

無限素点における $GL(3) \times GL(2)$ に関する局所ゼータ積分

愛媛大学理学部数学科 平野 幹

Miki Hirano

Department of Mathematics, Faculty of Science, Ehime University

成蹊大学理工学部 石井 卓

Taku Ishii

Faculty of Science and Technology, Seikei University

北里大学一般教育部 宮崎 直

Tadashi Miyazaki

College of Liberal Arts and Sciences, Kitasato University

1 序文

F は実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ であるとする. Π と π をそれぞれ Whittaker 模型を持つ $GL(n+1, F)$ と $GL(n, F)$ の既約許容 Hilbert 表現とする. Jacquet と Shalika は論文 [JS] において, Π に付随する Whittaker 関数 W と π に付随する Whittaker 関数 W' から定義される局所ゼータ積分 $Z(s, W, W')$ は局所 L -因子 $L(s, \Pi \times \pi)$ の整関数倍である事を証明した. さらに, Jacquet は論文 [Ja] において,

$$Z(s, W_1, W'_1) + Z(s, W_2, W'_2) + \cdots + Z(s, W_m, W'_m) = L(s, \Pi \times \pi)$$

となる自然数 m と Π に付随する Whittaker 関数 $W_1, W_2, \dots, W_m$, π に付随する Whittaker 関数 $W'_1, W'_2, \dots, W'_m$ が存在する事を証明した. 我々は, より強い「任意の Π, π に対して,

$$Z(s, W, W') = L(s, \Pi \times \pi)$$

となる Π に付随する Whittaker 関数 W と π に付随する Whittaker 関数 W' が存在する」という主張が成立する事を期待している. この主張が $n=1$ の場合に成立する事は, Popa の論文 [Po] で既に証明されている. また, Stade は論文 [St] において, Π と π が共に球主系列表現であれば, 球 Whittaker 関数 W, W' から定義される局所ゼータ積分 $Z(s, W, W')$ は局所 L -因子 $L(s, \Pi \times \pi)$ と一致する事を証明している. これらの結果に加えて, 上記の主張が $n=2$ の場合に成立する事を証明する事ができたので, 本稿ではその結果について報告する.

2 基本的な記法

$l \in F$ に対して, F の加法的ユニタリ指標 ψ_l を

$$\psi_l(\xi) = \begin{cases} e^{2\pi\sqrt{-1}l\xi} & (F = \mathbb{R} \text{ の場合}), \\ e^{2\pi\sqrt{-1}(l\xi + l\bar{\xi})} & (F = \mathbb{C} \text{ の場合}) \end{cases} \quad (\xi \in F)$$

で定義し, F 上のノルム $|\cdot|_F$ を $|\xi|_{\mathbb{R}} = |\xi|$, $|\xi|_{\mathbb{C}} = |\xi|^2$ で定義する. ここで, $|\cdot|$ は通常の絶対値を表す. また, $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$, $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ とおく.

n 次の単位行列を 1_n と表記し, (i, j) -成分が 1 でその他の成分が 0 である 3 次行列を E_{ij} と表記する. $t \in \mathbb{R}$ に対して, $\text{sgn}(t)$ を次のように定義する:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0 \text{ の場合}), \\ -1 & (t < 0 \text{ の場合}). \end{cases}$$

G_n を F 上の n 次一般線型群 $GL(n, F)$ とする. G_n の部分群 N_n, A_n, K_n を

$$\begin{aligned} N_n &= \{x = (x_{ij}) \in G_n \mid x_{ii} = 1 \ (1 \leq i \leq n), \ x_{jk} = 0 \ (1 \leq k < j \leq n)\}, \\ A_n &= \{y = \text{diag}(y_1 y_2 \cdots y_n, y_2 \cdots y_n, \dots, y_n) \mid y_i \in \mathbb{R}_{>0} \ (1 \leq i \leq n)\}, \\ K_n &= \begin{cases} O(n) & (F = \mathbb{R} \text{ の場合}), \\ U(n) & (F = \mathbb{C} \text{ の場合}) \end{cases} \end{aligned}$$

で定めると, G_n は $G_n = N_n A_n K_n$ と岩澤分解される. $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$ となる $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $P_{n_1, n_2, \dots, n_m}$ を G_n の放物型部分群で Levi 部分群が $G_{n_1} \times G_{n_2} \times \cdots \times G_{n_m}$ と同型であり, $N_n A_n \subset P_{n_1, n_2, \dots, n_m}$ を満たすものとする. G_n の Lie 代数の複素化 $\mathfrak{gl}(n, F) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ を $\mathfrak{g}_n$ と表記し, $\mathfrak{g}_n$ の普遍包絡環を $U(\mathfrak{g}_n)$ と表記する.

3 K_2 と K_3 の既約表現

この章では, K_2 と K_3 の既約表現の実現を与える. 本稿では, 埋め込み

$$K_2 \ni k \mapsto \left(\begin{array}{c|c} k & \\ \hline & 1 \end{array} \right) \in K_3 \quad (3.1)$$

によって, K_2 を K_3 の部分群と見なすものとする.

3.1 $O(2)$ と $O(3)$ の既約表現

この節では, $F = \mathbb{R}$ とする. まず, $K_2 = O(2)$ の既約表現の実現を与える. $\Lambda_2 = \{(\lambda_1, 0) \mid \lambda_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cup \{(0, 1)\}$ とおく. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_2$ に対して, $S_\lambda = \{\pm \lambda_1\}$ とおく. さらに, $q \in S_\lambda$ に対して, z_1, z_2 の多項式 $v_{\lambda, q}$ を $v_{\lambda, q}(z_1, z_2) = (\text{sgn}(q)z_1 + \sqrt{-1}z_2)^{\lambda_1}$ で定める.

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_2$ に対して, $V_\lambda^{(2)}$ を $\{v_{\lambda,q}\}_{q \in S_\lambda}$ によって張られる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし, K_2 の $V_\lambda^{(2)}$ 上の作用を

$$(\tau_\lambda^{(2)}(k)p)(z_1, z_2) = \det(k)^{\lambda_2} p((z_1, z_2)k) \quad (k \in K_2, p \in V_\lambda^{(2)})$$

で定める. このとき, $(\tau_\lambda^{(2)}, V_\lambda^{(2)})$ は K_2 の既約表現であり, K_2 の既約表現の同値類はこれらの表現で尽くされる.

次に, $K_3 = O(3)$ の既約表現の実現を与える. $\Lambda_3 = \{(\lambda_1, \lambda_2) \mid \lambda_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \lambda_2 \in \{0, 1\}\}$ とおく. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_3$ に対して, $\mathcal{P}_\lambda$ を z_1, z_2, z_3 の λ_1 次同次多項式のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし, K_3 の $\mathcal{P}_\lambda$ 上の作用 T_λ を

$$(T_\lambda(k)p)(z_1, z_2, z_3) = (\det k)^{\lambda_2} p((z_1, z_2, z_3)k) \quad (k \in K_3, p \in \mathcal{P}_\lambda)$$

で定める. $\lambda \in \Lambda_3$ に対して, $V_\lambda^{(3)} = \mathcal{P}_\lambda / (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \mathcal{P}_{\lambda-(2,0)}$ 上の T_λ の商表現を $\tau_\lambda^{(3)}$ とする. ただし, $\lambda - (2, 0) \notin \Lambda_3$ の場合は $\mathcal{P}_{\lambda-(2,0)} = \{0\}$ とする. このとき, $(\tau_\lambda^{(3)}, V_\lambda^{(3)})$ は K_3 の既約表現であり, K_3 の既約表現の同値類はこれらの表現で尽くされる.

$\lambda \in \Lambda_3$ に対して, Λ_2 の部分集合 $\Sigma(\lambda)$ を

$$\Sigma(\lambda) = \{(0, \lambda_2)\} \cup \{(\mu_1, 0) \mid \mu_1 \in \mathbb{Z}, 1 \leq \mu_1 \leq \lambda_1\}$$

で定め, $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \Sigma(\lambda)$ と $q \in S_\mu$ に対して, $v_{\mu,q}^\lambda$ を $\text{sgn}(q)^{\lambda_2} (\text{sgn}(q)z_1 + \sqrt{-1}z_2)^{\mu_1} z_3^{\lambda_1 - \mu_1}$ の自然な射 $\mathcal{P}_\lambda \rightarrow V_\lambda^{(3)}$ による像とする. このとき, $\{v_{\mu,q}^\lambda \mid q \in S_\mu, \mu \in \Sigma(\lambda)\}$ は $V_\lambda^{(3)}$ の基底であり, $v_{\mu,q}^\lambda \leftrightarrow v_{\mu,q}$ という対応によって, $V_\lambda^{(3)}$ と $\bigoplus_{\mu \in \Sigma(\lambda)} V_\mu^{(2)}$ は K_2 -加群として同型になる.

3.2 $U(2)$ と $U(3)$ の既約表現

この節では, $F = \mathbb{C}$ とする. まず, $K_2 = U(2)$ の既約表現の実現を与える. $\Lambda_2 = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid \lambda_1 \geq \lambda_2\}$ とおく. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_2$ に対して, $V_\lambda^{(2)}$ を z_1, z_2 の $\lambda_1 - \lambda_2$ 次同次多項式のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし, K_2 の $V_\lambda^{(2)}$ 上の作用を

$$(\tau_\lambda^{(2)}(k)p)(z_1, z_2) = \det(k)^{\lambda_2} p((z_1, z_2)k) \quad (k \in K_2, p \in V_\lambda^{(2)})$$

で定める. このとき, $(\tau_\lambda^{(2)}, V_\lambda^{(2)})$ は K_2 の既約表現であり, K_2 の既約表現の同値類はこれらの表現で尽くされる. さらに, $V_\lambda^{(2)}$ の基底 $\{v_{\lambda,q}\}_{q \in S_\lambda}$ を

$$v_{\lambda,q}(z_1, z_2) = z_1^{\lambda_1 - \lambda_2 - q} z_2^q, \quad S_\lambda = \{q \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq q \leq \lambda_1 - \lambda_2\}$$

で定めておく.

次に, $K_3 = U(3)$ の既約表現の実現を与える. $\Lambda_3 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3\}$ とおく. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Lambda_3$ に対して, $\mathcal{P}_\lambda$ を $z_1, z_2, z_3, z_{23}, z_{13}, z_{12}$ の多項式で z_1, z_2, z_3 につ

いて $\lambda_1 - \lambda_2$ 次同次, z_{23}, z_{13}, z_{12} について $\lambda_2 - \lambda_3$ 次同次であるもののなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし, K_3 の $\mathcal{P}_\lambda$ 上の作用 T_λ を

$$(T_\lambda(k)p)(z_1, z_2, z_3, z_{23}, z_{13}, z_{12}) = \det(k)^{\lambda_3} p((z_1, z_2, z_3)k, (z_{23}, z_{13}, z_{12})\tilde{k}) \quad (k \in K_3, p \in \mathcal{P}_\lambda)$$

で定める. ここで, $\tilde{k} = (\tilde{k}_{ij}) \in G_3$ は, $k = (k_{ij}) \in K_3$ に対して,

$$\tilde{k}_{ij} = \begin{vmatrix} k_{i_1 j_1} & k_{i_1 j_2} \\ k_{i_2 j_1} & k_{i_2 j_2} \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} i_1, i_2, j_1, j_2 \in \{1, 2, 3\} \text{ を } i \notin \{i_1, i_2\}, j \notin \{j_1, j_2\} \\ i_1 < i_2, j_1 < j_2 \text{ を満たすようにとる.} \end{array} \right)$$

で定める. $\lambda \in \Lambda_3$ に対して, $V_\lambda^{(3)} = \mathcal{P}_\lambda / (z_1 z_{23} - z_2 z_{13} + z_3 z_{12}) \mathcal{P}_{\lambda - (2, 1, 0)}$ 上の T_λ の商表現を $\tau_\lambda^{(3)}$ とする. ただし, $\lambda - (2, 1, 0) \notin \Lambda_3$ の場合は $\mathcal{P}_{\lambda - (2, 1, 0)} = \{0\}$ とする. このとき, $(\tau_\lambda^{(3)}, V_\lambda^{(3)})$ は K_3 の既約表現であり, K_3 の既約表現の同値類はこれらの表現で尽くされる.

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Lambda_3$ に対して, Λ_2 の部分集合 $\Sigma(\lambda)$ を

$$\Sigma(\lambda) = \{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid \lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \lambda_3\}$$

で定め, $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \Sigma(\lambda)$ と $q \in S_\mu$ に対して, $v_{\mu, q}^\lambda$ を

$$\binom{\mu_1 - \mu_2}{q}^{-1} \sum_{i=\max\{0, \mu_2 - \lambda_2 + q\}}^{\min\{q, \mu_1 - \lambda_2\}} \binom{\mu_1 - \lambda_2}{i} \binom{\lambda_2 - \mu_2}{q - i} z_1^{\mu_1 - \lambda_2 - i} z_{13}^{\lambda_2 - \mu_2 - q + i} z_2^i z_{23}^{q - i} z_3^{\lambda_1 - \mu_1} z_{12}^{\mu_2 - \lambda_3}$$

の自然な射 $\mathcal{P}_\lambda \rightarrow V_\lambda^{(3)}$ による像とする. このとき, $\{v_{\mu, q}^\lambda \mid q \in S_\mu, \mu \in \Sigma(\lambda)\}$ は $V_\lambda^{(3)}$ の基底であり, $v_{\mu, q}^\lambda \leftrightarrow v_{\mu, q}$ という対応によって, $V_\lambda^{(3)}$ と $\bigoplus_{\mu \in \Sigma(\lambda)} V_\mu^{(2)}$ は K_2 -加群として同型になる.

4 Whittaker 関数

4.1 Whittaker 関数の定義

$l \in F^\times$ に対して, $C^\infty(N_n \backslash G_n; \psi_l)$ を

$$f(xg) = \psi_l(x_{12} + x_{23} + \cdots + x_{n-1n}) f(g) \quad (x = (x_{ij}) \in N_n, g \in G_n)$$

を満たす滑らかな関数 $f: G_n \rightarrow \mathbb{C}$ 全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし, G_n はこの空間に右移動で作用するものとする.

(Π, H_Π) を G_n の既約許容 Hilbert 表現とし, H_Π^∞ を H_Π の滑らかな元全体のなす部分空間とする. このとき, 連続 G_n -準同型写像のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\text{Hom}_{G_n}(H_\Pi^\infty, C^\infty(N_n \backslash G_n; \psi_l))$ は高々 1 次元である事が Shalika の論文 [Sha] で証明されている. H_Π^∞ から $C^\infty(N_n \backslash G_n; \psi_l) \rightarrow$ の非自明な連続 G_n -準同型写像が存在するとき, その像を $\mathcal{W}(\Pi, \psi_l)$ と書き, Π の Whittaker 模型と呼ぶ. また, $\mathcal{W}(\Pi, \psi_l)$ の元を Π に付随する Whittaker 関数という. $\mathcal{W}(\Pi, \psi_l)$ の K_n -有限な元全体のなす部分空間を $\mathcal{W}(\Pi, \psi_l)_{K_n}$ と表記する.

4.2 無限素点における局所 L -因子と局所 ϵ -因子

Weil 群 W_F の完全可約な有限次元表現に対応する L -因子と ϵ -因子について簡単に復習する. 詳しくは, [HIM] の §5.1 と §5.2 を参照.

$F = \mathbb{R}$ の場合, Weil 群 $W_{\mathbb{R}}$ の既約有限次元表現の同値類は, L -因子と ϵ -因子が

$$\begin{aligned} L(s, \phi_{\nu}^{\delta}) &= \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \nu + \delta), & \epsilon(s, \phi_{\nu}^{\delta}, \psi_1) &= (\sqrt{-1})^{\delta}, \\ L(s, \phi_{\nu, \kappa}) &= \Gamma_{\mathbb{C}}(s + \nu), & \epsilon(s, \phi_{\nu, \kappa}, \psi_1) &= (\sqrt{-1})^{\kappa+1} \end{aligned}$$

で与えられる 1 次元表現 ϕ_{ν}^{δ} ($\nu \in \mathbb{C}, \delta \in \{0, 1\}$) と 2 次元表現 $\phi_{\nu, \kappa}$ ($\nu \in \mathbb{C}, \kappa \in \mathbb{Z}_{>0}$) で尽くされる. $F = \mathbb{C}$ の場合, Weil 群 $W_{\mathbb{C}}$ の既約有限次元表現の同値類は, L -因子と ϵ -因子が

$$L(s, \phi_{\nu}^d) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s + \nu + |d|/2), \quad \epsilon(s, \phi_{\nu}^d, \psi_1) = (\sqrt{-1})^{|d|}$$

で与えられる 1 次元表現 ϕ_{ν}^d ($\nu \in \mathbb{C}, d \in \mathbb{Z}$) で尽くされる.

W_F の有限次元表現 ϕ が $\phi \simeq \bigoplus_{i=1}^m \phi_i$ と既約分解されるとき, その L -因子と ϵ -因子を

$$L(s, \phi) = \prod_{i=1}^m L(s, \phi_i), \quad \epsilon(s, \phi, \psi_1) = \prod_{i=1}^m \epsilon(s, \phi_i, \psi_1)$$

で定義する. 局所 Langlands 対応により, G_n の既約許容表現 Π は W_F の完全可約な n 次元表現 $\phi[\Pi]$ に対応しており, $\phi[\Pi]$ は Π の Langlands パラメーターと呼ばれる. Π と π をそれぞれ G_3 と G_2 の既約許容表現とすると, $\Pi \times \pi$ に関する局所 L -因子と局所 ϵ -因子を

$$L(s, \Pi \times \pi) = L(s, \phi[\Pi] \otimes \phi[\pi]), \quad \epsilon(s, \Pi \times \pi, \psi_1) = \epsilon(s, \phi[\Pi] \otimes \phi[\pi], \psi_1)$$

で定義する. Weil 群の既約有限次元表現のテンソル積は, $F = \mathbb{R}$ の場合は

$$\begin{aligned} \phi_{\nu}^{\delta} \otimes \phi_{\nu'}^{\delta'} &\simeq \phi_{\nu+\nu'}^{\delta-\delta'} \quad (\delta \geq \delta'), & \phi_{\nu, \kappa} \otimes \phi_{\nu'}^{\delta'} &\simeq \phi_{\nu+\nu', \kappa}, \\ \phi_{\nu, \kappa} \otimes \phi_{\nu', \kappa'} &\simeq \phi_{\nu+\nu', \kappa+\kappa'} \oplus \phi_{\nu+\nu'-\kappa', \kappa-\kappa'} \quad (\kappa > \kappa'), \\ \phi_{\nu, \kappa} \otimes \phi_{\nu', \kappa} &\simeq \phi_{\nu+\nu', 2\kappa} \oplus \phi_{\nu+\nu'-\kappa}^0 \oplus \phi_{\nu+\nu'-\kappa}^1 \end{aligned}$$

と既約分解され, $F = \mathbb{C}$ の場合は $\phi_{\nu}^d \otimes \phi_{\nu'}^{d'} \simeq \phi_{\nu+\nu'}^{d+d'}$ となる. これらの既約分解を用いると, $\Pi \times \pi$ に関する局所 L -因子と局所 ϵ -因子を明示的に書き下す事ができる.

4.3 Whittaker 模型を持つ G_n の既約許容 Hilbert 表現

Whittaker 模型を持つ G_n の既約許容 Hilbert 表現は一般主系列表現と $(\mathfrak{g}_n, K_n)$ -加群として同型になる事が知られている. (例えば, [Ja] の補題 2.5 を参照.) ここでは, $n = 2, 3$ の場合に, それらの表現の K_n -タイプや Langlands パラメーターについてまとめておく.

まず, $F = \mathbb{R}$ の場合について述べる. 次のような G_1 の表現と G_2 の表現を考える:

- $\nu \in \mathbb{C}$ と $\delta \in \{0, 1\}$ に対して, $\chi_{(\nu, \delta)}: G_1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を $\chi_{(\nu, \delta)}(t) = (t/|t|)^\delta |t|_\mathbb{R}^\nu$ ($t \in G_1$) で定義される指標とする.
- $\nu \in \mathbb{C}$ と $\kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対して, $D_{(\nu, \kappa)}(t1_2) = t^{2\nu}$ ($t \in \mathbb{R}_{>0}$), $D_{(\nu, \kappa)}|_{SL(2, \mathbb{R})} \simeq D_\kappa^+ \oplus D_\kappa^-$ という性質で特徴づけられる G_2 の表現を $D_{(\nu, \kappa)}$ とする. ただし, D_κ^+ と D_κ^- はそれぞれ Blattner パラメーターが κ と $-\kappa$ である $SL(2, \mathbb{R})$ の離散系列表現とする.

Whittaker 模型を持つ G_3 の既約許容 Hilbert 表現 Π に対して, 次のいずれかが成立する:

- (1) ある $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in \mathbb{C}$ と $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \delta_3$ をみたす $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \{0, 1\}$ が存在して, Π は主系列表現 $\text{Ind}_{P_{1,1,1}}^{G_3}(\chi_{(\nu_1, \delta_1)} \boxtimes \chi_{(\nu_2, \delta_2)} \boxtimes \chi_{(\nu_3, \delta_3)})$ と $(\mathfrak{g}_3, K_3)$ -加群として同型になる. このとき, Π の極小 K_3 -タイプは $\tau_{(\delta_1 - \delta_3, \delta_2)}^{(3)}$ であり, $\phi[\Pi] = \phi_{\nu_1}^{\delta_1} \oplus \phi_{\nu_2}^{\delta_2} \oplus \phi_{\nu_3}^{\delta_3}$ である.
- (2) ある $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{C}$, $\kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $\delta \in \{0, 1\}$ が存在して, Π は一般主系列表現 $\text{Ind}_{P_{2,1}}^{G_3}(D_{(\nu_1, \kappa)} \boxtimes \chi_{(\nu_2, \delta)})$ と $(\mathfrak{g}_3, K_3)$ -加群として同型になる. このとき, Π の極小 K_3 -タイプは $\tau_{(\kappa, \delta)}^{(3)}$ であり, $\phi[\Pi] = \phi_{\nu_1 + (\kappa-1)/2, \kappa-1} \oplus \phi_{\nu_2}^\delta$ である.

Whittaker 模型を持つ G_2 の既約許容 Hilbert 表現 π に対して, 次のいずれかが成立する:

- (1) ある $\nu'_1, \nu'_2 \in \mathbb{C}$ と $\delta'_1 \geq \delta'_2$ をみたす $\delta'_1, \delta'_2 \in \{0, 1\}$ が存在して, π は主系列表現 $\text{Ind}_{P_{1,1}}^{G_2}(\chi_{(\nu'_1, \delta'_1)} \boxtimes \chi_{(\nu'_2, \delta'_2)})$ と $(\mathfrak{g}_2, K_2)$ -加群として同型になる. このとき,

$$\Lambda(\pi) = \{(\delta'_1 - \delta'_2, \delta'_2)\} \cup \{(\lambda'_1, 0) \mid \lambda'_1 \in \delta'_1 - \delta'_2 + 2\mathbb{Z}_{>0}\}$$

とおくと, π の K_2 -タイプは $\tau_{\lambda'}^{(2)}$ ($\lambda' \in \Lambda(\pi)$) であり, $\phi[\pi] = \phi_{\nu'_1}^{\delta'_1} \oplus \phi_{\nu'_2}^{\delta'_2}$ である.

- (2) ある $\nu' \in \mathbb{C}$ と $\kappa' \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ が存在して, π は本質的離散系列表現 $D_{(\nu', \kappa')}$ と $(\mathfrak{g}_2, K_2)$ -加群として同型になる. このとき, $\Lambda(\pi) = \{(\lambda'_1, 0) \mid \lambda'_1 \in \kappa' + 2\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ とおくと, π の K_2 -タイプは $\tau_{\lambda'}^{(2)}$ ($\lambda' \in \Lambda(\pi)$) であり, $\phi[\pi] = \phi_{\nu' + (\kappa'-1)/2, \kappa'-1}$ である.

次に, $F = \mathbb{C}$ の場合について述べる. $\nu \in \mathbb{C}$ と $d \in \mathbb{Z}$ に対して, $\chi_{[\nu, d]}: G_1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を $\chi_{[\nu, d]}(t) = (t/|t|)^d |t|_\mathbb{C}^\nu$ ($t \in G_1$) で定義される指標とする. Whittaker 模型を持つ G_3 の既約許容 Hilbert 表現 Π に対して, ある $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in \mathbb{C}$ と $d_1 \geq d_2 \geq d_3$ をみたす $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{Z}$ が存在して, Π は主系列表現 $\text{Ind}_{P_{1,1,1}}^{G_3}(\chi_{[\nu_1, d_1]} \boxtimes \chi_{[\nu_2, d_2]} \boxtimes \chi_{[\nu_3, d_3]})$ と $(\mathfrak{g}_3, K_3)$ -加群として同型になる. このとき, Π の極小 K_3 -タイプは $\tau_{(d_1, d_2, d_3)}^{(3)}$ であり, $\phi[\Pi] = \phi_{\nu_1}^{d_1} \oplus \phi_{\nu_2}^{d_2} \oplus \phi_{\nu_3}^{d_3}$ である. Whittaker 模型を持つ G_2 の既約許容 Hilbert 表現 π に対して, ある $\nu'_1, \nu'_2 \in \mathbb{C}$ と $d'_1 \geq d'_2$ をみたす $d'_1, d'_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して, π は主系列表現 $\text{Ind}_{P_{1,1}}^{G_2}(\chi_{[\nu'_1, d'_1]} \boxtimes \chi_{[\nu'_2, d'_2]})$ と $(\mathfrak{g}_2, K_2)$ -加群として同型になる. このとき, $\Lambda(\pi) = \{(d'_1 + m, d'_2 - m) \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ とおくと, π の K_2 -タイプは $\tau_{\lambda'}^{(2)}$ ($\lambda' \in \Lambda(\pi)$) であり, $\phi[\pi] = \phi_{\nu'_1}^{d'_1} \oplus \phi_{\nu'_2}^{d'_2}$ である.

4.4 Whittaker 関数の明示式

この節では, $n = 2, 3$ の場合に, G_n 上の Whittaker 関数の動径成分の明示式を紹介する.

まず, $n = 3$ の場合について, 論文 [HIM] で与えた明示式を紹介する. (Π, H_Π) を Whittaker 模型を持つ G_3 の既約許容 Hilbert 表現とし, $\lambda \in \Lambda_3$ を $(\tau_\lambda^{(3)}, V_\lambda^{(3)})$ が Π の極小 K_3 -タイプになるようにとる. 極小 K_3 -タイプは $\Pi|_{K_3}$ に重複度 1 で現れるから, $V_\lambda^{(3)}$ から $\mathcal{W}(\Pi, \psi_l)_{K_3}$ への K_3 -準同型写像は定数倍を除いて唯一つである. 適当に正規化した $V_\lambda^{(3)}$ から $\mathcal{W}(\Pi, \psi_l)_{K_3}$ への非自明な K_3 -準同型写像を $\mathbf{W}_\Pi$ と書く事にする.

$F = \mathbb{R}$ の場合, v が単項式 $z_1^{r_1} z_2^{r_2} z_3^{r_3}$ の自然な射 $\mathcal{P}_\lambda \rightarrow V_\lambda^{(3)}$ による像であるとき,

$$\mathbf{W}_\Pi(v)(y) = (\sqrt{-1}l/|l|)^{r_1-r_3} y_1 y_2 \frac{(y_2 y_3)^\gamma}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \int_{[\alpha_2]} \int_{[\alpha_1]} \frac{\Gamma_v(s_1, s_2)(|l|y_1)^{-s_1}(|l|y_2)^{-s_2}}{\Gamma_{\mathbb{R}}(s_1 + s_2 + r_1 + r_3)} ds_1 ds_2$$

$$(y = \text{diag}(y_1 y_2 y_2, y_2 y_3, y_3) \in A_3)$$

となる. ここで, $\int_{[\alpha]}$ の積分路は $\alpha - \sqrt{-1}\infty$ から $\alpha + \sqrt{-1}\infty$ への実軸と垂直な直線とし, α_1, α_2 は十分大きい実数とする. また, γ と $\Gamma_v(s_1, s_2)$ は次で与えられる:

$$(1) \Pi \simeq \text{Ind}_{P_{1,1,1}}^{G_3} (\chi_{(\nu_1, \delta_1)} \boxtimes \chi_{(\nu_2, \delta_2)} \boxtimes \chi_{(\nu_3, \delta_3)}) \quad (\delta_1 \geq \delta_2 \geq \delta_3) \text{ のとき, } \gamma = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3,$$

$$\Gamma_v(s_1, s_2) = \prod_{i=1}^3 \Gamma_{\mathbb{R}}(s_1 + \nu_i + r_1 + (-1)^{r_1} |\delta_i - \delta_2|) \Gamma_{\mathbb{R}}(s_2 - \nu_i + r_3 + (-1)^{r_3} |\delta_i - \delta_2|).$$

$$(2) \Pi \simeq \text{Ind}_{P_{2,1}}^{G_3} (D_{(\nu_1, \kappa)} \boxtimes \chi_{(\nu_2, \delta)}) \text{ のとき, } \gamma = 2\nu_1 + \nu_2,$$

$$\Gamma_v(s_1, s_2) = \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s_1 + \nu_1 + \frac{\kappa - 1}{2}\right) \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s_2 - \nu_1 + \frac{\kappa - 1}{2}\right)$$

$$\times \Gamma_{\mathbb{R}}(s_1 + \nu_2 + r_1) \Gamma_{\mathbb{R}}(s_2 - \nu_2 + r_3).$$

$F = \mathbb{C}$ の場合, $\Pi \simeq \text{Ind}_{P_{1,1,1}}^{G_3} (\chi_{[\nu_1, d_1]} \boxtimes \chi_{[\nu_2, d_2]} \boxtimes \chi_{[\nu_3, d_3]})$ ($d_1 \geq d_2 \geq d_3$) であり, v が単項式 $z_1^{r_1} z_{13}^{r_{13}} z_2^{r_2} z_{23}^{r_{23}} z_3^{r_3} z_{12}^{r_{12}}$ の自然な射 $\mathcal{P}_\lambda \rightarrow V_\lambda^{(3)}$ による像であるとき,

$$\mathbf{W}_\Pi(v)(y) = (\sqrt{-1}l/|l|)^{l_1+l_{12}-l_3-l_{23}} y_1^2 y_2^2 (y_2 y_3)^{2\nu_1+2\nu_2+2\nu_3}$$

$$\times \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \int_{[\alpha_2]} \int_{[\alpha_1]} \frac{\Gamma_v(s_1, s_2)(|l|y_1)^{-2s_1}(|l|y_2)^{-2s_2}}{\Gamma_{\mathbb{C}}(s_1 + s_2 + (r_1 + r_3 + r_{12} + r_{23})/2)} ds_1 ds_2$$

$$(y = \text{diag}(y_1 y_2 y_2, y_2 y_3, y_3) \in A_3)$$

となる. ここで, α_1, α_2 は十分大きい実数とし, $\Gamma_v(s_1, s_2)$ は次で与えられる:

$$\Gamma_v(s_1, s_2) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s_1 + \nu_1 + (r_2 + r_3 + r_{23})/2) \Gamma_{\mathbb{C}}(s_2 - \nu_1 + (r_1 + r_2 + r_{12})/2)$$

$$\times \Gamma_{\mathbb{C}}(s_1 + \nu_2 + (r_1 + r_{23})/2) \Gamma_{\mathbb{C}}(s_2 - \nu_2 + (r_3 + r_{12})/2)$$

$$\times \Gamma_{\mathbb{C}}(s_1 + \nu_3 + (r_1 + r_{12} + r_{13})/2) \Gamma_{\mathbb{C}}(s_2 - \nu_3 + (r_3 + r_{13} + r_{23})/2).$$

次に, $n = 2$ の場合について述べる. (π, H_π) を Whittaker 模型を持つ G_2 の既約許容 Hilbert 表現とし, $\lambda' \in \Lambda(\pi)$ とする. K_2 -タイプ $\tau_{\lambda'}^{(2)}$ は $\pi|_{K_2}$ に重複度 1 で現れるから, $V_{\lambda'}^{(2)}$ から $\mathcal{W}(\Pi, \psi_l)_{K_2}$ への K_2 -準同型写像は定数倍を除いて唯 1 つである. 適当に正規化した $V_{\lambda'}^{(2)}$ から $\mathcal{W}(\Pi, \psi_l)_{K_2}$ への非自明な K_2 -準同型写像を $\mathbf{W}_{\pi, \lambda'}$ と書く事にする.

$F = \mathbb{R}$ の場合, 任意の $\lambda' \in \Lambda(\pi)$ と $q' \in S_{\lambda'}$ に対して, $\mathbf{W}_{\pi, \lambda'}(v_{\lambda', q'})|_{A_2}$ の明示式は様々な文献に書かれている. ここでは, 本稿での計算に必要な結果のみ述べておく.

(1) $\pi \simeq \text{Ind}_{P_{1,1}}^{G_2}(\chi_{(\nu'_1, \delta'_1)} \boxtimes \chi_{(\nu'_2, \delta'_2)})$ ($\delta'_1 \geq \delta'_2$) とする.

- $\delta'_1 = \delta'_2$ のとき, $q' \in S_{(2,0)}$ と $y = \text{diag}(y_1 y_2, y_2) \in A_2$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\pi, (0, \delta'_2)}(v_{(0, \delta'_2), 0})(y) &= \frac{y_1^{1/2} y_2^{\nu'_1 + \nu'_2}}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{[\alpha]} \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \nu'_1) \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \nu'_2) (|l|y_1)^{-s} ds, \\ \mathbf{W}_{\pi, (2,0)}(v_{(2,0), q'})(y) &= \text{sgn}(q')^{\delta'_1} \frac{y_1^{1/2} y_2^{\nu'_1 + \nu'_2}}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{[\alpha]} \{ \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \nu'_1 + 2) \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \nu'_2) \\ &\quad + (q'l/|l|) \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \nu'_1 + 1) \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \nu'_2 + 1) + \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \nu'_1) \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \nu'_2 + 2) \\ &\quad - (2\pi)^{-1} \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \nu'_1) \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \nu'_2) \} (|l|y_1)^{-s} ds. \end{aligned}$$

- $(\delta'_1, \delta'_2) = (1, 0)$ のとき, $q' \in S_{(1,0)}$ と $y = \text{diag}(y_1 y_2, y_2) \in A_2$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\pi, (1,0)}(v_{(1,0), q'})(y) &= \frac{y_1^{1/2} y_2^{\nu'_1 + \nu'_2}}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{[\alpha]} \{ \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \nu'_1 + 1) \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \nu'_2) \\ &\quad + (q'l/|l|) \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \nu'_1) \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \nu'_2 + 1) \} (|l|y_1)^{-s} ds. \end{aligned}$$

(2) $\pi \simeq D_{(\nu', \kappa')}$ とする. $q' \in S_{(\kappa', 0)}$ と $y = \text{diag}(y_1 y_2, y_2) \in A_2$ に対して,

$$\mathbf{W}_{\pi, (\kappa', 0)}(v_{(\kappa', 0), q'})(y) = \begin{cases} \frac{y_1^{1/2} y_2^{2\nu'}}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{[\alpha]} \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s + \nu' + \frac{\kappa' - 1}{2}\right) (|l|y_1)^{-s} ds & \text{if } lq' > 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

上の明示式において, α は十分大きい実数とする.

$F = \mathbb{C}$ の場合, 極小 K_2 -タイプにおける Whittaker 関数の明示式は Popa の論文 [Po] で与えられている. Popa の明示式に $U(\mathfrak{g}_2)$ の元を作用させる事で, 任意の K_2 -タイプにおける Whittaker 関数の明示式が得られる. $\pi \simeq \text{Ind}_{P_{1,1}}^{G_2}(\chi_{[\nu'_1, d'_1]} \boxtimes \chi_{[\nu'_2, d'_2]})$ ($d'_1 \geq d'_2$) とし, $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2) \in \Lambda(\pi)$ とする. このとき, $q' \in S_{\lambda'}$ と $y = \text{diag}(y_1 y_2, y_2) \in A_2$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\pi, \lambda'}(v_{\lambda', q'})(y) &= (\sqrt{-1}l/|l|)^{\lambda'_1 - q'} y_1 y_2^{2\nu'_1 + 2\nu'_2} \sum_{i=0}^{q'} \binom{q'}{i} \frac{(d'_1 - \lambda'_1)_i (-\nu'_1 + \nu'_2 - \frac{\lambda'_1 - \lambda'_2}{2})_i}{(-\lambda'_1 + \lambda'_2)_i (2\pi|l|y_1)^i} \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{[\alpha]} \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s + \nu'_1 - \frac{d'_1 - \lambda'_1 - q' + i}{2}\right) \Gamma_{\mathbb{C}}\left(s + \nu'_2 + \frac{d'_1 - \lambda'_2 - q' + i}{2}\right) (|l|y_1)^{-2s} ds. \end{aligned}$$

ここで, $(a)_i = \Gamma(a+i)/\Gamma(a)$ は Pochhammer 記号とし, α は十分大きい実数とする.

5 $GL(3, F) \times GL(2, F)$ に関する局所ゼータ積分

5.1 主結果

Π と π をそれぞれ Whittaker 模型を持つ G_3 と G_2 の既約許容 Hilbert 表現とする. $W \in \mathcal{W}(\Pi, \psi_1)_{K_3}$ と $W' \in \mathcal{W}(\pi, \psi_{-1})_{K_2}$ に対して, 局所ゼータ積分 $Z(s, W, W')$ を

$$Z(s, W, W') = \int_{N_2 \backslash G_2} W \left(\begin{array}{c|c} h & \\ \hline & 1 \end{array} \right) W'(h) |\det(h)|_F^{s-\frac{1}{2}} dh$$

で定義する. ここで, dh は $N_2 \backslash G_2$ 上の右 G_2 -不変測度とする. Jacquet と Shalika は論文 [JS] において, 任意の $W \in \mathcal{W}(\Pi, \psi_1)_{K_3}$ と $W' \in \mathcal{W}(\pi, \psi_{-1})_{K_2}$ に対して, $\frac{Z(s, W, W')}{L(s, \Pi \times \pi)}$ は整関数であり, 局所関数等式

$$\frac{Z(1-s, \tilde{W}, \tilde{W}')}{L(1-s, \tilde{\Pi} \times \tilde{\pi})} = \epsilon(s, \Pi \times \pi, \psi_1) \frac{Z(s, W, W')}{L(s, \Pi \times \pi)}$$

を満たす事を示した. ここで, $\tilde{\Pi}$ と $\tilde{\pi}$ はそれぞれ Π と π の反傾表現とし, $\tilde{W}$ と $\tilde{W}'$ はそれぞれ次の式で定義される $\mathcal{W}(\tilde{\Pi}, \psi_{-1})_{K_3}$ と $\mathcal{W}(\tilde{\pi}, \psi_1)_{K_2}$ の元とする:

$$\tilde{W}(g) = W \left(\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} t_g^{-1} \right), \quad \tilde{W}'(h) = W' \left(\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} t_h^{-1} \right) \quad (g \in G_3, h \in G_2).$$

本稿の主結果は次の定理である:

定理 5.1. Π と π をそれぞれ Whittaker 模型を持つ G_3 と G_2 の既約許容 Hilbert 表現とする. このとき,

$$Z(s, W, W') = L(s, \Pi \times \pi)$$

を満たす $W \in \mathcal{W}(\Pi, \psi_1)_{K_3}$ と $W' \in \mathcal{W}(\pi, \psi_{-1})_{K_2}$ が存在する.

