

スケーリング変換のヤコビアンの正則化

無所属 (元信州大学) 浅田 明 (ASADA Akira)

Freelance Mathematician, (Former; Sinsyu University)

概要

有限次元の場合と違って、無限次元では 変数のスケーリング変換のヤコビアンは発散 (または 0) となるのが普通で 積分の計算ができなくなる。ここでは ζ -正則化の手法を使って、スケーリング変換のヤコビアンを正則化する。応用として、 D を正定値楕円形微分作用素としたとき 経路積分 $\int \exp(-\pi(x, Dx)) \mathcal{D}x$ の値が D のレイーシinger行列式で与えられることの 正当化 と、ヒルベルト空間 (にデターミナント・バンドルを付け加えた空間) の球面の正則化体積の計算を行う。経路積分にレイーシinger行列式が表れることの正当化は、以前 分数冪積分を用いて行ったが、スケーリング変換のヤコビアンの正則化として、もっと簡単 (自然) にできる。

1 Introduction

D を正値楕円形偏微分作用素 λ_n をその固有値、 $De_n = \lambda_n e_n$, とするとき ガウス型経路積分は形式的には

$$\begin{aligned} \int e^{-\pi(x, Dx)} \mathcal{D}x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_n}} = \frac{1}{\sqrt{\det D}} \end{aligned}$$

と計算されるが この式で $\det D$ は そのままでは意味がないので、Hawking によって D のレイーシinger行列式

$$\det D = e^{-\zeta'(D, 0)}, \quad \zeta(D, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-s},$$

を使う事が提案され 物理学者の間では広くみとめられている ([11])。以前 その数学的正当化を分数冪積分を使って与えたが ([4])、分数冪積分は計算しにくいので、有限次元のガウス積分と同様 スケーリング変換のヤコビアンを使って計算できれば、より実用的になる。もちろん無限次元では スケーリング変換の行列式は そのままでは定義できないので、正則化が必要である。この正則化を 以下に述べるように レイーシinger行列式の定義 ([1],[13],[15]) と同じ考えで定義する ([5])。

レイーシinger行列式は

$$\prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\lambda_n^{-s}}|_{s=0} = e^{\text{tr}(D^{-s} \log D)}|_{s=0},$$

と書ける。ただし $|_{s=0}$ は $s=0$ への解析接続を表す。一般に 線形作用素 T が $T = e^S$ と書ければ $S = \log T$ と書いて

$$\det_D T = e^{\text{tr}(D^{-s} S)}|_{s=0},$$

が存在するとき $\det_D T$ を T の D にかんする正則化行列式と呼ぶ ([6],[14] 参照)。 T がスケーリング変換 $T_a: T_a e_n = a_n e_n$, $a = (a_1, a_2, \dots)$ のとき

$$\det_D T_a = e^{\sum \lambda_n^{-s} \log a_n}|_{s=0} = \prod_{n=1}^{\infty} a_n^{\lambda_n^{-s}}|_{s=0},$$

だから $\det_D T_a =: \prod_n a_n$ となる。ただし $\prod_n a_n$ は正則化無限積である ([2])。 x_n を変数と考えたとき $\prod_n x_n$ は 各 x_n について線形である。したがって、

$$\frac{\partial^N}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_N}} : \prod_{n=1}^{\infty} x_n := \prod_{n \notin \{i_1, \dots, i_N\}} x_n,$$

となるが、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial^N}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} \prod_{n=1}^{\infty} x_n := \lim_{N \rightarrow \infty} : \prod_{n=N+1}^{\infty} x_n :,$$

は 通常の意味では計算できない。しかし 適当な関数空間上の弱微分としては

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial^N}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} : \prod_{n=1}^{\infty} x_n := 1, \quad (1)$$

が成立する ([5])。これから $T_a^* f(x) = f(T_a x)$ としたとき

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial^N}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} x_1^{\lambda_1^{-s}} \cdots x_N^{\lambda_N^{-s}} \right| T_a^* f(x) d^N x|_{s=0} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} | : \prod_{n=1}^{\infty} a_n : |^{-1} f(x) d^N x, \end{aligned} \quad (2)$$

となり T_a のヤコビアンが $\prod_n |a_n| := |\det_D T_a|$ と正則化される。ただし次のことが問題になる。

- (1). f は (1) が成立する関数空間にぞくしているか?
 (2). $:\prod_n x_n:$ は f の定義されている空間の変数に対して意味があるか?

(1) については $(\mathbb{R}^n$ ではなく $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ での積分の極限だが)

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+^N} \left(\frac{\partial^N}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} x_1^{\lambda_1^{-s}} \cdots x_N^{\lambda_N^{-s}} \right) e^{-(x_1 + \cdots + x_N)} d^N x \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \Gamma(1 + \lambda_n^{-s}) \end{aligned}$$

であり $\log \Gamma(1+x) = -\gamma x + \sum_{m \geq 2} (-1)^m \zeta(m)/m x^m$ だから ([9])

$$\log \prod_{n=1}^{\infty} \Gamma(1 + \lambda_n^{-s}) = -\gamma \zeta(D, s) + \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \frac{\zeta(m)}{m} \zeta(D, ms),$$

となって、右半平面の実軸と虚軸に接しない道 $\gamma(s): \gamma(0) = 0$ に沿って解析接続すれば

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+^N} \left(\frac{\partial^N}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} x_1^{\lambda_1^{-s}} \cdots x_N^{\lambda_N^{-s}} \right) e^{-(x_1 + \cdots + x_N)} d^N x|_{s=0} = 1,$$

となり f が $\mathbb{R}_+^n$ でソボレフ $1-L^1$ の関数であれば $f \exp(-\sum_{m \geq n+1} x_m)$ に対して (1) が成立する。 $\exp(-\pi \sum x_n^2)$ にたいしても同様の計算ができるから、かなりの関数に対して、(2) が適用できる。ただし解析接続の道として実軸は取れないから「積分」としては「架空」の感じがするのは否定できない。

(2) については 関数空間としてヒルベルト空間 H を考えるのは適切でなく H を少し拡張した空間で考えなければならない ([3], [4])。この拡張された空間は ほぼ H にデターミナント・バンドルを付け加えた空間である ([3])。

