

あるショックモデルの最適取替政策

鳥取大学工学部 河合 一

鳥取大学工学部 小柳 淳二

1 はじめに

本稿では、2 変量ショック過程による疲労の蓄積に伴い故障するシステムの最適取替問題を考察する。問題は、取替コストから生じる長時間総期待割引コストを最小にする意味で最適な取替政策を定めることである。問題は、セミマルコフ決定過程により定式化され、最適政策の構造を明らかにする。

2 2 変量ショック過程

時間は離散的とし、ショックによるダメージ量は離散値のみをとり得るとする。

ここで取り上げる 2 変量ショック過程は、 Y_n, Z_n を

Y_n : n 回目と $n+1$ 回目のショックの時間間隔,

Z_n : n 回目のショックによるダメージ量,

とするとき確率過程 $\{(Y_n, Z_n), n = 0, 1, \dots\}$ のことをいう。

ショックによるシステムのダメージは、システムの取替を行わないときは加法的に累積されるとし、 X_n を

X_n : n 回目のショック直後の累積ダメージ量

とすると、 X_n は、

$$X_{n+1} = X_n + Z_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

で与えられる。

ショック過程 $\{(Y_n, Z_n)\}$ においては、その独立性に関し、次の 2 つの場合を考える。

モデル I

$$Y_n \perp\!\!\!\perp Z_n, \quad Z_{n+1} \not\perp\!\!\!\perp Y_n$$

すなわち、粗くいえば、ショックにより生ずるダメージ量は、そのショックが生ずる時間に依存しているものである。

以下の記号を導入する。

$$f(y) \equiv P(Y_n = y), \quad f(0) = 0 \text{ とする.}$$

$$\bar{F}(y) \equiv P(Y_n > y),$$

$$g_y(k) \equiv P(Z_{n+1} = k | Y_n = y),$$

$$\bar{G}_y(k) \equiv P(Z_{n+1} > k | Y_n = y),$$

$$g(i) : X_n = i \text{ のときシステムが故障する確率.}$$

モデル II

$$Y_n \not\perp\!\!\!\perp Z_n, \quad Z_{n+1} \perp\!\!\!\perp Y_n$$

すなわち、ショック時間間隔は、前回のショック時のダメージ量に依存しているものである。

以下の記号を導入する。

$$g_k \equiv P(Z_n = k),$$

$$f_k(y) \equiv P(Y_n = y | Z_n = k), \quad \text{ここで、} f_k(0) = 0 \text{ とする.}$$

$$\bar{F}_k(y) \equiv P(Y_n > y | Z_n = k),$$

$$g(i) : X_n = i \text{ のときシステムが故障する確率.}$$

モデル I, II を通じ、システム故障は、ショック時にのみ生じるとする。また、故障時には新品（累積ダメージが 0）と取替え、取替時間は無視しうるとする。

3 最適取替政策－モデル I

3.1 取替政策と問題

以下の時点を定義する。

$E_i, i = 1, 2, \dots$: ショックが生じ、累積ダメージが i となり、故障しなかった時点。

E_0 , : ショックが生じ、累積ダメージが 0 となり、故障しなかった、あるいは、ショックが生じ、故障し取替を行った時点。

取替政策として、 E_i において、その後 t 時間 ($t = 0, 1, \dots$) ショックが生じなければ予防的に取替を行うこととする。ここで、特に、 $t = 0$ は即時取替を行うことを、 $t = \infty$ は次のショックまでの取替を行わないことを意味する。

さてコストとしては、

a : 予防取替コスト／1 回, b : 故障取替コスト／1 回,

のみを考慮する。ここで、 $a < b$ である。

以上の政策およびコストのもとで、問題は、無限期間総期待割引コストを最小にするように、各 E_i における予防取替時期を決定することである。

3.2 定式化

$v(i)$ を E_i から出発したときの最適コストとすると、 $v(i)$ は次式を満たす。

$$v(i) = \min_{t=0,1,2,\dots,\infty} H_i(t) \quad (1)$$

ここで、

$$H_i(t) \equiv \beta^t \bar{F}(t)a + \sum_{y=t+1}^{\infty} \beta^y f(y) \sum_{k=0}^{\infty} g_y(k) Q(k) + \sum_{y=1}^t \beta^y f(y) \sum_{k=0}^{\infty} g_y(k) Q(i+k), \quad (2)$$

$$Q(i) \equiv (1 - q(i))v(i) + q(i)(b + v(0)). \quad (3)$$

なお、 $v(i)$ は、逐次近似法

$$v^0(i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

$$v^{n+1}(i) = \min_{t=0,1,2,\dots,\infty} H_i^{n+1}(t) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} H_i^{n+1}(t) \equiv & \beta^t \bar{F}(t)a + \sum_{y=t+1}^{\infty} \beta^y f(y) \sum_{k=0}^{\infty} g_y(k) Q^{n+1}(k) \\ & + \sum_{y=1}^t \beta^y f(y) \sum_{k=0}^{\infty} g_y(k) Q^{n+1}(i+k), \end{aligned} \quad (6)$$

$$Q^{n+1}(i) \equiv (1 - q(i))v^n(i) + q(i)(b + v^n(0)). \quad (7)$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

により、求められることは容易に示される。

3.3 最適政策の構造

以下の条件の下で、最適政策の構造について考察する。

- (i) $q(i) \uparrow i$
- (ii) $q(i+1) - q(i) \downarrow i$
- (iii) $r(t) \equiv f(t)/\bar{F}(t-1) \uparrow t$
- (iv) 各 k に対し、 $\bar{G}_k(t) \downarrow t$

条件 (i) ~ (iv) の下で次の補題を得る。

[補題 1]

- (i) $v(i) \uparrow i$
- (ii) $v(i) \leq b + v(0)$
- (iii) $v(i+1) - v(i) \downarrow i$
- (iv) $Q(i) \uparrow i$
- (v) $Q(i+1) - Q(i) \downarrow i$
- (vi) $\sum_{k=0}^{\infty} q_t(k)[Q(i+k) - Q(k) - a] \uparrow t$

[証明]

$H_i^n(t)$, $Q^n(i)$, に関し、式 (4)―(7) から、次式を得る.

$$H_{i+1}^{n+1}(t) - H_i^{n+1}(t) = \sum_{y=1}^t \beta^y f(y) \sum_{k=0}^{\infty} g_y(k) [Q^{n+1}(i+1+k) - Q^{n+1}(i+k)] \quad (8)$$

$$H_i^{n+1}(t+1) - H_i^{n+1}(t) = \beta^{t+1} \bar{F}(t) h_i^{n+1}(t+1) \quad (9)$$

ここで、

$$h_i^{n+1}(t) \equiv (1 - \frac{1}{\beta})a + r(t) \sum_{k=0}^{\infty} g_t(k) [Q^{n+1}(i+k) - Q^{n+1}(k) - a] \quad (10)$$

また、

$$h_{i+1}^{n+1}(t) - h_i^{n+1}(t) = r(t) \sum_{k=0}^{\infty} g_t(k) [Q^{n+1}(i+1+k) - Q^{n+1}(i+k)] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} Q^{n+1}(i+1) - Q^{n+1}(i) &= (1 - q(i+1)) [v^n(i+1) - v^n(i)] \\ &\quad + [q(i+1) - q(i)] [b + v^n(0) - v^n(i)] \end{aligned} \quad (12)$$

n に関する数学的帰納法により、条件 (i)~(iv) の下で、補題が成立することを示すのは直接的であり、詳細は省略する.

さて、式 (11) によると、 $h_i(t)$ は各 t において、 i に関し非減少であることがわかる。また、式 (10) によると、 $h_i(t)$ は各 i において、 t に関し符号の変化がせいぜい 1 回であり、変化するときは負から正へであることがわかる。以上のことは、最適政策において、次の定理が成り立つことを示している。

[定理 1]

E_i における最適な予防取替時間を t_i で示す。このとき、ある $m \leq M$ が存在して、

$$i \leq m \text{ のとき、} \quad t_i = \infty,$$

$$m < i < M \text{ のとき、} \quad 1 \leq t_i < \infty, \text{ であり、} \quad t_i \geq t_{i+1},$$

$$M \leq i \text{ のとき、} \quad t_i = 0,$$

である。

4 最適取替政策 - モデル II

4.1 取替政策

以下の時点を定義する.

