

Bloch の導手公式 (斎藤毅氏との共同研究)

東大数理 加藤和也 (Kazuya Kato)
University of Tokyo

これは 斎藤毅氏との共同研究である。まず申し述べたいことは、共同研究ではあったが、この仕事の主な部分は 斎藤毅氏によってなされたということである。

§1 Bloch の導手公式

体 K 上の代数多様体からは、 l 進 étale cohomology (l : 素数, $l \neq K$ の標数) をとることによって絶対ガロア群 $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ の表現が得られる。代数多様体の性質がこの Galois 表現にどう反映されるかということは、大変興味深い問題である。

以下、本稿では、 K を完備離散付値体で、剰余体が完全体であるものとする。 l は素数で l は K の標数とも異なるものとする。

Bloch の導手公式は

$$\text{differential invariant} = \text{Galois invariant}$$

の形の予想であって、Galois 表現の分岐の激しさを、微分形式と結びつけるものである。一般に微分形式の方が Galois 表現よりわかりやすく、Bloch の導手公式は、難解な Galois 表現をわかりやすいもので理解する、という性質を持ち、また Galois 表現と微分形式という、性格の異なるものを結びつける所に、そのおもしろさがある。

以下, X を K の付値環 O_K 上の proper flat scheme で, regular であり, generic fiber $X_K = X \otimes_{O_K} K$ は smooth であるものとする.

X が O_K 上 smooth なら, ℓ 進 etale cohomology $H_{\text{et}}^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_{\ell})$ への $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ の作用は 不分岐であることが知られている. X が O_K 上 smooth と限らないとき, つまり X が bad reduction かも知れないとき, $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ の $H_{\text{et}}^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_{\ell})$ への作用の分岐の激しさに, X の幾何がどのように反映するだろうか.

X が O_K 上 smooth $\Leftrightarrow$ 微分加群 Ω_{X/O_K}^1 が locally free である. Spencer Bloch は, 微分加群の束 (「locally free」からどれくらい離れているか) と $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ の $H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_{\ell})$ への作用の束 (分岐の激しさ) の関係について, 次の予想を立てた. ([B])

予想 (Bloch の導手公式)

$$(-1)^{n-1} c_{\text{loc}}^n(\Omega_{X/O_K}^1) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m \text{sw}_K H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_{\ell}) + \chi(X_{\bar{K}}) - \chi(X_{\bar{K}}).$$

ここに $n = \dim(X) = \dim(X_K) + 1$, sw_K は $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ の表現としての $H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_{\ell})$ の swan 導手 ($\text{Gal}(\bar{K}/K)$ の作用の, wild ramification の激しさをあらわす, 0 以上の整数), $\chi(\)$ は Euler-Poincaré 標数, すなわち

$$\chi(\) = \sum_m (-1)^m \dim H^m(\ , \mathbb{Q}_{\ell})$$

(ℓ によらない). 左辺の $c_{\text{loc}}^n(\Omega_{X/O_K}^1)$ は, n 次 localized Chern class という整数で, その正確な定義は複雑なので, 本稿では略す (定義を知らなくても読める形に, 本稿はなっている.)

Bloch はこの公式も、論文 [B] において、 $n=2$ (つまり X_K が曲線) の場合に証明した。

注1. この予想の $n=1$ の場合は、次のように、古典的な公式「共役差積 = 導手」になっている.. $n=1$ の場合

$$X = \text{Spec}(O_L)$$

ここに L は K の有限次分離拡大, となり,

$$\begin{aligned} c_{\text{loc}}^1(\Omega_{X/O_K}^1) &= O_L \text{ 加群 } \Omega_{O_L/O_K}^1 \text{ の 長さ} \\ &= \text{ord}_L(\mathcal{D}_{L/K}), \quad \mathcal{D}_{L/K} \text{ は } L/K \text{ の 共役差積} \end{aligned}$$

