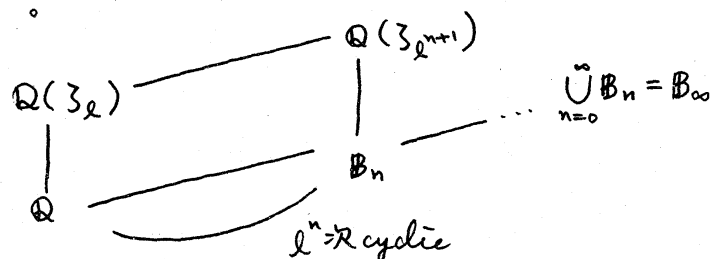


CM体の l 拡大における cyclotomic invariants

山形大 理 木田 祐司

l は固定した奇素数とする。

§ $\mathbb{Q}(\zeta_{l^{n+1}})$ を $\mathbb{Q}$ の l^{n+1} 分体とし, 下図のように体を定める。



任意の有限次代数体 K について $K \cdot B_\infty / K$ を cyclotomic $\mathbb{Z}_l$ -拡大という。 $K_n \in K$ 上 l^n 次 cyclic な中間体とし $K \cdot B_\infty = K$ とおく。

今、 $h(K_n)$ を K_n の類数とあらわせば $l^{e_n} \parallel h(K_n)$ を定める整数 e_n について次の式が成立する。

$$e_n = \lambda_l(K) \cdot n + \mu_l(K) \cdot l^n + \nu_l(K) \quad \forall n \gg 0$$

ここに $\lambda_l(K), \mu_l(K), \nu_l(K)$ は n に無関係な整数である。

一方、 K_n の l -class group を $A(K_n)$ とすると

$X = \varprojlim A(K_n)$ は abel 群としては、大体
 $\mathbb{Z}_\ell^{\lambda_\ell(K)} \oplus (\ell^{\mu_\ell(K)} \text{ 次 abel 群の可算無限積})$
 に同型になる。

代数函数体の類似から $\mu_\ell(K) = 0$ が予想され (これは K が $\mathbb{Q}$ 上 abelian ならば [1] で肯定的に解かれた) また $\lambda_\ell(K)$ は genus に対応する量と考えられる。この辺は [5] に詳しい。

ここで K を CM 体 (すなわち総実代数体の 2 次拡大となっている総虚代数体) とすると、以上のものをすべての minus part ($e_n^-, \lambda_\ell^-(K), \mu_\ell^-(K), \nu_\ell^-(K), A^-(K_n), X^-$) が考えられる。すると $\mu_\ell^-(K) = 0$ ならば

$$\Delta 1. \quad \lambda_\ell^-(K) = e_{n+1}^- - e_n^- \quad \forall n \gg 0$$

が、すぐに出る、更に少し議論を要するが

$$\Delta 2. \quad \lambda_\ell^-(K) = d^{(\ell)} A^-(K_n) \quad \forall n \gg 0$$

が出る。 $d^{(\ell)}$ は ℓ -rank を示す。

この 2 方向から $\lambda_\ell^-(K)$ を追って次の公式を得る。

定理 L, F は共に CM 体で、 L/F は有限 ℓ 拡大 (すなわち有限次 Galois 拡大で次数が ℓ の中) とする。更に $\mu_\ell^-(F) = 0$ とすると $\mu_\ell^-(L) = 0$ であり、かつ

$$\bar{\lambda}_l(L) - \delta = [L_\infty : F_\infty] (\bar{\lambda}_l(F) - \delta) + \sum_{\mathfrak{p} \nmid l} (e_{\mathfrak{p}} - 1) - \sum_{\mathfrak{p}_+ \nmid l} (e_{\mathfrak{p}_+} - 1)$$

ただし $\delta = \begin{cases} 1 & \text{if } F \ni \zeta_l \\ 0 & \text{if } F \nmid \zeta_l \end{cases}$

であり, $e_{\mathfrak{p}}, e_{\mathfrak{p}_+}$ は $L_\infty, L_{\infty,+}$ (L, L_+ ではない) の素ideal $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_+$ のそれぞれ $L_\infty/F_\infty, L_{\infty,+}/F_{\infty,+}$ における分岐指数を示す。

注 特に $F \ni \zeta_l$ の時は L_∞/F_∞ で分岐する (すなわち $e_{\mathfrak{p}} \neq 1$) $\mathfrak{p}(l)$ は $L_\infty/L_{\infty,+}$ で分解するから上式は

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_l(L) - 1 &= [L_\infty : F_\infty] (\bar{\lambda}_l(F) - \delta) + \sum_{\mathfrak{p} \nmid l} (e_{\mathfrak{p}_+} - 1) \\ &= [L_\infty : F_\infty] (\bar{\lambda}_l(F) - \delta) + \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{p} \nmid l} (e_{\mathfrak{p}} - 1) \end{aligned}$$

となつて Riemann-Hurwitz の公式の類似を与える。

注 この公式は l -拡大でないと必ずしも成立しない。たとえば $l=3$ とし、5次cyclic拡大 $\mathbb{Q}(\zeta_3, \zeta_{11} + \zeta_{11}^{-1}) / \mathbb{Q}(\zeta_3)$ を考え、 ζ とし、公式をそのまま適用すれば、

$\lambda_3(\mathbb{Q}(\zeta_3, \zeta_{11} + \zeta_{11}^{-1})) = -4 < 0$ となって矛盾する。

これは1つの素数 l についてだけ考えているのだから、ある意味では当然である。体を固定して、 l を動かした時の λ_l 達 (bounded であるだろうか?) の集合を考え、そこから何か新しい量、概念を導き出す必要があるのかかもしれない。もっとも cyclotomic $\mathbb{Z}$ 拡大の理論などというものが作られれば、それは自然に出て来るのだけれど、そんな理論は今どこまで系口すら見出されていらない。

§ 有限 l 拡大は l 次 cyclic 拡大の積み重ねであるから、まず CM 体の l 次 cyclic 拡大について調べる。

K, F 共に CM 体で K/F は l 次 cyclic とする。

F の ideal $\mathfrak{o}$ について $\mathfrak{o}$ を含む F の ideal 類を、 $\mathfrak{o}$ を含む K の ideal 類に対応させれば $\mathcal{C}(F)$ から $\mathcal{C}(K)$ への自然な準同型が得られる (一般論は [4] などと参照のこと)。

これより (定義域制限)

$$\varphi^-: A^-(F) \longrightarrow A^-(K)$$

が作られる。

命題 1 $F \ni \zeta_{l^v}$, $\nexists \zeta_{l^{v+1}}$ として v を定めるとき、次のどれかが成立すれば、 φ^- は injective となる。

1) $v = 0$ 。

2) $v \geq 1$ ぞ $K = F(\zeta_{\ell^{v+1}})$ 。

3) K/F ぞ ℓ を割らない素 ideal が分岐する。

注 実際に φ^- が non-injective な事があるのかどうかは筆者は知らない。

次に特異類について調べる。

$$A(K)^G \stackrel{\text{def}}{=} \{ a \in A(K) \mid a^\sigma = a \text{ for } \forall \sigma \in G = \text{Gal}(K/F) \}$$

とすると $\forall \sigma \in G$ と複素共役は可換ゆえ

$$A(K)^G = A^+(K)^G \oplus A^-(K)^G$$

と分解される。ここに $A^+(K)^G \simeq A(K_+)^{G^+}$, $G^+ = \text{Gal}(K_+/F_+)$ だから特異類数の公式 ([8]) を用いて $A(K)^G$, $A^+(K)^G$ の位数を求め比をとれば

$$\text{命題 2} \quad |A^-(K)^G| = |A^-(F)| \cdot \ell^{t-t_+-\delta}$$

ここに, t, t_+ は $K/F, K_+/F_+$ ぞ分岐する素 ideal の数で
 $\ell^\delta = [W(F) : W(F) \cap \mathcal{N}_{K/F} K^\times]$ ($W(F)$ は F に含まれる 1 の n 根全体の群)。更に v を命題 1 のと同じものとする。

$$1) \quad v = 0 \Rightarrow \delta = 0.$$

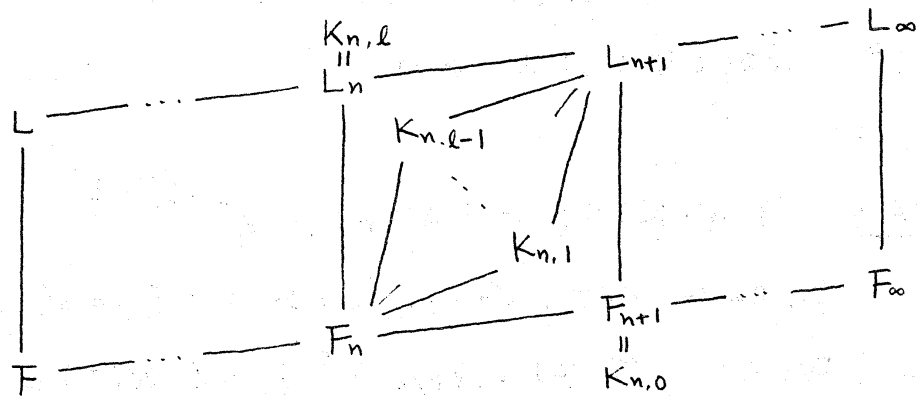
$$2) \quad v \geq 1 \text{ ぞ } K = F(\zeta_{\ell^{v+1}}) \Rightarrow \delta = 0.$$

3) $v \geq 1$ で F の素 $ideal$ で l を割らず, K/F で分岐し $F(\zeta_{l^{v+1}})/F$ で分解しないものがある $\Rightarrow \delta = 1$ 。

更に, この3つの場合 $A^-(K)^G$ の元はすべて特異 $ideal$ を含む。

以上の2つの命題とともに類体論の簡単な応用なので証明は略す。

§ L/F が l 次 $cyclic$ の場合に定理の証明をす。が L_∞/F_∞ も l 次 $cyclic$ として示せば十分である。この時, 中間体の状況は次の通りで, すべて CM 体である。



さて $\mu_l(F) = 0$ から $\mu_l(L) = 0$ を示す事は命題2を用いて [6] と同様の議論によりなされる。そこで以下では $\mu_l(F) = \mu_l(L) = 0$ とする。

まず、次の仮定をおく。

(仮定 A) $\mathfrak{l}$ を割らない素 ideal が L/F (従って L_n/F_n $\forall n \geq 0$) で分岐している。

そして命題 1 より $A^-(F_n), A^-(K_{n,i})$ をすべて $A^-(L_{n+1})$ の中で考えられる。又、命題 2 より $n \gg 0$ ならば、特異類は特異 ideal を含むので議論が簡単になる。2. 次の命題を得る。この証明が最大の難関であるが、長いので略す。

命題 3 $G_i = \text{Gal}(K_{n,i}/F_n)$ とおくと、 $i \neq 0$ ならば

$$d^{(l)} A^-(K_{n,i})^{G_i} = d^{(l)} A^-(F_n) + S_{\infty} - S_{\infty,+} - \delta \quad \forall n \gg 0$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{if } F \ni \mathfrak{z}_l \\ 0 & \text{if } F \not\ni \mathfrak{z}_l \end{cases}$$

$S_{\infty}, S_{\infty,+}$ は $L_{\infty}/F_{\infty}, L_{\infty,+}/F_{\infty,+}$ で分岐する $L_{\infty}, L_{\infty,+}$ の素 ideal $\mathfrak{z}$ を割らないものの個数。

ここで、特に $i=l$ の場合つまり L_n/F_n の特異類を考えれば $d^{(l)} A^-(L_n) \leq (l-1) d^{(l)} A^-(L_n)^{G_l} + d^{(l)} A^-(F_n) \quad \forall n \geq 0$ かつ $d^{(l)} A^-(L_n) \leq l \cdot d^{(l)} A^-(F_n) + (l-1)(S_{\infty} - S_{\infty,+} - \delta) \quad \forall n \gg 0$ によって $\lambda_l(L) \leq l \cdot \lambda_l(F) + (l-1)(S_{\infty} - S_{\infty,+} - \delta)$ が出る。

以上はすべて代数的な議論だけで済んだが、逆向きの不等式を出すためには、解析的類数公式による次の補題が必要となる。これを避ける事が望ましい。

補題 $h'(L_{n+1})/h'(F_n) = \prod_{i=0}^l \{h'(K_{n,i})/h'(F_n)\}$
 $\forall n \geq 0$, ただし $h'(K) = h^-(K)/Q(K)$, $Q(K)$ は K の unit index.

整数 $e^-(K) \in \mathbb{Z}$ $\parallel h^-(K)$ で定めると、補題より

$$e^-(L_{n+1}) - e^-(F_n) = \sum_{i=0}^l \{e^-(K_{n,i}) - e^-(F_n)\}$$

よって, $n \gg 0$ なら

$$\lambda_l(L) = \lambda_l(F) + \sum_{i=1}^{l-1} \{e^-(K_{n,i}) - e^-(F_n)\}$$

ゆえ、右辺の各項を下から評価する。

$A^-(F_n)$ が $A^-(K_{n,i})$ の中に自然に injective に入っていると、norm map $\mathcal{N}_i$ は $A^-(K_{n,i})$ から $A^-(F_n)$ への準同型と見ても、 $A^-(K_{n,i})$ の自己準同型と見ても同じである。

$\mathcal{N}_i$ は $A^-(K_{n,i})^{G_i}$ の元には ℓ 乗する事と同じに作用する。

$$\text{よって } \text{Ker } \mathcal{N}_i \supset \ell A^-(K_{n,i})^{G_i}$$

すなわち $|\text{Ker } \mathcal{N}_i| \geq \ell^{d^{(u)} A^-(K_{n,i})^{G_i}}$ 。又、類体論より $\text{Im } \mathcal{N}_i = A^-(F_n)$ であるから、これを一般の関係式 $|A^-(K_{n,i})| = |\text{Im } \mathcal{N}_i| |\text{Ker } \mathcal{N}_i|$ に代入すれば

$$e^-(K_{n,i}) - e^-(F_n) \geq d^{(l)} A^-(K_{n,i})^{q_i} = \lambda_l(F) + S_\infty - S_{\infty,+} - \delta$$

$\forall n \gg 0$ が成り立つ。よって

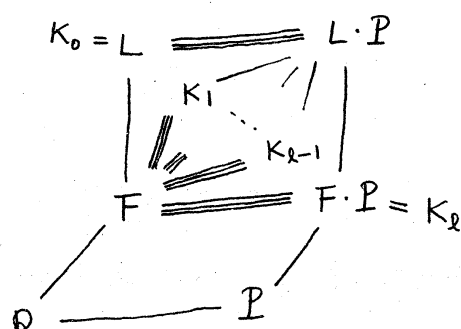
$$\lambda_l(L) \geq \lambda_l(F) + (l-1)(\lambda_l(F) + S_\infty - S_{\infty,+} - \delta)$$

従って、仮定 (A) のもと

$$\lambda_l(L) - \delta = l(\lambda_l(F) - \delta) + (l-1)(S_\infty - S_{\infty,+})$$

を得る。これは定理に他ならぬ。

仮定 (A) の成立しない場合、すなわち L/F が l の外で不
合点の場合は、次のような補助の体 P を用いる。体 $P \in$
 $p \equiv 1 \pmod{l}$, $p \nmid d(F)$ な素数 p についての $\mathbb{Q}(\zeta_p)$
の $\mathbb{Q}$ 上 l 次の中間体とする。



上図中、三重線の拡大は仮定 (A) が成立しているから
 $S_\infty, S_{\infty,+} \in K_l/F$ について定めれば $K_1, K_2, \dots, K_{l-1}/F$
についても同じ値、 $L.P/L$ については $l \cdot S_\infty, l \cdot S_{\infty,+}$ となる。
よって $i=1, 2, \dots, l$ について、

$$\lambda_l(K_i) - \delta = l(\lambda_l(F) - \delta) + (l-1)(S_\infty - S_{\infty,+})$$

$$\lambda_l(L.P) - \delta = l(\lambda_l(L) - \delta) + (l-1)(l S_\infty - l S_{\infty,+})$$

前の補題は任意の abelian (ℓ, ℓ) 拡大について成立する公式なので

$$\lambda_{\ell}(\bar{L} \cdot \bar{P}) - \lambda_{\ell}(\bar{F}) = \sum_{i=0}^{\ell} \{ \lambda_{\ell}(K_i) - \lambda_{\ell}(\bar{F}) \}$$

が成立する。以上の式より $\lambda_{\ell}(\bar{L} \cdot \bar{P})$, $\lambda_{\ell}(K_i)$ ($i \neq 0$) を消去すれば $\lambda_{\ell}(\bar{L}) - \delta = \ell(\lambda_{\ell}(\bar{F}) - \delta)$

となつて、この時も定理は正しい。

§ 一般の場合の証明は有限 ℓ 拡大は ℓ 次 cyclic 拡大の積み重ねであるから induction で出来る。ただし ℓ を割らない素 ideal は L_{∞}/F_{∞} で相対次数は変わらない事を注意しておく。

§ 公式の別の解釈。公式は λ_{ℓ} のみの式であるが、それだけでかなり意味があるという事が次の2つの理由から言える。1つは λ_{ℓ}^+ が常に 0 (すなわち任意の総実代数体について λ_{ℓ} が 0) と予想されている事。もう1つは [3] 等で述べているように

K を CM 体とすると λ_{ℓ} を言ひものとする。

X を K_{∞} の最大不分裂 abel ℓ 拡大の Galois 群。

Y_+ を $K_{\infty,+}$ の ℓ の外で不分裂な最大 abel ℓ 拡大の Galois 群 とすると

$$X^- \cong Y_+ \quad (\text{abel 群として})$$

(X^- の定義は [3] のそれとは異なるが同型である事はすぐわかる) となる。だから $\mathbb{Z}_\ell + \mathbb{Z}_\ell^{-1}$ を含む総奥代数体の拡大の話だとも言える。

例 $\ell = 3$, $F = \mathbb{Q}(\mathbb{Z}_3)$, L_+ : ℓ を割らない素 ideal が分岐してゐる $\mathbb{Q}$ 上の ℓ 次 cyclic な体, $L = F \cdot L_+$ とおく。

$$\chi_3(F) = 0 \quad \text{だから定理より} \quad \chi_3(L) = 2(S_{\infty,+} - 1)$$

ただし $S_{\infty,+}$ は $L_{\infty,+} / F_{\infty,+}$ で分岐する $F_{\infty,+}$ の素 ideal の数。

$$\text{しからば} \quad Y_+ \cong \mathbb{Z}_3^{2(S_{\infty,+} - 1)} \quad \text{を得る。}$$

参考文献

- [0] Kida, Y.: ℓ -Extensions of CM-fields and Cyclotomic Invariants, to appear in J. Number Theory.
- [1] Ferrero, B., Washington, L.: The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields. Ann. of Math. 109, 377~395 (1979).
- [2] Gold, R.: The nontriviality of certain $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions. J. Number Theory 6, 369~373 (1974).
- [3] Greenberg, R.: On p -adic L functions and cyclotomic fields II. Nagoya Math. J. 67, 139~158 (1977).

- [4] Iwasawa, K. : A note on the group of units of algebraic number field. *J. math. pure appl.* 35, 189~192 (1956).
- [5] 岩沢健吉 : 代数体と函数体のあい類似について。
数学 第15巻 65~67 (1963)。
- [6] Iwasawa, K. : On the μ -invariants of $\mathbb{Z}_2$ -extensions.
In: *Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, in honor of Y. Akizuki, pp 1~11.
Tokyo, Kinokuniya 1993.
- [7] Iwasawa, K. : On $\mathbb{Z}_2$ -extensions of algebraic number fields.
Ann. of Math. 98, 246~326 (1993).
- [8] Yokoi, H. : On the class number of a relatively cyclic number field. *Nagoya Math. J.* 29, 31~44 (1969).

※ この研究にあたり、これは 昭和54年度科学研究費補助金
(奨励研究(A)) を受けた。