$\exp(-\pi(\sum_n x_n^2))$ を含む空間の上の弱微分として (1) が成立するから

$$\int e^{-\pi(x, Dx)} \mathcal{D}x = \frac{1}{\sqrt{\det D}},$$

が (2) から得られる。また 極座標を使って、計算すれば 「球面」 の正則化体積要素

$$: d^\infty \omega := \prod_{n=1}^{\infty} \sin^{\nu-n-1} \theta_n d\theta_n, \quad : d^\infty x := r^{\nu-1} dr : d^\infty \omega :,$$

が導かれる ([4])。ただし $\nu = \zeta(D, 0)$ である。またこの場合 球面は H ではなく H の極座標で 現れる緯度変数をすべて独立と考えた空間 (H より 1 次元高い空間) の球面 $\hat{S}^\infty$ としなければならない。その場合 上の「体積要素」による (単位球面) の正則化「体積」は

$$\text{vol}(\hat{S}^\infty) = \frac{2\pi^{\nu/2}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})},$$

となる。

本稿の概要は次のとおりである。レーシングー行列式 ([1],[4],[13],[15]) と正則化行列式を 2 節で、3 節で正則化無限積 ([2],[4]) を説明する。正則化無限積の弱微分は 4 節で計算される ([5])。ヤコビアン の計算は全空間 (5 節), 「立方体」 (6 節) で行われる ([5])。これらの計算は正則化因子

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_n^{\mu_n^s} |_{s=0},$$

を利用して行われる。7 節ではヒルベルト空間の極座標について説明する。ヒルベルト空間は最後の座標がないので、経度がなく 緯度も独立ではない。緯度をすべて独立になるよう空間を拡張すれば 1-次元あがる。この付け加えられた次元は デターミナント・バンドル (のファイバー) 的なものである ([3])。これを付け加えることによって 拡張された空間の球面にたいして正則化体積要素と正則化体積が 8 節で求められる。

2 レーシングー行列式と正則化行列式

D がコンパクト多様体の上で定義された楕円形偏微分作用素のとき、そのスペクトラル ζ -関数 $\zeta(D, s) = \text{tr}(D^{-s}) = \sum_n \lambda_n^{-s}$ は $s = 0$ で正則になり D のレーシングー行列式 $\det D$ は

$$\det D = e^{-\zeta'(D, s)|_{s=0}} = \prod_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\lambda_n^{-s}} |_{s=0},$$

で定義される ([13])。 D が正定値でなければ λ_n^{-s} は λ_n の偏角のとり方に関係するから $\zeta(D, s)$ は一意ではない。したがってそのレーシングー行列式も一意には決まらない。固有値に無関係に偏角が取れるとき その角を Agmon angle θ といい 一般の楕円形微分作用素については θ に関係して ζ -関数や レーシングー行列式が決まる。 D が自己共役のときは

$$\zeta(D, s) = \sum_{\lambda_n > 0} \lambda_n^{-s} + (-1)^s \sum_{\lambda_n < 0} |\lambda_n|^{-s},$$

と書けば、 $-1 = \exp(\pi i)$ とするか $-1 = \exp(-\pi i)$ とするかによって、 $\zeta(D, s)$ は 2 種類ある ([1])。前者を $\zeta_+(D, s)$ 、後者を $\zeta_-(D, s)$ と書く。 D の η -関数

$$\eta(D, s) = \sum_n \operatorname{sgn}(\lambda_n) |\lambda_n|^{-s} = \sum_{\lambda_n > 0} \lambda_n^{-s} - \sum_{\lambda_n < 0} |\lambda_n|^{-s},$$

を使うと

$$\zeta_{\pm}(D, s) = \frac{\zeta(|D|, s) \pm \eta(D, s)}{2}, \quad \zeta(|D|, s) = \eta(D^2, \frac{s}{2}),$$

である。 $\nu = \zeta(|D|, 0)$, $\nu_{\pm} = \zeta_{\pm}(D, 0)$ とおけば

$$\det(D) = (-1)^{\nu} \det|D|, \quad \det|D| = \det D_+ \cdot \det D_-, \quad (3)$$

$$D_{\pm} = \frac{|D| + D}{2},$$

となる。したがって ([1], [15])

定理 D が自己共役のとき $\det D$ が一意的にきまること、 $\det D$ が実数になること および $\nu_{\pm}$ が整数になること は同値である。

レイシンガー行列式の定義は $\det D = \exp(\operatorname{tr}(D^{-s} \log D))|_{s=0}$ と書けるので、一般に $T = \exp(S)$ となるとき T の (D に関する) 正則化行列式を

$$\det_D T = e^{\operatorname{tr}(D^{-s} S)}|_{s=0},$$

で定義する (S は一意的でないから一般には一意的ではない)。

注意 D が正でないが自己共役なとき

$$D^{-s} = D_+^{-s} + (-1)^{-s} |D_-|^{-s}, \quad e^{-i\pi s} - e^{\pi s} = -2i \sin \pi s,$$

だから $\det_D T$ の定義は D^{-s} のとり方には関係しない。

D の固有関数を $e_n : D e_n = \lambda_n e_n$ とし、 T_x , $x = (x_1, x_2, \dots)$ を $T_x e_n = x_n e_n$, $x = (x_1, x_2, \dots)$ で定めれば

$$\det_D T_x = \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{\lambda_n^{-s}}|_{s=0},$$

だから以前に定義した 正則化無限積: $\prod_n x_n$: になる。 $x_n > 0$ で無ければ 正則化無限積: $\prod_n x_n$: は かならずしも一意的に決まらないが、

$$|: \prod_{n=1}^{\infty} x_n :| =: \prod_{n=1}^{\infty} |x_n| :;$$

が成立する。また $e_1, e_2, \dots$ で張られるヒルベルト空間 H では T_x はスケール変換である。

例 1 $T = tI, t > 0; I$ は恒等作用素であれば: $\prod_n t := t^{\zeta(D,s)}|_{s=0} = t^\nu$
 だから $\det_D tI = t^\nu$, また

$$\det_D(T_1 T_2) = \det_D T_1 \cdot \det_D T_2, \quad \text{if } T_1 T_2 = T_2 T_1,$$

だから $tT = tI \cdot T$ により

$$\det_D(tT) = t^\nu \det_D T,$$

である。

例 2 $(Te_n, e_n) = x_n, (Se_n, e_n) = \log x_n$ であれば $\text{tr}(D^{-s}S) = \sum \lambda_n \log x_n$ だから

$$\det_D T =: \prod_{n=1}^{\infty} x_n :,$$

である。特に

$$T = T_x + N, \quad T_x N = N T_x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|N^n\|^n = 0,$$

であれば $\det_D T = \det_D T_x =: \prod_n x_n :$ である。

注意 $x \notin H$ であっても T_x は (H の中で定義された作用素) として定義できる。たとえば $x_n = \lambda_n$ であれば $T_x = D$ だから T_x の定義域は D の定義域と一致し、 H ではない。

以下では D の代わりに $G = D^{-1}$, $\mu_n = \lambda_n^{-1}$ を使い $\det_D T$ を $\det_G T$ とも書く。このときは

$$: \prod_{n=1}^{\infty} x_n := \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{\mu_n^s} |_{s=0}$$

である。また $\zeta(D, s)$ の代わりに $\zeta(G, s) = \text{tr}(G^s) (= \zeta(D, s))$ を使う。

注意 $T = e^S$ なら $P^{-1}TP = e^{P^{-1}SP}$, $\text{tr}(G^s, P^{-1}SP) = \text{tr}(P^{-1}G^s P, S)$ だから

$$\det_G(P^{-1}TP) = \det_{P^{-1}GP} T,$$

が成立する。特に $PG = GP$ であれば $\det_G(P^{-1}TP) = \det_G T$ である。

3 正則化無限積

$\{H, G\}$ をヒルベルト空間 H とその上の非退化で正の Schatten class 作用素 G で その ζ -関数 $\zeta(G, s) = \text{tr}(G^s)$ が $s = 0$ で 正則なものとの組とする。 G の固有値とそれに属する正規化された固有関数を μ_n, e_n : $Ge_n = \mu_n e_n, \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots > 0$, とし H の完備正規直交系は $\{e_n\}$ に固定する。 また $x \in H$ の座標は $x = (x_1, x_2, \dots)$, $x = \sum_n x_n e_n$ とする。

例 X をコンパクト リーマン多様体 E をその上のベクトル・バンドルとし、 D を E の切断に働く 非退化自己共役 楕円形 (擬) 微分作用素とする。 H を E の (二乗可積分な) 切断の作るヒルベルト空間、 G を D のグリーン作用素とすると $\{H, G\}$ が 上記の組の例になる ([10])。

注意 この組は Connes の spectral triple と良く似ているが、 spectral triple ほどの一般性は無い。 しかし より具体的である ([4],[7])。

$\{H, G\}$ は 次のような (不変) 量をもつ。

1. 正則化次元 : $\nu = \zeta(G, 0)$.
2. $d: \zeta(G, s)$ の最初の極の位置.
3. $\det.G, \zeta(G, -d/2)$.

定義から $\sum \mu_n^c e_n \in H, c > d/2, \mu_n^{d/2} e_n \notin H$ である。 3 番目の $\det.G$ や $\zeta(G, -d/2)$ は意味が不明確だが、 $H = L^2(X)$ のとき

$$d = \frac{\dim.X}{m}, \quad m = \text{ord}.D,$$

だから d は H が d -次元空間上の関数空間 に近いことをあらわす。

H のノルムを $\|\cdot\|$ とし $x \in H$ の k -ソボレフ ノルムを

$$\|x\|_k = \|G^{-k}x\|, \quad (4)$$

で導入する。 また このノルムと H から作られたソボレフ空間を W^k とする。 W^k の完備正規直交系は $\{e_{n,k}\}$, $e_{n,k} = \mu_n^k e_n$ であたえられ 正則化次元は H と同じ ν である。

$$e_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{d/2} e_n, \quad e_{\infty,k} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{d/2} e_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{k+d/2} e_n,$$

とおけば

$$e_\infty \notin H, e_\infty \in W^k, k < 0, \quad e_{\infty,k} \notin W^k, e_{\infty,k} \in W^l, l < k, \quad (5)$$

である。 集合として $W^k \subset W^l, k > l$ だが

$$H^- = \bigcap_{l < 0} W^l, W^{k-0} = \bigcap_{l < k} W^l, \quad H^+ = \bigcup_{l > 0} W^l, W^{k+0} = \bigcup_{l > k} W^l, \quad (6)$$

とおけば $e_\infty \in H^-$, $e_{\infty,k} \in W^{k-0}$ だから $H \subsetneq H^-$, $W^k \subsetneq W^{k-0}$ である。位相を考えに入れたとき $(H^-)^\dagger = H^+$, $(W^{k-0})^\dagger = W^{k+0}$ であるが、以下では H^+ , W^{k+0} は使わない。

定義 空間 $H^-(finite)$, $H^-(0)$ を

$$H^-(finite) = \{x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H^- \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{-d/2} x_n \text{ exists}\}, \quad (7)$$

$$H^-(0) = \{x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H^- \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{-d/2} x_n = 0\}, \quad (8)$$

で定義する。同様に $W^{k-0}(finite)$, $W^{k-0}(0)$ も定義される。

定義から $x \in H^-$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{-d/2} x_n = t$ とおけば

$$x = y + t e_\infty, \quad y \in H^-(0), \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n, \quad y_n = x_n - t \mu_n^{d/2},$$

である。同様に $x \in W^{k-0}(finite)$ なら $x = y + t e_{\infty,k}$, $y \in W^{k-0}(0)$ と一意にかける。したがって

$$H^-(finite) = H^-(0) \oplus \mathbb{R} e_\infty, \quad W^{k-0}(finite) = W^{k-0}(0) \oplus \mathbb{R} e_{\infty,k}, \quad (9)$$

である。位相空間として $H^-(0)$ は H^- の部分空間と考えるが、 $H^-(finite)$ は $H^-(0)$ と $\mathbb{R}$ の積空間と考える。

$x = y + t e_\infty \in H^-(finite)$ とし、 $t \neq 0$ とすれば $x_n = y_n + t \mu_n^{d/2}$ の正則化無限積: $\prod_n x_n$: は

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} (y_n + t \mu_n^{d/2})^{\mu_n^s} &= t^{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^s} \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n^{\frac{d}{2} \mu_n^s} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{y_n}{t \mu_n^{d/2}})^{\mu_n^s} \\ &= t^{\zeta(G,s)} (\prod_{n=1}^{\infty} \mu_n^{\mu_n^s})^{d/2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{y_n}{t \mu_n^{d/2}})^{\mu_n^s}, \end{aligned}$$

だから $\prod_n (1 + y_n/(t \mu_n^{d/2}))$ が収束すれば存在し

$$: \prod_{n=1}^{\infty} x_n := t^\nu (det.G)^{d/2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{y_n}{t \mu_n^{d/2}})^{\mu_n^s} \Big|_{s=0}, \quad (10)$$