であり、 -1 , $m \neq 0$ なら $H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell) = 0$, $H^0(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は 集合 $\text{Hom}_K(L, \bar{K})$ を基底とする自由 $\mathbb{Q}_\ell$ 加群 $\mathbb{Q}_\ell[\text{Hom}_K(L, \bar{K})]$ となり,

$$\chi(X_{\bar{K}}) = [L : K], \quad \chi(X_{\bar{k}}) = [\ell : k] \quad (\ell \text{ は } L \text{ の 剰余体})$$

となって、Bloch の導手公式の右辺は

$$\text{sw}_K(\mathbb{Q}_\ell[\text{Hom}_K(L, \bar{K})]) + [L : K] - [\ell : k] = \text{Art}_K(\mathbb{Q}_\ell[\text{Hom}_K(L, \bar{K})])$$

(Art_K は Artin 導手) になる。したがって Bloch の導手公式の $n=1$ の場合は

$$\text{ord}_L(\mathcal{D}_{L/K}) = \text{Art}_K(\mathbb{Q}_\ell[\text{Hom}_K(L, \bar{K})])$$

という古典的な公式に他ならない。

注2. $n=2$ で X_K が楕円曲線の場合、Bloch の導手公式から、Ogg-Tate が証明した楕円曲線の導手公式 ([Og]) を導き出すことができる ([S]).

注3. Bloch の公式の右辺が ℓ によらないことは、落合理氏によって証明されている ([Oc]).

Blochの導手公式についての我々の結果は次のとおりである。

定理 (斎藤毅氏との共同研究)

Blochの導手公式は, X のspecial fiberのreduced part $(X_k)_{\text{red}}$ が
 X のnormal crossingなdivisorなら成立する。

注4. X が上の仮定をみたさなくても次のことが示せる。 X から出発して
regular closed subschemeをcenterとするblow upをくりかえして

$$X = X^{(0)} \leftarrow X^{(1)} \leftarrow \cdots \leftarrow X^{(k)}$$

のように得られる $X^{(k)}$ で上の定理の仮定をみたすものが存在するなら,
 X についてのBlochの導手公式は正しい。

このような $X^{(k)}$ は必ず存在すると予想されており ($n=2$ なら広中平祐氏
によって存在が証明されている), また具体的に X が与えられれば, こういう
 $X^{(k)}$ の存在を示すことが簡単にできることが多いので, 上の定理は,
Blochの導手公式を「ほとんど証明したもの」と, 斎藤毅氏と私は
考えている。

以下, 上の定理の証明方法についてそのあらましを述べる。

keyとなるアイデアは2つあり,

(i) $\log$ の考え

(ii) 局在交叉理論 (localized intersection theory)

である。以下 §2で(i)について述べ, §3で(ii)について述べ, §4で
それらを用いてどのように上の定理を証明するかを述べる。

§2 $\log$ の考え

$\log$ poleを持つ微分形式を使って Blochの公式を書きかえる。

以下, X は定理の仮定をみたすとする。

$j: X_K \hookrightarrow X$ を包含写像とし, X 上の $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\Omega_{X/\mathcal{O}_K}^1(\log)$, $\Omega_{X/\mathcal{O}_K}^1(\log/\log)$ を,

$$\Omega_{X/\mathcal{O}_K}^1(\log) = (\Omega_{X/\mathcal{O}_K}^1 \oplus (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}} j_* \mathcal{O}_{X_K}^\times)) / \mathcal{I}$$

$$\Omega_{X/\mathcal{O}_K}^1(\log/\log) = (\Omega_{X/\mathcal{O}_K}^1 \oplus (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}} j_* \mathcal{O}_{X_K}^\times)) / \mathcal{G}$$

ここに $\mathcal{I}$ は

$$(df, 0) - (0, f \otimes f) \quad (f \in \mathcal{O}_X \cap j_* \mathcal{O}_{X_K}^\times)$$

が存在する $\mathcal{O}_X$ 加群層, $\mathcal{G}$ は, $\mathcal{I}$ と

$$(0, 1 \otimes f) \quad (f \in K^\times)$$

が存在する $\mathcal{O}_X$ 加群層, と定義する. $(0, f \otimes g)$ ($f \in \mathcal{O}_X, g \in j_* \mathcal{O}_{X_K}^\times$)

の $\Omega_{X/\mathcal{O}_K}^1(\log)$ や $\Omega_{X/\mathcal{O}_K}^1(\log/\log)$ における像は $f d\log(g)$ と書かれる.