この定理は, 適切な Whittaker 関数を選び, 局所ゼータ積分を §4.4 の Whittaker 関数の明示式と次の Barnes' の補題を用いて計算する事で証明される:

補題 5.2 ([Ba, §1.7]). $-\min\{\operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b)\} < \alpha < \min\{\operatorname{Re}(c), \operatorname{Re}(d)\}$ を満たす複素数 a, b, c, d と実数 α に対して, 次の等式が成立する:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{[\alpha]} \Gamma(s+a)\Gamma(s+b)\Gamma(-s+c)\Gamma(-s+d)ds = \frac{\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}.$$

どのように Whittaker 関数を選べば良いかについては, 次の節で述べる.

5.2 局所 L -因子を与える Whittaker 関数

$\rho \in \Lambda_2$ に対して, $(\tilde{\tau}_\rho^{(2)}, \tilde{V}_\rho^{(2)})$ を $\tau_\rho^{(2)}$ の反傾表現とし, $\{\tilde{v}_{\rho,q}\}_{q \in S_\rho}$ を $\{v_{\rho,q}\}_{q \in S_\rho}$ の双対基底とする. また, $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in \Lambda_2$ と $q \in S_\rho$ に対して, $\tilde{\rho} \in \Lambda_2$, $\tilde{q} \in S_{\tilde{\rho}}$, $c(\rho, q) \in \mathbb{C}$ を

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \rho, & \tilde{q} &= -q, & c(\rho, q) &= 1 & (F = \mathbb{R} \text{ の場合}), \\ \tilde{\rho} &= (-\rho_2, -\rho_1), & \tilde{q} &= \rho_1 - \rho_2 - q, & c(\rho, q) &= (-1)^q \binom{\rho_1 - \rho_2}{q} & (F = \mathbb{C} \text{ の場合}) \end{aligned}$$

と定義する. このとき, $\tilde{v}_{\rho,q} \leftrightarrow c(\rho, q)v_{\tilde{\rho},\tilde{q}}$ という対応によって, $\tilde{V}_\rho^{(2)} \simeq V_{\tilde{\rho}}^{(2)}$ となる.

Π と π をそれぞれ Whittaker 模型を持つ G_3 と G_2 の既約許容 Hilbert 表現とする. $\lambda' \in \Lambda(\pi)$ に対して, K_2 -準同型写像 $\mathbf{W}_{\pi,\lambda'}: V_{\lambda'}^{(2)} \rightarrow \mathcal{W}(\pi, \psi_{-1})_{K_2}$ を §4.4 のようにとる. また, 埋め込み (3.1) によって, K_2 を K_3 の部分群と見なす. このとき, Schur の直交関係式により, 次の補題が得られる.

補題 5.3. 上の記法を用いる. $\rho \in \Lambda_2$ とし, $\mathbf{W}: V_\rho^{(2)} \rightarrow \mathcal{W}(\Pi, \psi_1)_{K_3}$ を K_2 -準同型写像とする. $q \in S_\rho$ と $q' \in S_{\lambda'}$ に対して, $Z(s, \mathbf{W}(v_{\rho,q}), \mathbf{W}_{\pi,\lambda'}(v_{\lambda',q'}))$ は, $(\lambda', q') = (\tilde{\rho}, \tilde{q})$ ならば

$$\frac{1}{\dim V_\rho^{(2)}} \sum_{r \in S_\rho} \frac{c(\rho, r)}{c(\rho, q)} \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{W}(v_{\rho,r}) \left(\frac{y}{1} \right) \mathbf{W}_{\pi,\tilde{\rho}}(v_{\tilde{\rho},\tilde{r}})(y) |y_1|_F^{s-\frac{3}{2}} |y_2|_F^{2s-1} \frac{dy_1}{y_1} \frac{dy_2}{y_2}$$

と等しくなり, それ以外ならば 0 になる. ただし, $y = \text{diag}(y_1 y_2, y_2) \in A_2$ とする.

$\lambda \in \Lambda_3$ を $\tau_\lambda^{(3)}$ が Π の極小 K_3 -タイプになるようにとる. §4.4 で与えた Π に付随する Whittaker 関数の明示式は, 極小 K_3 -タイプ $\tau_\lambda^{(3)}$ におけるもののみである. しかし, 補題 5.3 より, $\tilde{\rho} \in \Lambda(\pi)$ を満たす $\rho \in \Sigma(\lambda)$ が存在しない場合, 極小 K_3 -タイプ $\tau_\lambda^{(3)}$ における Π に付随する Whittaker 関数 W と $W' \in \mathcal{W}(\pi, \psi_{-1})_{K_2}$ をどのように選んでも $Z(s, W, W') = 0$ となってしまう. 以下では, この問題を解決するために, 様々な $\rho \in \Lambda_2$ に対して, K_2 -準同型写像 $\mathbf{W}: V_\rho^{(2)} \rightarrow \mathcal{W}(\Pi, \psi_1)_{K_3}$ を構成する方法を紹介する.

まず, Λ_2 の部分集合 Σ_n を

$$\Sigma_n = \begin{cases} \{(\sigma_1, 0) \mid \sigma_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} & (F = \mathbb{R} \text{ の場合}), \\ \{(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid \sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2\} & (F = \mathbb{C} \text{ の場合}) \end{cases}$$

で定める. $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \Sigma_n$ と $r \in S_\sigma$ に対して, $U(\mathfrak{g}_3)$ の元 $E_{\sigma,r}$ を

- $F = \mathbb{R}$ の場合: $E_{\sigma,r} = (E_{23} \otimes 1 - \text{sgn}(r)E_{13} \otimes \sqrt{-1})^{\sigma_1},$

- $F = \mathbb{C}$ の場合:

$$\begin{aligned} E_{\sigma,r} &= \sum_{i=\max\{0, r-\sigma_1\}}^{\min\{-\sigma_2, r\}} \binom{\sigma_1 - \sigma_2 - r}{-\sigma_2 - i} \binom{r}{i} \\ &\quad \times (E_{13} \otimes 1 - \sqrt{-1}E_{13} \otimes \sqrt{-1})^{\sigma_1 - r + i} (E_{23} \otimes 1 - \sqrt{-1}E_{23} \otimes \sqrt{-1})^{r-i} \\ &\quad \times (E_{23} \otimes 1 + \sqrt{-1}E_{23} \otimes \sqrt{-1})^{-\sigma_2 - i} (-E_{13} \otimes 1 - \sqrt{-1}E_{13} \otimes \sqrt{-1})^i \end{aligned}$$

で定義する. $\sigma \in \Sigma_n$ に対して, $\mathcal{D}_\sigma$ を $E_{\sigma,r}$ ($r \in S_\sigma$) によって張られる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする. このとき, $\mathcal{D}_\sigma$ は K_2 の随伴作用 Ad で閉じており, $(\text{Ad}, \mathcal{D}_\sigma)$ は K_2 の既約表現となる. さらに, $E_{\sigma,r} \leftrightarrow v_{\sigma,r}$ という対応によって, $\mathcal{D}_\sigma \simeq V_\sigma^{(2)}$ となる.