となる。同様に $x = y + t e_{\infty,k} \in W^{k-0}(finite)$, $t \neq 0$ であれば $x = \sum x_n e_{n,k} = \sum x_n \mu_n^k e_n = \sum_n x_{n,k} e_n$, $\sum_n x_n e_n \in H^-(finite)$ だから、

$$: \prod_{n=1}^{\infty} x_{n,k} := (det.G)^k : \prod_{n=1}^{\infty} x_n :, \quad (11)$$

である。よって $H^-(finite)$ や $w^{k-0}(finite)$ では その稠密な部分集合の元にたいして、正則化無限積が定義できる。なお $t > 0$ で無ければ ν が整数でないとき正則化無限積は t の偏角の選び方に関係し、必ずしも一意ではない。

定理 正則化無限積は 各変数 x_n について線形で すべての n について $x_n > 0$ なら $:\prod_n x_n: > 0$, また

$$|:\prod_{n=1}^{\infty} x_n:| =: \prod_{n=1}^{\infty} |x_n|:, \quad (12)$$

が成立する。

注意 $x = \sum x_n e_n \in H \cap H^-(finite)$ のとき $:\prod_n x_n:$ は存在しないが、 $\nu > 0$ であれば $:\prod_n x_n := 0$ として良い。

$\prod_n (tx_n)^{\mu_n^s} = t^{\zeta(G,s)} \prod_n x_n$ だから

$$:\prod_{n=1}^{\infty} tx_n := t^{\nu} : \prod_{n=1}^{\infty} x_n :,$$

である。また各 x_n が実数で 有限個 (p 個) を除いて $x_n < 0$ であれば

$$:\prod_{n=1}^{\infty} x_n := (-1)^{\nu-p} : \prod_{n=1}^{\infty} |x_n| :,$$

となる。したがって ν が整数でなければ $:\prod_n x_n:$ は一価ではない。

4 正則化無限積の弱微分

正則化無限積は各変数について 線形だから

$$\frac{\partial^N}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_N}} : \prod_{n=1}^{\infty} x_n :=: \prod_{j \notin \{i_1, \dots, i_N\}} x_j :$$

と思える。したがって

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial^N}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} : \prod_{n=1}^{\infty} x_n := 1 \quad (13)$$

が成立する事が期待されるが、微分を通常の意味とするとこの極限は計算できない。この節では 適当な弱微分の意味でこれが成立することを示す ([5], [12] 参照)。

例 1 $\int_0^\infty \frac{d}{dx} x^c e^{-x} dx = \Gamma(1+c)$ だから

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left(\frac{\partial^N}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_N^{\mu_N^s} \right) e^{-(x_1 + \cdots + x_N)} dx_1 \cdots dx_N \\ &= \prod_{n=1}^\infty \Gamma(1 + \mu_n^s), \end{aligned}$$

である。 $\log(\Gamma(1+x)) = -\gamma x + \sum_{m \geq 2} (-1)^m (\zeta(m)/m) x^m$ だから

$$\sum_{n=1}^\infty \log(\Gamma(1 + \mu_n^s)) = -\gamma \zeta(G, s) + \sum_{m \geq 2} (-1)^m \frac{\zeta(m)}{m} \zeta(G, ms),$$

となる。したがって、 $\prod_n \Gamma(1 + \mu_n^s)$ は 右半平面 $\{z | \Re z > 0\}$ に解析接続され 特異点は実軸の上で 0 に集積する。これから s が右半平面の中の区分的に滑らかで、実軸と虚軸に接しない道に沿って、0 に近づけば

$$\lim_{s \rightarrow 0} \prod_{n=1}^\infty \Gamma(1 + \mu_n^s) = 1, \quad (14)$$

となる。よって

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+^N} \left(\frac{\partial^N}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_N^{\mu_N^s} \right) e^{-x_1 - \cdots - x_N} d^N x \Big|_{s=0} \\ &= 1, \quad s = \gamma(t), \quad \gamma(0) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

となる。但し γ は 右半平面の実軸 および虚軸に接しない道である。

有限変数の関数にたいしては f が適当な可積分条件を満たせば

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}_+^N} \left(\frac{\partial^N}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_N^{\mu_N^s} \right) f(x_1, \dots, x_N) d^N x \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^N} f(x_1, \dots, x_N) d^N x, \end{aligned} \quad (16)$$

だから、(15) によって正成分の無限次元ベクトルの作る空間 $\mathbb{R}_+^n$ の上のソボレフ L^1 型の関数空間を $L^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)$, $L^{1,1}(\mathbb{R}_+^\infty)$ を

$$\bigcup_{n=1}^\infty \{f(x_1, \dots, x_n) e^{-\sum_{m>n} x_m} | f \in L^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)\},$$

のソボレフ (1,1)-型完備化とすれば $L^{1,1}(\mathbb{R}_+^\infty)$ 上の弱微分として (1) が成立する。

例 2 $\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{d}{dx} x^c| f(x) dx = \int_0^{\infty} (\frac{d}{dx} x^c) f(x) dx + \int_{-\infty}^0 (\frac{d}{dx} |x|^c) f(x) dx$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{d}{dx} x^c| e^{-\pi x^2} dx = 2\pi^{-c/2} \Gamma(1 + \frac{c}{2})$$

である。 $e^{-\pi \sum_n x_n^2}$ は各変数について 偶関数だから

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} |\frac{\partial^N}{\partial x_1 \dots \partial x_N} x_1^{\mu_1^s} \dots x_N^{\mu_N^s}| e^{-\pi(x_1^2 + \dots + x_N^2)} d^N x|_{s=0} \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^N} (\frac{\partial^N}{\partial x_1 \dots \partial x_N} (2x_1)^{\mu_1^s} \dots (2x_N)^{\mu_N^s}) e^{-\pi(x_1^2 + \dots + x_N^2)} d^N x|_{s=0}, \end{aligned}$$

とすれば

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\frac{\partial^N}{\partial X_1 \dots \partial x_N} x_1^{\mu_1^s} \dots x_N^{\mu_N^s}| e^{-\pi(x_1^2 + \dots + x_N^2)} d^N x|_{s=0} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\mu_n^s} \Gamma(1 + \mu_n^s/2)}{\pi^{\mu_n^s/2}}|_{s=0}, \end{aligned}$$