こういうふうには $\log$ pole をつけることの良さは, 一般に

「 $\log$ をつけた, X の不変量は X_K にしかよらない」

ということか, たいてい成立するように思われ, $\log$ pole をつけることでより簡明な invariant が得られると考えられることである.

命題 1. 次の (i) (ii) (iii) は同値.

(i) X についての Bloch の導手公式

$$(ii) \quad (-1)^{n-1} c_{loc}^n(\Omega_{X/\mathcal{O}_K}^1(\log)) = \sum_m (-1)^m sw_K H^m(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell) + \chi(X_{\overline{K}}).$$

$$(iii) \quad (-1)^{n-1} c_{loc}^n(\Omega_{X/\mathcal{O}_K}^1(\log/\log)) = \sum_m (-1)^m sw_K H^m(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell).$$

次の §3 で この (iii) の左辺を, 局在的交叉理論を用いて書きかえ,

§4 で その書きかえられた (iii) の証明のあらましを述べる.

§3 局在的交叉理論 (localized intersection theory)

以下, k -scheme S に対し, $G(S)$ で S の Grothendieck 群をあらわす.
すなわち $G(S)$ は,

生成元 $[\mathcal{F}]$ ($\mathcal{F}$ は 連続 $\mathcal{O}_X$ 加群層)

関係式 $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ (exact) なら $[\mathcal{F}] = [\mathcal{F}'] + [\mathcal{F}'']$

によって定義される $\mathbb{A}^1$ -群である.

まず 古典的交点理論を復習する

S が体 k 上の proper smooth scheme で V, W を S の 部分多様体で
 $\dim S = \dim V + \dim W$ となるものとする, V と W の 交点数 $V \cdot W$ は,

$$(\ , \)_S : G(S) \times G(S) \rightarrow G(S)$$

$$([\mathcal{F}], [\mathcal{G}]) \mapsto \sum_i (-1)^i [\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})]$$

(S が regular なので $\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_S}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ は $i \gg 0$ のとき 0 となる) を用いて,

$$V \cdot W = \chi(S, ([\mathcal{O}_V], [\mathcal{O}_W])_S) \quad (\chi(S, \) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(S, \))$$

と書かれる. そして V を 体 k 上の proper smooth scheme とし

上で $S = V \times_k V, \quad V = W$ (これを $S = V \times_k V$ に 対角的にうめこむ)

とすると, V の 自己交点数 $V \cdot V$ について

$$V \cdot V = \chi(V_k) = (-1)^n c^n(\Omega_{V/k}^1) \quad (n = \dim V)$$

が成立する.

この話と似せて, 我々の状況において $S = X \times_{\mathcal{O}_K} X$ とし

S における X の 自己交点数を 考えようとする, $X \times_{\mathcal{O}_K} X$ は

regular と限らず $\mathcal{T}or_i^{\mathcal{O}_{X \times_{\mathcal{O}_K} X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ は $i \gg 0$ でも 0 にならない
ことがある. しかし, $X_K \times_K X_K$ は (X_K が K 上 smooth なので)

regular であり, よって連接 $\mathcal{O}_{X \times_{\mathcal{O}_K} X}$ 加群層子について $\mathcal{T}_{\text{or}_i}^{\mathcal{O}_{X \times_{\mathcal{O}_K} X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ は $i \gg 0$ のとき X_K 上で消えるから X_K に台を持ち, $i \gg 0$ のとき

$$[\mathcal{T}_{\text{or}_i}^{\mathcal{O}_{X \times_{\mathcal{O}_K} X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})] \in G(X_K)$$

が定まる. これについて次の命題を示せる.