$E_{i,j}, i = 0, 1, 2, \dots, j = i, i+1, \dots$: ダメージ量 i のショックが生じ、故障せずに累積ダメージが j となった時点.

$E_{i,0}, i = 0, 1, 2, \dots$: ダメージ量 i のショックが生じ、故障せずに累積ダメージ量が 0 となった、あるいは、故障し、取替を行った時点.

$E_{i,j}$ における取替政策、および問題は、モデル I と同じである.

4.2 定式化

$v(i, j)$ を $E_{i,j}$ から出発したときの最適コストとすると、 $v(i, j)$ は次式を満たす.

$$v(i, j) = \min_{t=0,1,2,\dots,\infty} H_{i,j}(t) \quad (13)$$

$$H_{i,j}(t) \equiv \beta^t \bar{F}_i(t) a + \sum_{y=t+1}^{\infty} \beta^y f_i(y) Q(0) + \sum_{k=1}^t \beta^y f_i(y) Q(j) \quad (14)$$

$$Q(j) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} g(k) [(1 - q(j+k))v(k, j+k) + q(j+k)(b + v(k, 0))] \quad (15)$$

4.3 最適政策の構造

以下の条件の下で、最適政策の構造について考察する.

(i) $q(i) \uparrow i$

(ii) $r_i(t) \equiv f_i(t)/\bar{F}_i(t-1) \uparrow t, \uparrow i$

条件 (i), (ii) の下で次の補題を得る.

[補題 2]

- (i) 各 i に対し、 $v(i, j) \uparrow j$
- (ii) $v(i, j) \leq b + v(i, 0)$
- (iii) $Q(j) \uparrow j$

証明は [補題 1] におけるのと同様に、逐次近似法における数学的帰納法によりなされる。

$H_{i,j}(t)$ の i, j, t に関する振舞いを調べるために、 t に関する差分をとると、

$$H_{i,j}(t+1) - H_{i,j}(t) = \beta^{t+1} \bar{F}_i(t) h_{i,j}(t+1) \quad (16)$$

$$h_{i,j}(t) \equiv \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)a + r_i(t)[Q(j) - Q(0) - a] \quad (17)$$

を得る。

補題 2 から、 $j \leq m \equiv \sup_j \{j | Q(j) - Q(0) - a \leq 0\}$, なる j に対しては、 $h_{i,j}(t) \leq 0$ となることが分かる。また、 $j \geq m+1$ のとき、 $h_{i,j}(t)$ は i, j, t それぞれに関し非減少である。このことから、最適政策の構造に関し、次の定理を得る。

[定理 2]

$E_{i,j}$ における最適な取替時間を $t_{i,j}$ で示す。このとき、ある m が存在し、

$$j \leq m \text{ のとき、} \quad t_{i,j} = \infty,$$

$$j > m \text{ のとき、} \quad t_{i,j} \text{ は、} i, j \text{ に関し非増加である。}$$

5 おわりに

本稿では、2 変量ショック過程にさらされるシステムの最適取替問題を考察した。いくつかの物理的、経済的条件の下で、最適政策の構造を検討し、それがシステムの状態に関し、単調な構造を持っていることを明らかにした。ここでは、時間は離散的であり、ダメージ量も離散値をとる状況の下での問題を論じたが、時間、ダメージ量ともに連続的な場合については、今後の課題としたい。

参考文献

- [1] R. E. Barlow and F. Proschan, *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, 1975.
- [2] J. G. Shanthikumar and U. Sumita, "Distribution properties of the system failure in a general shock model," *Adv. in Appl. Prob.* , vol. 16, pp. 363-377, 1984.
- [3] U. Sumita and J. G. Shanthikumar, "A class of cumulative shock models," *Adv. in Appl. Prob.* , vol. 17, pp. 133-147, 1985.