となる。 例 1 と同様に

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(\frac{2^{\mu_n^s} \Gamma(1 + \mu_n^s/2)}{\pi^{\mu_n^s/2}} \right) \\ &= \left(\log 2 - \frac{\pi}{2} - \gamma \right) \zeta(G, s) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} \zeta(G, \frac{n}{2}s), \end{aligned}$$

だから $\prod_n (2^{\mu_n^s} \Gamma(1 + \mu_n^s/2)) / \pi^{\mu_n^s}$ は 右半平面に解析接続可能である。また $(2\Gamma(1 + 1/2)) / (\sqrt{\pi}) = 1$ だからアーベルの連続性定理により γ が右半平面の実軸・虚軸に接しない道で $\gamma(0) = 0$ のとき $s = \gamma(t)$ であれば

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\frac{\partial^N}{\partial x_1 \dots \partial x_N} x_1^{\mu_1^s} \dots x_N^{\mu_N^s}| e^{-\pi(x_1^2 + \dots + x_N^2)} d^N x|_{s=0} = 1, \quad (17)$$

となる。よって $W^1(\mathbb{R}^\infty)$ を

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{f(x_1, \dots, x_n) e^{-\pi \sum_{m>n} x_m^2} | f \in W^1(\mathbb{R}^n)\},$$

の ソボレフ 1 型完備化とすれば、 $W^1(\mathbb{R}^\infty)$ の双対空間の元としての弱微分として、(1) が成立する。

注意 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x_n^2} dx_n$ を $\int_0^{\infty} 2^{\mu_n^s} e^{-\pi x_n^2} dx_n|_{s=0}$ と正則化するのは人工的だが「立方体」上の積分の極限と考えれば ある程度の正当化が可能である。

5 スケーリング変換のヤコビアン の正則化

H 、あるいは $W^{k-0}(finite)$ 上の関数 f に対し $T_a^* f$ を

$$T_a^* f(x) = f(T_a x), \quad a = (a_1, a_2, \dots), \quad T_a x = (a_1 x_1, a_2 x_2, \dots), \quad (18)$$

で定義する。

注意 $a \in H$ は仮定しない。したがって T_a の定義域 (像) は必ずしも H ではない。例えば $a_n = \lambda_n$ であれば T_a の定義域は (H の部分集合としての) W^1 になる (あるいは H から W^{-1} への写像)。

以下 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f d^n x$ が存在するとする ($f \in W^1(\mathbb{R}^\infty)$ とする)。

$$\int_{-\infty}^{\infty} c x^{c-1} f(ax) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |a|^c c y^{c-1} f(y) dy, \quad y = ax,$$

だから f が例 2 で使われた関数空間に属していれば

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_n^{\mu_n^s} \right| T_a^* f d^n x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |a_1|^{-\mu_1^s} \cdots |a_n|^{-\mu_n^s} \left| \frac{\partial^n}{\partial y_1 \cdots \partial y_n} y_1^{\mu_1^s} \cdots y_n^{\mu_n^s} \right| f(y) d^n y, \end{aligned}$$

となる。これから: $\prod_n a_n$: が存在すれば

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_n^{\mu_n^s} \right| T_a^* f d^n x \Big|_{s=0} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left| : \prod_{n=1}^{\infty} a_n : \right|^{-1} f d^n x, \end{aligned} \quad (19)$$

である。この式からスケーリング変換 T_a のヤコビアンは: $\prod_n a_n$: と正則化されたことになる。また特に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_n^{\mu_n^s} \right| e^{-\pi(x, Dx)} d^n x \Big|_{s=0} = \frac{1}{\sqrt{\det D}}, \quad (20)$$

となる。この式はガウス型経路積分の値がレーシンガー行列式に正則化される解析接続の方法を与えている と解釈できる。

注意 $x \in H$ であれば: $\prod_n x_n := 0$ だから この計算に意味をつけるには 積分を $H^-(finite)$ の上で考えた と解釈する必要がある。

$e^{-\pi \sum_n x_n^2}$ は $H^-(finite)$ の上では定義されていないが、 $x \notin H$ であれば $\sum_n x_n^2 = \infty$ だから $H^-(finite)$ で

$$e^{-\pi \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} = \begin{cases} e^{-\pi \|x\|^2} & x \in H^-(finite) \cap H \\ 0 & x \in H^-(finite) \setminus H \end{cases}$$

と定義できる。同様に $e^{-\pi(x, Dx)}$ も本来の定義域 $W^{1/2}$ から定義域を拡張して $W^{1/2-0}(finite)$ の上の関数にできる。したがって上の注意から (20) は

$$\int_{W^{1/2-0}(finite)} e^{-\pi(x, Dx)} \mathcal{D}x = \frac{1}{\sqrt{\det D}}, \quad (21)$$

と解釈できる。

注意 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x_n^2} dx_n$ を $\int_0^{\infty} 2^{\mu_n^s} e^{-\pi x_n^2} dx_n|_{s=0}$ と正則化するのを正当化するには 積分の場所を $W^{k-0}(finite)$, $k < -d/2$ としたほうがよい (6 節末の注意 2 参照)。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+^n} f(x) d^n x$ が存在するときも ($f \in L^{1,1}(\mathbb{R}_+^\infty)$ のときも) $a \gg 0$; $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots$ であれば $y_n = a_n x_n$ として

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_n^{\mu_n^s} \right) T_a^* f(x) d^n x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+^n} a_1^{-\mu_1^s} \cdots a_n^{-\mu_n^s} \left(\frac{\partial^n}{\partial y_1 \cdots \partial y_n} y_1^{\mu_1^s} \cdots y_n^{\mu_n^s} \right) f(y) d^n y, \end{aligned}$$

となるから: $\prod_n a_n$: が存在すれば

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_n^{\mu_n^s} \right) T_a^\# f(x) d^n x|_{s=0} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\prod_{n=1}^{\infty} a_n \right)^{-1} f(x) d^n x, \end{aligned} \quad (22)$$

である。(19), (22) から

定理 $W^1(\mathbb{R}^\infty)$ または $l^{1,1}(\mathbb{R}_+^\infty)$ の元に対する積分では、スケーリング変換 T_a のヤコビアンは

$$\det_G T_a =: \prod_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (23)$$

と正則化される。

注意 (22) も積分は $H_+ = \{x \in H | x = (x_1, x_2, \dots) \gg 0\}$ では無く $H^-(finite)_+ = \{x \in H^-(finite) | x \gg 0\}$ で行われていると解釈すべきである。

6 「立法体」での積分

$a \in H^-(finite)$, $a \gg 0$ のとき $H^-(finite)$, $H^-(finite)_+$ での「立方体」 $Q(a)$, $Q(a, +)$ を

$$Q(a) = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in H^-(finite) \mid |x_n| \leq a_n\}, \quad (24)$$

$$Q(a, +) = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in H^-(finite)_+ \mid 0 \leq x_n \leq a_n\}, \quad (25)$$

で定義する。また

$$Q(a, n) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid |x_1| \leq a_1, \dots, |x_n| \leq a_n\}, \quad (26)$$

$$Q(a, n, +) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_1 \leq a_1, \dots, 0 \leq x_n \leq a_n\}, \quad (27)$$

とおく。 $b \gg 0$; $b = (b_1, b_2, \dots)$ のとき

$$a \cdot b = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots), \quad b^{(-1)} = (b_1^{-1}, b_2^{-1}, \dots), \quad (28)$$

と書くことにする。同様に $a \in W^{k-0}(finite)$ であれば $W^{k-0}(finite)$ の立方体 $Q(a)$, $Q(a, +)$ も定義される。特に $\varepsilon = (1, 1, \dots) \in W^{-1/2-0}(finite)$ だから $Q(\varepsilon)$, $Q(\varepsilon, +)$ が $W^{1/2-0}(finite)$ の部分集合として定義される。 $Q(\varepsilon, +)$ の上の定数関数 1 については

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q(\varepsilon, n, +)} 1 d^n x = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_n 1 = 1,$$

となる。他方 $Q(\varepsilon)$ 上では定数関数 1 の積分は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 2^{\mu_1^s} dx_1 \cdots \int_0^1 2^{\mu_n^s} dx_n \big|_{s=0} = \prod_{n=1}^{\infty} 2^{\mu_n^s} \big|_{s=0} = 2^{\zeta(G, s)} \big|_{s=0} = 2^\nu,$$

と正則化する。一般に $t\varepsilon = (t, t, \dots)$, $t > 0$ として、 $Q(t\varepsilon, +)$, $Q(t\varepsilon)$ での定数関数 1 の積分は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 t^{\mu_1^s} dx_1 \cdots \int_0^1 t^{\mu_n^s} dx_n \big|_{s=0} = t^{\zeta(G, s)} \big|_{s=0} = t^\nu, \quad (29)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (2t)^{\mu_1^s} dx_1 \cdots \int_0^1 (2t)^{\mu_n^s} dx_n \big|_{s=0} = (2t)^\nu, \quad (30)$$

と正則化する。

(28) により f が $Q(b)$ ($Q(b, +)$) で定義されていれば $T_a^* f$ は $Q(a^{(-1)} \cdot b)$ ($Q(a^{(-1)} \cdot b, +)$) で定義される。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q(a, n)} f(x) d^n x = \int_{Q(a)} f(x) d^\infty x, \quad (31)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q(a, n, +)} f(x) d^n x = \int_{Q(a, +)} f(x) d^\infty x, \quad (32)$$

と書くことにし、その存在を仮定すれば

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q(a(-1), b, n)} \left| \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_n^{\mu_n^s} \right| T_a^* f(x) d^n x \Big|_{s=0} \\ &= \int_{Q(b)} | : \prod_{n=1}^{\infty} a_n : | f(x) d^\infty x, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q(a(-1), b, n, +)} \left(\frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_n^{\mu_n^s} \right) T_a^* f(x) d^n x \Big|_{s=0} \\ &= \int_{Q(b, +)} : \prod_{n=1}^{\infty} a_n : f(x) d^\infty x, \end{aligned} \quad (34)$$

となる。したがって

定理 $Q(b)$, $Q(b, +)$ 上の積分についてもスケーリング変換 T_a のヤコビアンは $| : \prod_n a_n : |^{-1}$ と正則化される。

例 1 $T_t x = tx$ とすれば $W^{-1/2-0}(\text{finite})$ で $T_t Q(\varepsilon, +) = Q(t\varepsilon, +)$ だから

$$\int_{Q(t\varepsilon, +)} 1 d^\infty x = \int_{Q(\varepsilon, +)} : \prod_{n=1}^{\infty} t : 1 d^\infty x = t^\nu,$$

となって (29) が正当化される。

例 2 $T_a Q(\varepsilon, +) = Q(a, +)$ だから $: \prod_n a_n :$ が存在すれば

$$\int_{Q(a, +)} 1 d^\infty x = \int_{Q(\varepsilon, +)} : \prod_{n=1}^{\infty} a_n : 1 d^\infty x = : \prod_{n=1}^{\infty} a_n : d^\infty x,$$

となる。したがって $Q(a, +)$ の正則化体積 $\text{vol}(Q(a, +)) :$ を

$$: \text{vol}(Q(a, +)) : = : \prod_{n=1}^{\infty} x : \quad (35)$$

で定義できる。

注意 1 平行移動変換 t_a を $t_a x = x + a$ で定義すれば $t_a Q(a) = Q(2a, +)$ である。有限次元では平行移動のヤコビアンは 1 だから t_a の正則化ヤコビアンも 1 とすれば (30) も (35) から正当化されることになる。なお

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_n) dx_n = \lim_{a_n \rightarrow \infty} \int -a_n^{a_n} f(x_n) dx_n,$$

と見れば $\int_{-\infty}^{\infty} f(x_n) dx_n = \int_0^{\infty} 2^{\mu_n^s} f(x_n) dx_n$ の正則化が 正当化されたことになる。

注意 2 一般に $Q(a)$ が $W^{k-0}(\text{finite})$ の「立方体」であれば

$$\bigcup_{t>0} Q(ta) = W^{k-0}(\text{finite}),$$

だが 積分については $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q(a,n)} f(x) d^n x$ が (無限積として) 収束するには $k < -d/2$ が必要である。したがって (21) も $(\exp(-\pi(x, Dx)))$ を $W^{k-0}(\text{finite})$, $k < -d/2$, に拡張して $W^{k-0}(\text{finite})$ での積分と考える方が良いかもしれない。

7 ヒルベルト空間の極座標と経度

$x = (x_1, x_2, \dots) \in H$, $\|x\| = r$ とする。 x の極座標を

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta_1, \quad x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \dots, \\ x_n &= r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-1} \cos \theta_n, \dots \quad 0 \leq \theta_i \leq \pi, \end{aligned} \quad (36)$$

とする。この座標は動径と緯度は有るが経度は無い。また $r^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + r^2 \sin^2 \theta_1 \cdots \sin^2 \theta_n$ だから緯度 $\theta_1, \theta_2, \dots$ は独立ではなく制約

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_n = 0, \quad (37)$$

をみたす。この制約をはずし $\theta_1, \theta_2, \dots$ を独立と見たとき $0 \leq \theta_i \leq \pi$ から $0 \leq \sin \theta_i \leq 1$ だから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_n = \prod_{n=1}^{\infty} \sin \theta_n = t_{\infty}, \quad (38)$$

は存在し $0 \leq t_{\infty} \leq 1$ である。

H の「経度」 ϕ ; $-\pi \leq \phi \leq \pi$ を導入し、「緯度」 $\theta_1, \theta_2, \dots$ を独立と見て、

$$y = r t_{\infty} \cos \phi, \quad z = r t_{\infty} \sin \phi,$$

とおく。 H に経度 (変数 y, z) を付け加ええた空間を

$$\bar{H} = \{(x, y, z) | x \in H\} \cong H \oplus \mathbb{R}^2, \quad (39)$$

$$\hat{H} = \{(x, y, z) | x \in H, \phi = \pm \frac{\pi}{2}\} \cong H \oplus \mathbb{R}, \quad (40)$$

とする。 $(x, y, z) \in \bar{H}$ のノルムを $\|(x, y, z)\|^2 = \|x\|^2 + y^2 + z^2$ とし、 $\bar{H}$, $\hat{H}$, H の半径 r の「球面」を、それぞれ $\bar{S}_r^{\infty}$, $\hat{S}_r^{\infty}$, S_r^{∞} とする。特に $r = 1$ の時 (単位球面のとき) S^{∞} , $\hat{S}^{\infty}$, $\bar{S}^{\infty}$ と書く。

$\hat{H} \cong H \oplus \mathbb{R}$ と $H^-(finite)$ のそれぞれに付け加えられた 1 次元空間 $\mathbb{R} = \{\pm t_\infty\}$ と $\mathbb{R}e_\infty$ との間には関係がある ([3])。 $t_\infty = \prod_n \sin \theta_n \neq 0$ のとき $\theta_n = \pi/2 + c\mu_n^{d/2} + o(\mu_n^{d/2})$ であれば $x \in W^k$, $k < 0$ となり $c \neq 0$ であれば x は $H^-(finite)$ の部分空間 $\mathbb{R}e_\infty$ の元になる。

$x = \sum_n x_n e_n \in H^-(finite)$ であれば $x = y + te_\infty$, $t \in \mathbb{R}$, $y = \sum_n y_n e_n \in H^-(0)$ である。このとき $c = \text{Res}_{s=d}\zeta(G, s) \neq 0$ とすれば

$$\lim_{k \rightarrow +0} \sqrt{k} \|x\|_{-k} = \sqrt{\frac{|c|}{2}} |t|, \quad (41)$$

$$\lim_{k \rightarrow +0} k^{-1/2} \|x\|_{-k} t_\infty = \lim_{k \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{x_n}{\cos \theta_{n,k}} = \sqrt{\frac{2}{|c|}} |t|, \quad (42)$$

が成立し、 t と t_∞ には関係がある ([3])。

8 ヒルベルト空間の「球面」の正則化体積

$f \in W^1(\mathbb{R}^n)$ とする。極座標で積分

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_n^{\mu_n^s} \right| f(x) d^n x,$$

を書きなおせば

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} r^{\mu_1^s + \cdots + \mu_n^s - n} \sin^{\mu_2^s + \cdots + \mu_n^s - n + 1} \theta_1 \cdots \sin^{\mu_{n-1}^s + \mu_n^s - 2} \theta_{n-2} \times \\ & \times F_n(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \phi; s) f(x) \times \\ & \times r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} dr d\theta_1 \cdots d\theta_{n-2} d\phi \\ = & \int_0^\infty r^{\mu_1^s + \cdots + \mu_n^s - 1} dr \int_{S^{n-1}} f(x) |F_n(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \phi; s)| \times \\ & \times \sin^{\mu_2^s + \cdots + \mu_n^s - 1} \theta_1 d\theta_1 \cdots \sin^{\mu_{n-1}^s + \mu_n^s - 1} \theta_{n-2} d\theta_{n-2} d\phi, \end{aligned}$$

となる。ただし $F_n(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \phi; s)$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(x_1, \dots, x_n; s) &= \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_n^{\mu_n^s} \\ &= \mu_1^s x_1^{\mu_1^s - 1} \cdots \mu_n^s x_n^{\mu_n^s - 1} \end{aligned}$$

に

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \theta_1, \dots, x_{n-2} = \cos \theta_{n-2}, \\ x_{n-1} &= \cos \phi, x_n = \sin \phi, \end{aligned}$$

を代入した関数である。

H は最後の座標がないから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \phi; s) = F(\theta_1, \theta_2, \dots; s), \quad (43)$$

と置く。この左辺では $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$ は独立だから右辺でも $\theta_1, \theta_2, \dots$ は独立である。したがって、 $F(\theta_1, \theta_2, \dots; s)$ は S^∞ ではなく $\hat{S}^\infty$ の上の関数である。

$f \in W^1(\mathbb{R}^\infty)$ で $\bar{H}$ の上で定義できている とすれば

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty r^{\mu_1^s + \dots + \mu_n^s - 1} dr \int_{S^{n-1}} f(x) |F_n(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \phi; s)| \times \\ & \times \sin^{\mu_2^s + \dots + \mu_n^s - 1} \theta_1 d\theta_1 \dots \sin^{\mu_{n-1}^s + \mu_n^s - 1} \theta_{n-2} d\theta_{n-2} d\phi \\ = & \int_0^\infty r^{\zeta(G,s) - 1} dr \int_{\bar{S}^\infty} f(x) |F(\theta_1, \theta_2, \dots; s)| \times \\ & \times \sin^{\zeta(G,s) - \mu_1^s - 1} \theta_1 d\theta_1 \sin^{\zeta(G,s) - \mu_1^s - \mu_2^s - 1} d\theta_2 \dots d\phi, \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} x_1^{\mu_1^s} \dots x_n^{\mu_n^s} \right| f(x) d^n x \Big|_{s=0} \\ = & \int_0^r r^{\nu-1} dr \int_{\bar{S}^\infty} f(x) |F(\theta_1, \theta_2, \dots; s)| \Big|_{s=0} \times \\ & \times \prod_{k=1}^\infty \sin^{\nu-k-1} \theta_k d\theta_k \cdot d\phi, \end{aligned} \quad (44)$$