命題 2. (1) $\mathcal{F}$ を連接 $\mathcal{O}_{X \times_{\mathcal{O}_K} X}$ 加群層とすると, $i \gg 0$ のとき

$$[\mathcal{T}_{\text{or}_i}^{\mathcal{O}_{X \times_{\mathcal{O}_K} X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})] \in G(X_K)$$

は $i \bmod 2$ にしかよらない.

(2) 準同型

$$G(X \times_{\mathcal{O}_K} X) \longrightarrow G(X_K);$$

$$[\mathcal{F}] \mapsto [\mathcal{T}_{\text{or}_{2i}}^{\mathcal{O}_{X \times_{\mathcal{O}_K} X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})] - [\mathcal{T}_{\text{or}_{2i-1}}^{\mathcal{O}_{X \times_{\mathcal{O}_K} X}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})] \quad (i \gg 0)$$

が存在する. ($[\mathcal{F}]$ のゆきえを $([\mathcal{O}_X], [\mathcal{F}])_{X \times_{\mathcal{O}_K} X}$ と書く.)

$$(3) \quad \chi(X_K, ([\mathcal{O}_X], [\mathcal{O}_X])_{X \times_{\mathcal{O}_K} X}) = (-1)^n c_{\text{loc}}^n(\Omega_{X/\mathcal{O}_K}^1).$$

この (3) から, 次の

$$\chi(V, ([\mathcal{O}_V], [\mathcal{O}_V])_{V \times_{\mathbb{A}^1} V}) = (-1)^n c^n(\Omega_{V/\mathbb{A}^1}^1)$$

の類似と見なされる.

注 5. 命題 2 (1)(2) は, G を有限巡回群とし, M を有限生成 $\mathbb{Z}[G]$ 加群とすると,

$$\text{Tor}_i^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) = H_i(G, M)$$

から $i \geq 1$ なら $i \bmod 2$ にしかよらず $\#H_{2i}(G, M) / \#H_{2i-1}(G, M)$ ($i \geq 1$) が Herbrand の商と公平はかれて重視されることによく似ている.

実際 $X \times_{\mathcal{O}_K} X$ や $\text{Spec}(\mathbb{Z}[G])$ は, regular とは限らないが...

local には regular scheme の Cartier divisor と同型である, という共通の性質を持ち. 命題 2 と Herbrand の商の話を, 共通の語にまとめることも可能である.

命題 2 の $\log$ 版も存在する.

$$(X \times_{O_K} X)(\log) = X \times_{O_K} X = \left(\frac{pr_1^*(f)}{pr_2^*(f)} \right)^{\pm 1} \quad (f \in J_* O_{X_K}^\times) \text{ をつけ加えて}$$

得られる scheme,

$$(X \times_{O_K} X)(\log/\log) = X \times_{O_K} X = \left(\frac{pr_1^*(f)}{pr_2^*(f)} \right)^{\pm 1} \quad (f \in J_* O_{X_K}^\times) \text{ をつけ加えて.}$$

$$\text{すなわち } \frac{pr_1^*(f)}{pr_2^*(f)} = 1 \text{ if } f \in K^\times \text{, とおいて得られる}$$

scheme

とある. $(X \times_{O_K} X)(\log)$ は $X \times_{O_K} X$ の ある blow up の open set,

$(X \times_{O_K} X)(\log/\log)$ は $(X \times_{O_K} X)(\log)$ の closed subscheme であり, これらの

scheme は X から 2 対角埋め込みを持ち, またこれらの scheme の generic fiber はいずれも $X_K \times_K X_K$ である.

命題 3 (1) 2 対角埋め込み $X \rightarrow X \times_{O_K} X$, $X \rightarrow (X \times_{O_K} X)(\log)$,

$X \rightarrow (X \times_{O_K} X)(\log/\log)$ のイテール (埋め込み先の X を定義するイテール)

をそれぞれ J , $J(\log)$, $J(\log/\log)$ とおく.

$$\Omega_{X/O_K}^1 \cong J/J^2 \quad (\text{これはよく知られていること})$$

$$\Omega_{X/O_K(\log)}^1 \cong J(\log)/J(\log)^2,$$

$$\Omega_{X/O_K(\log/\log)}^1 \cong J(\log/\log)/J(\log/\log)^2.$$

(2) 命題 2 の (1) (2) は $X \times_{O_K} X$ を, $(X \times_{O_K} X)(\log)$ や $(X \times_{O_K} X)(\log/\log)$ にあきかえても成立する.

$$(3) \quad \chi(X_k, ([\mathcal{O}_X], [\mathcal{O}_X]))_{(X \times_{\mathcal{O}_K} X)} = (-1)^n c_{loc}^n(\Omega_{X/\mathcal{O}_K}^1) \quad (\text{命題 2 (3) のとおり})$$

$$\chi(X_k, ([\mathcal{O}_X], [\mathcal{O}_X]))_{(X \times_{\mathcal{O}_K} X)(\log)} = (-1)^n c_{loc}^n(\Omega_{X/\mathcal{O}_K}^1(\log))$$

$$\chi(X_k, ([\mathcal{O}_X], [\mathcal{O}_X]))_{(X \times_{\mathcal{O}_K} X)(\log/\log)} = (-1)^n c_{loc}^n(\Omega_{X/\mathcal{O}_K}^1(\log/\log)).$$

§4 Bloch の導手公式の証明

以上により、定理の証明のためには、

$$(\star) \quad \chi(X_k, ([\mathcal{O}_X], [\mathcal{O}_X]))_{(X \times_{\mathcal{O}_K} X)(\log/\log)} = - \sum_m (-1)^m sw_K H^m(X_{\bar{K}}, \mathcal{O}_\ell)$$

を証明すればよいことになった。

K をその最大不分岐拡大の完備化でおきかえてもよいので、 K の剰余体 k は代数閉体と仮定してよい。以下 k は代数閉とする。

まず右辺の sw_K 導手の定義を復習する。 K の有限次ガロア拡大 K' で $G_{\mathcal{O}_L}(\bar{K}'/K')$ の $\text{pro-}p$ 部分が $H^m(X_{\bar{K}}, \mathcal{O}_\ell)$ に trivial に作用するものが存在する。そのような K' をとり $G = G_{\mathcal{O}_L}(K'/K)$, P を G の p 巾部分として

$$sw_K(H^m(X_{\bar{K}}, \mathcal{O}_\ell)) = \frac{1}{\#(G)} \sum_{\sigma \in P} j(\sigma) \text{Tr}(\sigma: H^m(X_{\bar{K}}, \mathcal{O}_\ell))$$

ここに

$$j(\sigma) = \begin{cases} \text{length}_{\mathcal{O}_L}(\mathcal{O}_L/J_\sigma) & J_\sigma = (\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} - 1 : \alpha \in L^\times) \dots \sigma \neq 1 \text{ のとき} \\ -\text{length}_{\mathcal{O}_L}(\Omega_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}^1(\log/\log)) & \dots \sigma = 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおく。(k の標数が 0 のときは、 $\text{pro-}p$ 部分、 p 巾部分は $\{1\}$ と定める。)

