

Lusternik-Schnirelmann category and ribbon knot complement

広島大学理学部 松本 堯 生
(Matumoto, Takao)

結び目の補空間の Lusternik-Schnirelmann カテゴリーが 1 であることと結び目が解けることが同値であることを論文 [5] で示した。ここでは用語及び [5] の説明と述べた後、リボン結び目の補空間のカテゴリーが 2 であることを示す。

1. 位相空間 X のカテゴリー $\text{cat } X$ は $(n+1)$ 点の X の中で 1 点に可縮な開集合 U_i があわれ n 点はあわれなるとき $\text{cat } X = n$ と定義される。Lusternik-Schnirelmann, 位相空間に一般化した Borsuk, は開集合を用いるが X が ANR のとき両者は一致する。又、Fox が上の定義としたのであるが彼のほうは数が 1 だけ大きい。

$\text{cat } X = 0$ は X が可縮であることと同値であり, $\text{cat } S^n = 1$ も見易い。より重要なことは X と Y のホモトピー型が等し

ければ $\text{cat } X = \text{cat } Y$ であるというホモトピー不変性である。これから連結 CW 複体 X に対し $\text{cat } X \leq \dim X$ となる。後のためにこれを簡単に証明しよう。 $\dim X = n$ のとき $X \simeq X^{n-1} \cup (e^n \cup \dots \cup e^n)$ であり、 $X^0 = 1$ 点とすれば帰納法により X^{n-1} は $n-1$ のさような南集合であられるとしよう。 X^{n-1} を例えば大きな次元のユークリッド空間にうめ込んでその正則近傍をとるとい、なやり方どホモトピー型と変えなうどふくらましてやると各 e^n は X にうめ込まれるとしよう。 X が 弧状連結な ANR として $e^n \cup \dots \cup e^n$ の近傍として X の中で 1 点に可縮な開集合がとれ証明が終る。

さて、 $\text{cat } X$ を下から評価するにはもう一つの定義というべき次の定理が有効である。

定理 1 (Bernstein - Ganea, G.W. Whitehead). X は弧状連結で基点 $*$ が X の中で 1 点に可縮な近傍をもつとき、 $\text{cat } X \leq n$ という仮定の下に下図が可換になるような写像 j が存在する。

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{j} & T^{n+1} X = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in X^{n+1}; \text{少なくとも1つの } k \text{ に対し } x_k = * \right\} \\
 \searrow \Delta \text{ (対角写像)} & & \nearrow \\
 & & X^{n+1}
 \end{array}$$

とくに、 $u_k \in H^*(X, *)$ に対し $u_0 \cup \dots \cup u_n = 0$ 。

これから直ちに $\text{cat}(S^{n_1} \times \dots \times S^{n_k}) = k$ がでる。

命題 I. 連結閉 n 次元多様体 M に対し $\text{cat } M = 1$ と $M \simeq S^n$ は同値.

証明. Poincaré 双対定理と定理 1 より M はホモロジー球面であることがわかる. よって次の定理 2 に帰着する.

定理 2 (Fox). X が弧状連結かつ局所単連結なコンパクト距離空間のとき, $\text{cat } X = 1$ ならば $\pi_1 X$ は自由群である.

結が目の補空間の場合に命題 I に対応する論文 [5] の主結果:

定理 I. 結が目 $S^n \supset S^m$ が位相的に解けるための必要十分条件は $\text{cat}(S^n - S^m) = 1$ である. ただし, 結が目は局所平坦であるものとする.

幾何的トポロジーの結果から $\text{cat}(S^n - S^{n-2}) = 1$ ならば $S^n - S^{n-2} \simeq S^1$ であることと示せばよいことがわかる. これを示すには被覆 $X_k \rightarrow X$ に対し $\text{cat } X_k \leq \text{cat } X$ であるという事実を結が目の無限巡回被覆の中間有限被覆に対して用いて定理 1 に帰着して証明する. だが詳細は論文 [5] を参照してほしい.

2. 補空間のカテゴリーが2であるような結び目としては任意の自明でない古典結び目 $S^3 \supset S^1$ とかそのスパンとか数多く存在するが、以下ではリボン結び目とされるものが全てその例であることを示す。

定理Ⅱ. 自明でないリボン結び目 $S^n \supset S^{n-2}$ に対して $\text{cat}(S^n - S^{n-2}) = 2$.

定義. m コの成分からなる自明な絡み目 $S^{n-2} \cup \dots \cup S^{n-2} \subset S^n$ を $m-1$ コの互いに交わらないバンドに沿って手術して得られる結び目をリボン結び目という。又、上の自明な絡み目と張る m コの球体 $D^{n-1} \cup \dots \cup D^{n-1}$ を内部は D^{n+1} の内部に含まれるように押し込みバンド $I \times D^{n-2}$ もかまぼこ型に D^{n+1} に押し込んでできるものをリボン球体対という。

補空間はコンパクトでない、この結び目又は球体の^{正則}近傍の内部を除いて得られるコンパクト多様体と外空間と呼び、これを用いる。とくに補空間と外空間のホモトピー型は等しい。

観察1. ^{1次元高}リボン結び目の外空間 = リボン球体対の外空間 $\cup$ リボン球体対の外空間
リボン結び目の外空間

観察 2 (浅野-丸本-柳川). 球体 D_0^{n+1} に $m+1$ コの 1-ハンドル
 ドルとそれとをキャンセルする標準的な $m+1$ コの 2-ハンドル
 $h_0^2 \cup \dots \cup h_m^2$ ができる球体 D^{n+1} において, h_0^2 上を他の
 2-ハンドルがバインドのとり方に対応して次々とスライドして
 できる m コの 2-ハンドル $h_1'^2 \cup \dots \cup h_m'^2$ を 1-ハンドル
 をつけた後につけると丁度リボン球体に対する外空間ができる.
 更に h_0^2 に対応する 2-ハンドルをつけると元に戻り D^{n+1}
 となりこの h_0^2 に相当する $D^2 \times D^{n-1}$ の双対心棒 $0 \times D^{n-1}$
 がリボン球体に対する球体である. とくに, リボン球体に対する補
 空間はホモトピー型だけを考えるなら 2次元 CW 複体 K^2 と
 しよう.