K_3 -準同型写像 $\mathbf{W}_\Pi: V_\lambda^{(3)} \rightarrow \mathcal{W}(\Pi, \psi_1)_{K_3}$ を §4.4 のようにとる. $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \Sigma_n$ と $\mu \in \Sigma(\lambda)$ に対して, K_2 -準同型写像 $\mathbf{W}_\Pi^{\sigma,\mu}: V_\sigma^{(2)} \otimes_{\mathbb{C}} V_\mu^{(2)} \rightarrow \mathcal{W}(\Pi, \psi_1)_{K_3}$ を

$$\mathbf{W}_\Pi^{\sigma,\mu}(v_{\sigma,r} \otimes v_{\mu,q}) = E_{\sigma,r} \mathbf{W}_\Pi(v_{\mu,q}^\lambda) \quad (r \in S_\sigma, q \in S_\mu)$$

で定める. このとき, $y = \text{diag}(y_1 y_2 y_3, y_2 y_3, y_3) \in A_3$ に対して,

$$\mathbf{W}_\Pi^{\sigma,\mu}(v_{\sigma,r} \otimes v_{\mu,q})(y) = \begin{cases} 0 & (F = \mathbb{C} \text{ かつ } r \neq \sigma_1 \text{ の場合}), \\ (2\pi\sqrt{-1}y_2)^{\sigma_1 - \sigma_2} \mathbf{W}_\Pi(v_{\mu,q}^\lambda)(y) & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

より, $\mathbf{W}_\Pi^{\sigma,\mu}(v_{\sigma,r} \otimes v_{\mu,q})|_{A_3}$ の明示式は $\mathbf{W}_\Pi(v_{\mu,q}^\lambda)|_{A_3}$ の明示式から得られる事に注意する.

$V_\sigma^{(2)} \otimes_{\mathbb{C}} V_\mu^{(2)}$ は, K_2 -加群として重複度 1 で既約分解される事が知られている. すなわち, Λ_2 のある部分集合 $\Sigma(\sigma, \mu)$ が存在して, $V_\sigma^{(2)} \otimes_{\mathbb{C}} V_\mu^{(2)} \simeq \bigoplus_{\rho \in \Sigma(\sigma, \mu)} V_\rho^{(2)}$ となる. $\rho \in \Sigma(\sigma, \mu)$ に対して, $I_\rho^{\sigma,\mu}: V_\rho^{(2)} \rightarrow V_\sigma^{(2)} \otimes_{\mathbb{C}} V_\mu^{(2)}$ を適当に正規化した非自明な K_2 -準同型写像とする. K_2 -準同型写像 $\mathbf{W}_{\Pi,\rho}^{\sigma,\mu}: V_\rho^{(2)} \rightarrow \mathcal{W}(\Pi, \psi_1)_{K_3}$ を $\mathbf{W}_{\Pi,\rho}^{\sigma,\mu} = \mathbf{W}_\Pi^{\sigma,\mu} \circ I_\rho^{\sigma,\mu}$ と定義する.

$F = \mathbb{R}$ の場合, $\sigma = (\sigma_1, 0) \in \Sigma_n$ と $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \Sigma(\lambda)$ に対して,

$$\Sigma(\sigma, \mu) = \begin{cases} \{(2\sigma_1, 0), (0, 0), (0, 1)\} & (\sigma_1 = \mu_1 > 0 \text{ の場合}), \\ \{(0, \mu_2)\} & (\sigma_1 = \mu_1 = 0 \text{ の場合}), \\ \{(\sigma_1 + \mu_1, 0)\} & (\sigma_1 \neq \mu_1 \text{ かつ } \sigma_1 \mu_1 = 0 \text{ の場合}), \\ \{(\sigma_1 + \mu_1, 0), (|\sigma_1 - \mu_1|, 0)\} & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

である. さらに, $\rho \in \Sigma(\sigma, \mu)$ に対して, $I_\rho^{\sigma,\mu}$ の明示的な表示は以下のようになる:

- $\sigma_1 \neq \mu_1$ または $\sigma_1 = \mu_1 = 0$ の場合, $r + q \in S_\rho$ を満たす $r \in S_\sigma$ と $q \in S_\mu$ に対して,

$$I_\rho^{\sigma,\mu}(v_{\rho,r+q}) = \text{sgn}(r+q)^{\mu_2} v_{\sigma,r} \otimes v_{\mu,q}.$$

- $\sigma_1 = \mu_1 > 0$ の場合,

$$I_{(2\sigma_1, 0)}^{\sigma,\mu}(v_{(2\sigma_1, 0), 2q}) = v_{\sigma,q} \otimes v_{\mu,q} \quad (q \in S_\sigma),$$

$$I_{(0, 0)}^{\sigma,\mu}(v_{(0, 0), 0}) = v_{\sigma, \sigma_1} \otimes v_{\mu, -\sigma_1} + v_{\sigma, -\sigma_1} \otimes v_{\mu, \sigma_1},$$

$$I_{(0, 1)}^{\sigma,\mu}(v_{(0, 1), 0}) = v_{\sigma, \sigma_1} \otimes v_{\mu, -\sigma_1} - v_{\sigma, -\sigma_1} \otimes v_{\mu, \sigma_1}.$$

これらの表示により, 各 $\rho \in \Sigma(\sigma, \mu)$ に対して, $\mathbf{W}_{\Pi,\rho}^{\sigma,\mu}(v_{\rho,q})|_{A_3}$ ($q \in S_\rho$) の明示的な表示を得る事ができる. 次のように σ, μ, ρ をとれば, 局所ゼータ積分 $Z(s, \mathbf{W}_{\Pi,\rho}^{\sigma,\mu}(v_{\rho,q}), \mathbf{W}_{\pi,\bar{\rho}}(v_{\bar{\rho},\bar{q}}))$ ($q \in S_\rho$) は 0 でない定数倍を除いて $L(s, \Pi \times \pi)$ と一致する事が直接計算によって確認できる.

(1) $\Pi \simeq \text{Ind}_{P_{1,1,1}}^{G_3} (\chi_{(\nu_1, \delta_1)} \boxtimes \chi_{(\nu_2, \delta_2)} \boxtimes \chi_{(\nu_3, \delta_3)})$ ($\delta_1 \geq \delta_2 \geq \delta_3$) とする.

(1-1) $\pi \simeq \text{Ind}_{P_{1,1}}^{G_2} (\chi_{(\nu'_1, \delta'_1)} \boxtimes \chi_{(\nu'_2, \delta'_2)})$ ($\delta'_1 \geq \delta'_2$) とする.

(1-1-1) $\delta'_1 = \delta'_2 = \delta_2$ の場合: $\sigma = (0, 0), \quad \mu = (0, \delta'_2), \quad \rho = (0, \delta'_2).$

(1-1-2) $\delta'_1 = \delta'_2 \neq \delta_2$ かつ $\delta_1 = \delta_3$ の場合: $\sigma = (2, 0), \quad \mu = (0, \delta_2), \quad \rho = (2, 0).$

(1-1-3) $\delta'_1 = \delta'_2 \neq \delta_2$ かつ $\delta_1 > \delta_3$ の場合: $\sigma = (1, 0), \quad \mu = (1, 0), \quad \rho = (0, \delta'_2).$

(1-1-4) $(\delta'_1, \delta'_2) = (1, 0)$ かつ $\delta_1 = \delta_3$ の場合: $\sigma = (1, 0), \quad \mu = (0, \delta_2), \quad \rho = (1, 0).$

(1-1-5) $(\delta'_1, \delta'_2) = (1, 0)$ かつ $\delta_1 > \delta_3$ の場合: $\sigma = (0, 0), \quad \mu = (1, 0), \quad \rho = (1, 0).$

(1-2) $\pi \simeq D_{(\nu', \kappa')}$ とする.