すると $\mathrm{sw}_K H^m(X_K, \mathcal{O}_X)$ は K' のとり方によらない。

話を簡明にするため, K の有限次ガロア拡大 K' と $\mathcal{O}_{K'}$ 上の proper semi-stable scheme X' で, $\mathrm{Gal}(K'/K)$ が X' に作用し, birational map $X' \rightarrow X \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K'}$ で $\mathrm{Gal}(K'/K)$ の作用を保つものが存在すると仮定する。このような K', X' の存在は現在まだ証明されていないが, それの代わりにするものが de Jong の alteration の理論 ([J]) により存在し ($X' \rightarrow X \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K'}$ が birational にとれないかもしれないが generically finite にとはとれる) それを用いて以下と同様の議論をすることが出来る。 $X' \times_{\mathcal{O}_K} X' \rightarrow X \times_{\mathcal{O}_K} X$ を f と書く。

$$\textcircled{1} \quad \chi(X_K, ([\mathcal{O}_X], [\mathcal{O}_X]))_{(X \times_{\mathcal{O}_K} X)(\ell_2/\ell_2)}$$

$$= \frac{1}{\#(G)} \chi(X'_K, ([\mathcal{O}_{X'}], f^*[\mathcal{O}_X]))_{(X' \times_{\mathcal{O}_K} X')(\ell_2/\ell_2)}$$

$$\textcircled{2} \quad ([\mathcal{O}_{X'}], f^*[\mathcal{O}_X])_{(X' \times_{\mathcal{O}_K} X')(\ell_2/\ell_2)}$$

$$= \sum_{\sigma \in G} ([\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_{\Gamma_\sigma}])_{(X' \times_{\mathcal{O}_K} X')(\ell_2/\ell_2)}$$

ここで Γ_σ は $(X' \times_{\mathcal{O}_K} X')(\ell_2/\ell_2)$ における σ のグラフ。

$$\textcircled{3} \quad ([\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_{\Gamma_\sigma}])_{(X' \times_{\mathcal{O}_K} X')(\ell_2/\ell_2)}$$

$$= \begin{cases} j(\sigma) ([\mathcal{O}_{X'_K}, \mathcal{O}_{\Gamma_\sigma}]_{(X' \times_{\mathcal{O}_K} X')(\ell_2/\ell_2)_K}) & \sigma \in P \text{ のとき} \\ 0 & \sigma \notin P \text{ のとき} \end{cases}$$

$(,)$ は通常の交点理論 $\sum_i (-1)^i [\mathrm{Tor}_i]$,

P は G の p 中部分

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{4} \quad \sigma \in P \mapsto \sum_L \\
 & \quad \chi(X'_k, (\mathcal{O}_{X'_k}, \mathcal{O}_{\Gamma_{\sigma,k}})(X'_k \times_{X'_k} X')_{(L_2/L_1)_k}) \\
 & \quad = \text{Tr}(\sigma: H^m(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)).
 \end{aligned}$$

以上の ① ~ ④ を合わせれば (★) の証明になっている。
 ここで ① は formal な議論で得られ, ② は $X_k \times_k X_k$ の diagonal の $X'_k \times_k X'_k$ へのひきもどしが Γ の元のグラフの和になっていること, $\log$ をつけた invariant が generic fiber にしかよらないという考えによって得られ, ③ は X' の semi-stable 性を用いた直接計算で得られ, ④ は Lefschetz の trace formula の証明と同様に ℓ -log étale cohomology 論 (中山能久氏 [N]) を用いると得られる。

引用文献

- [B] Bloch, S., Cycles on arithmetic schemes and Euler characteristics of curves. Algebraic Geometry, Bowdoin, Proc. Symp. Pure Math. 46 Part 2 Amer. Math. Soc. (1987) 421-450.
- [J] de Jong, A. J., Families of curves and alterations, Ann. Inst. Fourier 47 (1997) 599-621.
- [Oc] Ochiai, T., ℓ -independence of the trace of monodromy, Math. Ann. 315
- [Og] Ogg, A., Elliptic curves and wild ramification, Amer. J. Math. 89 (1967) 1-21.
- [S] Saito, T., Conductor, discriminant, and the Noether formula for arithmetic surfaces, Duke Math. J. 57 (1988) 157-173.
- [N] Nakayama, C. Logarithmic étale cohomology, Math. Ann 308 (1991) 365-409