さて, 観察 1 と 2 を合わせると, リボン結び目 $S^{n-1} \subset S^{n+1}$
 の外空間は D_0^{n+1} に m コの 1-ハンドル, m コの 2-ハンドル
 m コの $(n-1)$ -(双対 2-)ハンドル と $m+1$ コの n -(双対 1-)ハンドルが
 ついてできている. $(n-1)$ -ハンドルの心棒 D^{n-1} のつくところは
 は h_0^2 とぶつからずに対応する 2-ハンドルの双対心棒の境界
 にダブルをつくる様にくっついていくので, 各 $(n-1)$ -ハンドル
 は K^2 に S^{n-1} を 1 点でつ^てけるものとホモトピー型の等しい
 範囲で考えてよく

$$(n-1)\text{-ハンドルを} \text{つけたもの} \simeq K^2 \vee S^{n-1} \vee \dots \vee S^{n-1}$$

(ただし, $n \geq 3$) とする.

さて, n -ハンドルはホモトピー型を考えるなら

$\pi_{n-1}(K^2 \vee S^{n-1} \vee \dots \vee S^{n-1})$ の元をやはり $\pi_{n-1}(K^2)$ と考えよう,

~~Hilton の定理により, これは $\pi_{n-1}(K^2)$, $\pi_{n-1}(S^{n-1})$ (複数),~~

~~$[\pi_1(K^2), \pi_{n-1}(S^{n-1})]$ (複数) から生成される. さて K^2 の~~

1-骨格 $S^1 \vee \dots \vee S^1$ をとると自然な写像

$$(*) \quad \pi_{n-1}(K^2) \oplus \pi_{n-1}(S^1 \vee \dots \vee S^1 \vee S^{n-1} \vee \dots \vee S^{n-1}) \rightarrow \pi_{n-1}(K^2 \vee S^{n-1} \vee \dots \vee S^{n-1})$$

は全射であることがわかる. ここでもし Whitehead 予想のよう

ように $\pi_{n-1}(K^2) = 0$ であれば簡単であるがそればかりでは

なくとも今の場合は $\pi_{n-1}(K^2)$ からの像は関係しないことがわ

かる. 実際 m 個の S^{n-1} を各々 1 点にぶしと考えると

$(n-1)$ -ハンドルを全然つなずに n -ハンドルをつなぐことになり, その

n -ハンドルの ^{心棒の}つくとこはやはり対応する 1-ハンドルの双対

心棒の境界となるのでホモトピーが零. つまり α を問題

の元とすると α の $\pi_{n-1}(K^2 \vee S^{n-1} \vee \dots \vee S^{n-1}) \xrightarrow{p} \pi_{n-1}(K^2)$

による像は 0. $(*)$ を $\pi_{n-1}(K^2)$ に制限して p を施すと恒等写

像だから α は $(*)$ の $\pi_{n-1}(S^1 \vee \dots \vee S^1 \vee S^{n-1} \vee \dots \vee S^{n-1})$ に制限した

ものの像に含まれることがわかる. 従って

$$X = \text{リボン結び目の補空間} \simeq (S^1 \vee \dots \vee S^1 \vee S^{n-1} \vee \dots \vee S^{n-1}) \cup (e^2 \cup \dots \cup e^2 \cup e^n \cup \dots \cup e^n)$$

となり, 前の議論と同様に適当に $S^1 \vee \dots \vee S^1 \vee S^{n-1} \vee \dots \vee S^{n-1}$ とぶく

うまれば考えると $e^2 \cup \dots \cup e^2 \cup e^n \cup \dots \cup e^n$ は X にうまく込められ

と"と考ゑるより, X が ANR とはよ" ことより $\text{cat } X \leq 2$ がわかる. 定理 I と合わせると定理 II の証明も終る.

3. 最後に $\text{cat}(S^{n-k+1} \times T^{k-1}) = k$ であるの" 1 と n の任意の値をカテゴリーにもつ閉 n 次元多様体が存在する. これに対応して, 1 と $n-1$ の間の任意の値と補空間のカテゴリーとして, 結び目 $S^n \supset S^{n-2}$ が存在する"あるうと"予想を述べておきます.

参考文献

1. K. Asano, Y. Marumoto & T. Yanagawa: Ribbon knots and ribbon disks, Osaka J. Math. 18 (1981), 161-174.
2. I. Bernstein - T. Ganea: The category of a map and a cohomology class, Fund. Math. 50 (1962), 265-279.
3. R.H. Fox: On the Lusternik-Schnirelmann category, Ann. Math. 42 (1941), 333-370.
4. L. Lusternik - L. Schnirelmann: Méthodes topologiques dans les problèmes variationnelles, Herman, Paris, 1934.
5. T. Matumoto: Lusternik-Schnirelmann category and knot complement, to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo