection) $\hookrightarrow$ いて, $\chi(E(m)|_{X \times \{t\}})$ は t に よらない。子 $\mathcal{F}$ を torsion free coherent sheaves の同型類のある集合とする。子が (1) $_{\mathcal{F}}$, (2) $_{\mathcal{F}}$ を満たす algebraic な構造 F を持っているとする。上に述べたことと, 性質 (1) $_{\mathcal{F}}$, (2) $_{\mathcal{F}}$ より, F は

$$F = \coprod_H F(H)$$

と直和分解する。ここで, H は numerical polynomial $\mathbb{C}$, $F(H) = \{E \in F \mid \chi(E(m)) = H(m)\}$ 。従って, 各 H $\hookrightarrow$ いて, $\mathcal{F}(H) = \{E \in \mathcal{F} \mid \chi(E(m)) = H(m)\}$ が moduli を持つことを言えば, $\mathcal{F}$ が moduli を持つことになる。

Numerical polynomial H $\hookrightarrow$ いて

$$\Sigma(X, H) = \{E \mid E \text{ は } X \text{ 上の stable sheaf で, } \chi(E(m)) = H(m) \text{ となる}\} / \text{isom.}$$

とおく。

定理 1 $\mathbb{C}$ 上局所有限生成, separated な scheme $M(X, H)$ で, 次の性質を持つものがある;

- (a) bijection $\Sigma(X, H) \xrightarrow{\theta} M(X, H)$ が存在する,
- (b) $\mathbb{C}$ 上の locally noetherian scheme T , $X \times_{\mathbb{C}} T$ 上の T -flat coherent sheaf $E, \mathcal{E}$, $E|_{X \times \{t\}} \in \Sigma(X, H), \forall t$ があれば, map

$T \ni t \mapsto \theta(E|_{X \times \{t\}}) \in M(X, H)$ は schemes の morphism φ_E となる。
 しかも, schemes の morphism $g: T' \rightarrow T$ が与えらるると, $\varphi_E \circ g$
 $= \varphi_{(g \times 1)^*(E)}$ (scheme の morphisms として),

(C) $\mathbb{C}$ 上の scheme N と map $\theta': \Sigma(X, H) \rightarrow N$ の組が, 上の性質 (b) を持てば, $\psi \cdot \varphi_E = \varphi'_E$ となる morphism $M(X, H) \xrightarrow{\psi} N$ が一意的に存在する。ここで, φ'_E は (N, θ') に関しての (b) により存在する morphism。

上の (a) は $\Sigma(X, H)$ が "algebraic" な構造を持つことを意味する。(b) は (1) $\Sigma(X, H)$ に対して, (2) $\Sigma(X, H)$ は (C) のことである。又, $M(X, H) = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$, 各 M_i はある P^n の locally closed set で, M_i は $M(X, H)$ の open set, $M_i \subseteq M_{i+1}$. $M(X, H)$ が局所有限生成, separated であると言うのは, この意味と考えるといたかく (これの方が少し強い)。

定理 1 は, $\Sigma(X, H)$ が moduli を持つことを意味し, 従って stable sheaves の集合は moduli を持つ ことになる。

定理 1 をもっと強いものにするために, semi-stable sheaves の間にある同値関係を入れる。

命題 1 E を X 上の semi-stable sheaf とする。

- i) E の filtration $0 = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_t = E$ で, (a) E_i/E_{i-1} は stable ($1 \leq i \leq t$) (b) $P_{E_i}(m) = P_E(m)$ ($0 < i < t$), となるものがある。
- ii) filtration $0 = E'_0 \subset E'_1 \subset \dots \subset E'_s = E$ が上の性質 (a), (b) を

持ては, $t=\Delta$ で, $\{1, 2, \dots, t\}$ のある置換 σ が存在して, $E_i/E_{i-1} \cong E'_{\sigma(i)}/E'_{\sigma(i)-1}$.

上の filtration $0=E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_t=E$ について, $gr(E) = \bigoplus_{i=1}^t E_i/E_{i-1}$ とおく。上の命題により, $gr(E)$ は E のみより定まることになる。

定義 3 E_1, E_2 を X 上の semi-stable sheaves とする。 E_1 と E_2 が S-equivalent $\iff gr(E_1) \cong gr(E_2)$ 。 E_1 と E_2 が S-equivalent の時 $E_1 \sim_S E_2$ で表わす。

注意 $E_1 \sim_S E_2$ で, E_1 が stable $\Rightarrow E_1 \cong E_2$ 。

Numerical polynomial H について,

$$\bar{\Sigma}(X, H) = \left\{ E \mid \begin{array}{l} E \text{ は } X \text{ 上の semi-stable sheaf で,} \\ \chi(E(m)) = H(m) \text{ となる} \end{array} \right\} / \sim_S$$

とおく。上記注意により, $\Sigma(X, H)$ は $\bar{\Sigma}(X, H)$ の subset とみなせる。 E の S-equivalence class を $[E]$ と書く。

定理 2 $\mathbb{C}$ 上局所有限生成, separated な scheme $\bar{M}(X, H)$ で, 次の性質を持つものがある;

(a) bijection $\bar{\Sigma}(X, H) \xrightarrow{\bar{\theta}} \bar{M}(X, H)$ が存在する,

(b) $\mathbb{C}$ 上の locally noetherian scheme T , $X \times_{\mathbb{C}} T$ 上の T -flat coherent sheaf E で, $E|_{X \times \{t\}}$ semi-stable, $[E|_{X \times \{t\}}] \in \bar{\Sigma}(X, H), \forall t$ となるものがあれば, map $T \ni t \mapsto \bar{\theta}([E|_{X \times \{t\}}]) \in \bar{M}(X, H)$ は scheme の morphism $\bar{\varphi}_E$ となる。しかも, schemes の morphism $g: T' \rightarrow T$ が与

えらふと, $\bar{\varphi}_E \cdot g = \bar{\varphi}_{(1 \times g)^*(E)}$ (schemes の morphism として),

(c) $\mathbb{C}$ 上の scheme $\bar{N}$ と map $\bar{\theta}': \bar{\Sigma}(X, H) \rightarrow \bar{N}$ の組が, 上の性質 (b) を持つは, $\bar{\varphi} \cdot \bar{\varphi}_E = \bar{\varphi}'_E$ となる morphism $\bar{M}(X, H) \xrightarrow{\bar{\varphi}} \bar{N}$ が一意的に存在する。ここで, $\bar{\varphi}'_E$ は $(\bar{N}, \bar{\theta}')$ に関しての (b) より存在する morphism,

(d) $M(X, H)$ は自然に $\bar{M}(X, H)$ の open subscheme となる,

(e) $\bar{M}(X, H)$ は quasi-compact な "projective" (i.e. $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ の closed subscheme)。

注意 (e) について; $\dim X = 2$ 又は $\text{rank} = 2, 3, 4$ ならば, $\bar{M}(X, H)$ は projective になることがわかってゐる。それ以外はまだ open problem である。

(d), (e) は $\bar{M}(X, H)$ が $M(X, H)$ の自然な compact 化の最も良い候補であることを意味している。

定義 4 $M(X, H)$ の open set U について, $X \times U$ 上の coherent sheaf F が universal family であるとは, 次の性質を持つときと云ふ:

(i) F は U -flat,

(ii) $\forall t \in U, \theta(F|_{X \times \{t\}}) = t$ 。

Numerical polynomial H の degree n ならば,

$$H(m) = \sum_{i=0}^n a_i \binom{m+n-i}{n-i}, \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

と表わす。

$$\delta(H) = \text{G.C.D}\{a_0, \dots, a_n\}$$

定理3 $\delta(H)=1$ ならば, $M(X, H)$ の任意の quasi-compact open set は universal family を持つ.

$\dim X=1$ の時は, $\delta(H)=1 \Leftrightarrow \text{rank} \times \text{degree (1st Chern class)}$ が互に素. この場合は定理3はよく知られている.

特別な場合の $M(X, H)$, $\bar{M}(X, H)$ については, 種々の結果がある. $\dim X=1$ の時には, D. Mumford, M. S. Narasimhan, P. E. Newstead, S. Ramanan, C. S. Seshadri 等による深い研究がある.

$\dim X > 1$ の場合には, W. Barth, K. Hulek, J. Le Potier, 著者等による結果が知られている. $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, $\text{rank}=2$ の場合の結果を述べる.

定理4 $M(c_1, c_2)$, $\bar{M}(c_1, c_2)$ は 1st Chern class $= c_1$, 2nd Chern class $= c_2$, $\text{rank}=2$ の $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ 上の stable sheaves, semi-stable sheaves の moduli とする.

(a) $M(c_1, c_2)$ non-singular, quasi-projective, irreducible variety/ $\mathbb{C}$
 $\dim M(c_1, c_2) = 4c_2 - c_1^2 - 3$.

(b) $\bar{M}(c_1, c_2)$ normal, projective, irreducible variety/ $\mathbb{C}$, $\bar{M}(c_1, c_2)$ は $M(c_1, c_2)$ の open subscheme として含む.

(c) $M(c_1, c_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow 4c_2 - c_1^2 > 0, \neq 4$.

$\bar{M}(c_1, c_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow 4c_2 - c_1^2 \geq 0, \neq 4$

$4c_2 - c_1^2 = 0 \Rightarrow \bar{M}(c_1, c_2)$ は一点.

- (d) $M(C_1, C_2) \neq \bar{M}(C_1, C_2) \Leftrightarrow 4C_2 - C_1^2 \equiv 0 \pmod{8}$.
- (e) $\bar{M}(C_1, C_2)$ natural variety / $\mathbb{C}(i, e)$ 函数体が, $\mathbb{C}$ 上線超越拡大, "いゝかえれは", あるいは P^M と birational)
- (f) $M(C_1, C_2)$ が universal family を持つ $\Leftrightarrow 4C_2 - C_1^2 \not\equiv 0 \pmod{8}$.
- 上の結果のうち, (e) は W. Barth, K. Hulek による. (f) $\Rightarrow$ は J. Le Potier による.

文献について

定理 1 の証明は

M. Maruyama, Moduli of stable sheaves, I, J. Math. Kyoto Univ. 17, (1977).

による.

定理 2, 3, 4 については

M. Maruyama, Moduli of stable sheaves, II, J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978).

を参照.

その他

W. Barth. Moduli of vector bundles on the projective plane, Inventiones math. 42 (1977).

W. Barth and K. Hulek, Monads and moduli of vector bundles, Manuscripta Math. 25 (1978).

J. Le Potier, *Fibrés stables de rang 2 sur $P_2(\mathbb{C})$* , Preprint.

等と参照されたい。

H. Schneider, *Holomorphic vector bundles on P_n* , Sem.

Bourbaki 1978/79 n. 530.

はよい解説である。その文献表とあわせて参考されたい。

最後に、上の結果はほとんどすべて、universally Japanese ring 上有限生成な scheme S と、 S 上 smooth, projective, geometrically integral な scheme X により成立する。 $S = \text{Spec}(\mathbb{C})$ とした場合は説明が長くなるのを避けるためである。