(1-2-1) $\delta_1 = \delta_3$ の場合: $\sigma = (\kappa', 0), \quad \mu = (0, \delta_2), \quad \rho = (\kappa', 0).$

(1-2-2) $\delta_1 > \delta_3$ の場合: $\sigma = (\kappa' - 1, 0), \quad \mu = (1, 0), \quad \rho = (\kappa', 0).$

(2) $\Pi \simeq \text{Ind}_{P_{2,1}}^{G_3} (D_{(\nu_1, \kappa)} \boxtimes \chi_{(\nu_2, \delta)})$ とする.

(2-1) $\pi \simeq \text{Ind}_{P_{1,1}}^{G_2} (\chi_{(\nu'_1, \delta'_1)} \boxtimes \chi_{(\nu'_2, \delta'_2)})$ ($\delta'_1 \geq \delta'_2$) とする.

(2-1-1) $\delta'_1 = \delta'_2 \neq \delta$ の場合: $\sigma = (1, 0), \quad \mu = (1, 0), \quad \rho = (0, \delta'_2).$

(2-1-2) $(\delta'_1, \delta'_2) = (1, 0)$ の場合: $\sigma = (0, 0), \quad \mu = (1, 0), \quad \rho = (1, 0).$

(2-1-3) $\delta'_2 = \delta$ の場合: $\sigma = (0, 0), \quad \mu = (\delta'_1 - \delta'_2, \delta'_2), \quad \rho = (\delta'_1 - \delta'_2, \delta'_2).$

(2-2) $\pi \simeq D_{(\nu', \kappa')}$ とする.

(2-2-1) $\kappa' \leq \kappa$ の場合: $\sigma = (0, 0), \quad \mu = (\kappa', 0), \quad \rho = (\kappa', 0).$

(2-2-2) $\kappa' \geq \kappa$ の場合: $\sigma = (\kappa' - \kappa, 0), \quad \mu = (\kappa, 0), \quad \rho = (\kappa', 0).$

$F = \mathbb{C}$ の場合, $\sigma \in \Sigma_n$ と $\mu \in \Sigma(\lambda)$ に対して, $\Sigma(\sigma, \mu) = \{\sigma + \mu + (-i, i) \mid i \in S_\sigma \cap S_\mu\}$ である. さらに, $\rho \in \Sigma(\sigma, \mu)$ に対して, $I_\rho^{\sigma, \mu}$ の明示的な表示は Koornwinder の論文 [Ko] で与えられている. 従って, 各 $\rho \in \Sigma(\sigma, \mu)$ に対して, $\mathbf{W}_{\Pi, \rho}^{\sigma, \mu}(v_{\rho, q})|_{A_3}$ ($q \in S_\rho$) の明示的な表示を得る事ができる. $\Pi \simeq \text{Ind}_{P_{1,1,1}}^{G_3} (\chi_{[\nu_1, d_1]} \boxtimes \chi_{[\nu_2, d_2]} \boxtimes \chi_{[\nu_3, d_3]})$ ($d_1 \geq d_2 \geq d_3$) とし, $\pi \simeq \text{Ind}_{P_{1,1}}^{G_2} (\chi_{[\nu'_1, d'_1]} \boxtimes \chi_{[\nu'_2, d'_2]})$ ($d'_1 \geq d'_2$) とする. 次のように σ, μ, ρ をとれば, 局所ゼータ積分 $Z(s, \mathbf{W}_{\Pi, \rho}^{\sigma, \mu}(v_{\rho, q}), \mathbf{W}_{\pi, \bar{\rho}}^{\sigma, \mu}(v_{\bar{\rho}, \bar{q}}))$ ($q \in S_\rho$) は 0 でない定数倍を除いて $L(s, \Pi \times \pi)$ と一致する事が直接計算によって確認できる.

(3-3-1) $-d'_1 \geq d_1$ の場合:

$$\sigma = (-d'_1 - d'_2 - d_1 - d_2, 0), \quad \mu = (d_1, d_2), \quad \rho = (-d'_1 - d'_2 - d_1, d_1).$$

(3-3-2) $-d'_2 \geq d_1 \geq -d'_1 \geq d_2$ の場合:

$$\sigma = (-d'_1 - d'_2 - d_1 - d_2, 0), \quad \mu = (d_1, d_2), \quad \rho = (-d'_2, -d'_1).$$

(3-3-3) $-d'_2 \geq d_1$ かつ $d_2 \geq -d'_1 \geq d_3$ の場合 :

$$\sigma = (-d'_2 - d_1, 0), \quad \mu = (d_1, -d'_1), \quad \rho = (-d'_2, -d'_1).$$

(3-3-4) $-d'_2 \geq d_1$ かつ $d_3 \geq -d'_1$ の場合 :

$$\sigma = (-d'_2 - d_1, -d'_1 - d_3), \quad \mu = (d_1, d_3), \quad \rho = (-d'_2, -d'_1).$$

(3-3-5) $d_1 \geq -d'_2 \geq -d'_1 \geq d_2$ の場合 :

$$\sigma = (-d'_1 - d_2, 0), \quad \mu = (-d'_2, d_2), \quad \rho = (-d'_2, -d'_1).$$

(3-3-6) $d_1 \geq -d'_2 \geq d_2 \geq -d'_1 \geq d_3$ の場合 :

$$\sigma = (0, 0), \quad \mu = (-d'_2, -d'_1), \quad \rho = (-d'_2, -d'_1).$$

ここで,

(3-3-7) $d_2 \geq -d'_2 \geq -d'_1 \geq d_3$ の場合.

(3-3-8) $d_1 \geq -d'_2 \geq d_2$ かつ $d_3 \geq -d'_1$ の場合.

(3-3-9) $d_2 \geq -d'_2 \geq d_3 \geq -d'_1$ の場合.

(3-3-10) $d_3 \geq -d'_2$ の場合.

はそれぞれ (3-3-5), (3-3-3), (3-3-2), (3-3-1) の反傾の場合であるから, 局所関数等式を用いる事で, $Z(s, W, W') = L(s, \Pi \times \pi)$ となる $W \in \mathcal{W}(\Pi, \psi_1)_{K_3}$ と $W' \in \mathcal{W}(\pi, \psi_{-1})_{K_2}$ が存在する事は証明できるので, ここでは省略する.

参考文献

- [Ba] W. N. Bailey. *Generalized hypergeometric series*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 32. Stechert-Hafner, Inc., New York, 1964.
- [HIM] Miki Hirano, Taku Ishii, and Tadashi Miyazaki. The Archimedean Whittaker functions on $GL(3)$. In *Geometry and analysis of automorphic forms of several variables*, volume 7 of *Ser. Number Theory Appl.*, pages 77–109. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2012.
- [Ja] Hervé Jacquet. Archimedean Rankin-Selberg integrals. In *Automorphic forms and L-functions II. Local aspects*, volume 489 of *Contemp. Math.*, pages 57–172. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [JS] Hervé Jacquet and Joseph Shalika. Rankin-Selberg convolutions: Archimedean theory. In *Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I (Ramat Aviv, 1989)*, volume 2 of *Israel Math. Conf. Proc.*, pages 125–207. Weizmann, Jerusalem, 1990.
- [Ko] T. H. Koornwinder. Clebsch-Gordan coefficients for $SU(2)$ and Hahn polynomials. *Nieuw Arch. Wisk. (3)*, 29(2):140–155, 1981.

- [Po] Alexandru A. Popa. Whittaker newforms for Archimedean representations. *J. Number Theory*, 128(6):1637–1645, 2008.
- [Sha] J. A. Shalika. The multiplicity one theorem for GL_n . *Ann. of Math. (2)*, 100:171–193, 1974.
- [St] Eric Stade. Mellin transforms of $GL(n, \mathbb{R})$ Whittaker functions. *Amer. J. Math.*, 123(1):121–161, 2001.