となる。これから

定義 $\bar{S}^\infty, \hat{S}^\infty$ の正則化体積要素を

$$: d\Omega := \prod_{n=1}^\infty \sin^{\nu-n-1} \theta_n d\theta_n \cdot d\phi, \quad : d\omega := \prod_{n=1}^\infty \sin^{\nu-n-1} \theta_n d\theta_n, \quad (45)$$

で定義する。

また この正則化体積要素を使って $\hat{H}$ の正則化体積要素を

$$: d^\infty x := r^{\nu-1} dr : d\omega := r^{\nu-1} dr \prod_{n=1}^\infty \sin^{\nu-n-1} \theta_n d\theta_n, \quad (46)$$

と置く。

注意 (37) から $: d\omega :, : d^\infty x :$ は S^∞, H の上では発散する。したがって正則化体積要素は $\hat{S}^\infty, \hat{H}$ 等 H を拡大した (determinant bundle を付け加えた) 空間でしか意味がない。

$f \in W^1(\mathbb{R}^\infty)$ のとき

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} x_1^{\mu_1^s} \cdots x_n^{\mu_n^s} \right| f(x) d^n x \Big|_{s=0} \\ &= \int_0^\infty r^{\nu-1} dr \int_{\hat{S}^\infty} f(x) |F(\theta_1, \theta_2, \dots; s)| : d\omega : \Big|_{s=0}, \end{aligned}$$

である。また $f(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$ とすれば

$$\int_{\hat{H}} e^{-\pi\|x\|^2} : d^\infty x := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi(x_1^2 + \cdots + x_n^2)} d^n x = 1,$$

だから

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{H}} e^{-\pi\|x\|^2} : d^\infty x : \\ &= \int_0^\infty r^{\nu-1} e^{-\pi r^2} dr \int_{\hat{S}^\infty} |F(\theta_1, \theta_2, \dots; s)| : d\omega : \Big|_{s=0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\nu/2)}{\pi^{\nu/2}} \int_{\hat{S}^\infty} |F(\theta_1, \theta_2, \dots; s)| : d\omega : \Big|_{s=0} = 1, \end{aligned}$$

となる。よって

$$\int_{\hat{S}^\infty} |F(\theta_1, \theta_2, \dots; s)| : d\omega : \Big|_{s=0} = \frac{2\pi^{\nu/2}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})}, \quad (47)$$

である。よって

定理 $\hat{H}$ の単位球 $\hat{S}^\infty$ の正則化体積は $\hat{H}$ の正則化次元 ν だけで決まり $\frac{2\pi^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)}$ である。

$\hat{S}_r^\infty$ の正則化体積 : $\text{vol}(\hat{S}_r^\infty) :$ は (46) から

$$: \text{vol}(\hat{S}_r^\infty) := \frac{2\pi^{\nu/2}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} r^{\nu-1}, \quad (48)$$

である。この値も ν だけで決まり、 ν が正の整数であれば (48) は $(\nu-1)$ -次元球面の体積と一致する。 ν が 0 または負の偶数であれば (47) は 0 になる。また $-4m > \nu > -(4m+2)$; m は 0 または正の整数、のときは (48) は負になる。

注意 1 $\nu \leq 0$ のときは $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ により

$$: \text{vol}(\hat{S}_r^\infty) := -\frac{\sin(\frac{|\nu|\pi}{2})}{\pi^{\frac{|\nu|}{2}+1} r^{|\nu|+1}} \Gamma(\frac{|\nu|}{2} + 1),$$

と書き直したほうが見やすい。

注意 2 $\hat{S}^\infty$ に「積分」して有限で 0 でない値を与える「体積要素」が存在することはこれらの空間に 非自明な無限次のコホモロジー群を持つド・ラム型コホモロジーが存在する可能性を示している ([8] 参照)。

参考文献

- [1] Asada, A.: Remarks on the zeta-regularized determinant of differential operators, *Proc. Conf. Moshé Flato II*, eds. Dito. G., Sternheimer, D. (Kluwer, 2000), 25-36.
- [2] Asada, A.: Regularized product of infinitely many independent variables on a Hilbert space and regularization of infinite dimensional indefinite integral via fractional calculus, *Rev. Bull. Calcutta Math. Soc.* **9** (2001), 1-15
- [3] 浅田 明.: Hilbert 空間の「極座標」と spectral zeta 関数の特殊値, 幾何学的力学理論とその周辺、数理研講究録 1260 (2002), 105-125.
- [4] Asada, A.: Regularized Calculus; An application of zeta regularization to infinite dimensional geometry and analysis, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **1** (2004), 107-157.
- [5] Asada, A.: Zeta-regularization and calculus on infinite dimensional spaces, to appear in *Proc. Int. Workshop on Global Anal*, Ankara, 2004.
- [6] Cardona, A. Ducourtiaux, C. Paycha, S.: From tracial anomalies to anomalies in quantum field theory, arXiv;math-ph/0207029.
- [7] Connes, A.: Noncommutative Geometry: Year 2000, GAFA 2000, 481-559.
- [8] Cuntz, J.: Cyclic Theory, Bivariant K -Theory and Its Bivariant Chern-Character, *Cyclic Homology in Non - Commutative Geometry*, EMS 121(2002) 1-71, Springer.
- [9] Erdélyi, A. et al.: *Higher Transcendental Functions*, I, New York 1953.
- [10] Gilkey, P.: *The Geometry of Spherical Spce Forms*, World Sci., 1989
- [11] Hawking, S.: Zeta function regularization of path integrals in curved space-time, *Commun. Math. Phys.* **55**(1977), 133-148.
- [12] Léandre, R.: Theory of distributions in the space of Connes-Hida and Feynman path integral on a manifold, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Prob. Relat. Top.* **6**(2003), 505-517.
- [13] Okikiolu, K.: The Campbell-Hausdorff theorem for elliptic operators and a related trace formula, The multiplicative anomaly for determinants of elliptic operators, *Duke Math. J.* **79**(1995), 687-722, 723-750.
- [14] Paycha, S.: Renormalized traces as a looking glass into infinite dimensional geometry, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Prob. Relat. Top.* **4**(2001), 221-266.
- [15] Scott, S.G. Wojciechowski, K.: The ζ -determinant and Quillen determinant for a Dirac operator on a manifold with boundary, *GAFA Geom. Funct. Anal.* **4**(2001), 1202-1236.