

Resolvent Estimates in Amalgam Spaces and Asymptotic Expansions for Schrödinger Equations

By

ARTBAZAR GALTBUYAR* and KENJI YAJIMA**

Abstract

We consider Schrödinger equations $i\partial_t u = (-\Delta + V)u$ in $\mathbb{R}^3$ with a real potential V such that, for an integer $k \geq 0$, $\langle x \rangle^k V(x)$ belongs to an amalgam space $\ell^p(L^q)$ for some $1 \leq p < 3/2 < q \leq \infty$, where $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$. Let $H = -\Delta + V$ and let P_{ac} be the projector onto the absolutely continuous subspace of $L^2(\mathbb{R}^3)$ for H . Assuming that zero is not an eigenvalue nor a resonance of H , we show that solutions $u(t) = \exp(-itH)P_{ac}\varphi$ admit asymptotic expansions as $t \rightarrow \infty$ of the form

$$\left\| \langle x \rangle^{-k-\varepsilon} \left(u(t) - \sum_{j=0}^{[k/2]} t^{-\frac{3}{2}-j} P_j \varphi \right) \right\|_{\infty} \leq C |t|^{-\frac{k+3+\varepsilon}{2}} \|\langle x \rangle^{k+\varepsilon} \varphi\|_1$$

for $0 < \varepsilon < 3(1/p - 2/3)$, where $P_0, \dots, P_{[k/2]}$ are operators of finite rank and $[k/2]$ is the integral part of $k/2$. The proof is based upon estimates of boundary values on the reals of the resolvent $(-\Delta - \lambda^2)^{-1}$ as an operator-valued function between certain weighted amalgam spaces.

§ 1. Introduction

ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^3)$ におけるシュレーディンガー方程式に対する初期値問題

$$(1.1) \quad i\partial_t u = (-\Delta + V(x))u, \quad u(0) = \varphi.$$

の解の $t \rightarrow \pm\infty$ における漸近挙動を考える。 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ と書く。この論文ではポテンシャル V は実数値で少なくとも次の条件を満たすと仮定する： $1 \leq p < 3/2 < q \leq \infty$ を

Received January 4, 2012. Revised October 3, 2012.

2000 Mathematics Subject Classification(s):

Supported by JSPS grant in aid for scientific research No. 22340029.

*School of Mathematics and Computer Science, National University of Mongolia.

**Department of Mathematics, Gakushuin University, 1-5-1 Mejiro, Toshima-ku, Tokyo 171-8588, Japan.

満たすある p, q に対して

$$(1.2) \quad V \in \ell^p(L^q) = \{u: \|u\|_{\ell^p(L^q)} \equiv \left(\sum_{j \in \mathbf{Z}^3} \|\chi_{Q_j} u\|_q^p \right)^{1/p} < \infty\},$$

ただし Q_j は $j \in \mathbf{Z}^3$ を中心とする単位立方体, χ_{Q_j} はその特性関数, $\|\cdot\|_s = \|\cdot\|_{L^s}$ はルベーグ空間 $L^s(\mathbb{R}^3)$ のノルムである。 $\ell^r(L^s)$ はアマルガム空間と呼ばれ, 局所的には L^s 的, 大域的には L^r 的な振る舞いをする関数の空間で, 特異性と無限遠方での減衰を区別するが, なお $\mathbf{Z}^3$ -平行移動不変なノルムをもつ使いやすい空間である。

H のスペクトル $\ell^r(L^s)$ は Banach 空間で包含関係

$$\ell^{r_1}(L^{s_1}) \subset \ell^{r_2}(L^{s_2}), \quad r_1 \leq r_2, \quad s_1 \geq s_2$$

を満たす。従って, (1.2) の仮定の下で

$$(1.3) \quad V \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap L^q(\mathbb{R}^3),$$

とくに V は

$$(1.4) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y| < r} \frac{|V(y)|}{|x-y|} dy = 0$$

を満たす, いわゆる加藤型ポテンシャルである。これから次が成立する:

(1) $H = -\Delta + V$ は定義域を

$$D(H) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^3): Vu \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3), -\Delta u + Vu \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$$

と決めると $\mathcal{H}$ の自己共役作用素である ([31])。従って, (1.1) の初期条件 $u(0) = \varphi \in \mathcal{H}$ を満たす $\mathcal{H}$ での解は一意的で $u(t) = e^{-itH}\varphi$ で与えられる。

$H_0 = -\Delta$, $D(H_0) = H^2(\mathbb{R}^3)$ と定義する。 H, H_0 のレゾルベントをそれぞれ $R(z) = (H - z)^{-1}$, $R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$ と書く。

$R(z) - R_0(z)$ は $\mathcal{H}$ のコンパクト作用素, 従って, ワイルの安定性定理 ([31]) によって H の本質的スペクトル $\sigma_{\text{ess}}(H) = [0, \infty)$, $\sigma(H) \cap (-\infty, 0)$ は H の離散スペクトルである。一般に $V \in L^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$ の時, 特に (1.3) の時, $H = -\Delta + V$ に対して正の固有値は存在しない ([18], [26] の拡張も参照)。従って, $[0, \infty)$ は H の連続スペクトルである。一方, $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 3$ における $H = -\Delta + V$ の負の固有値の数 $N(V)$ は Cwickel-Lieb-Rosenbjum の定理によって

$$N(V) \leq C \|V_-\|_{L^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)}$$

を満たす ([32])。これから次が分かる。

- (2) $\sigma_p(H)$ は有限個で, 負または零の多重度有限な固有値からなる。 $\sigma_{ess}(H) = \sigma_c(H) = [0, \infty)$ である。

複素数上半平面を $\mathbf{C}^+$ と書き, $\lambda \in \overline{\mathbf{C}}^+ = \{\lambda \in \mathbf{C} : \Im \lambda \geq 0\}$ に対して

$$G_0(\lambda) = R_0(\lambda^2), \quad G(\lambda) = R(\lambda^2)$$

と定める。 $G_0(\lambda)$ と $R_0(\lambda^2)$ の実軸への境界値の間には

$$G_0(\pm\lambda) = R_0(\lambda^2 \pm i0), \quad G(\pm\lambda) = R(\lambda^2 \pm i0), \quad \lambda \geq 0$$

の関係がある。 $G_0(\lambda)$ はよく知られた簡単な形の積分核をもち

$$(1.5) \quad G_0(\lambda)u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{|x-y|} u(y) dy$$

と表される。これに Hardy の不等式を用いれば $\lambda \in \overline{\mathbf{C}}^+$ の時, $VG_0(\lambda) \in \mathbf{B}(L^1)$ で, V を $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ で近似すれば, $VG_0(\lambda)$ は $L^1(\mathbb{R}^3)$ のコンパクト作用素であることも分かる。

$$G(\lambda) = G_0(\lambda)(1 + VG_0(\lambda))^{-1}, \quad \lambda^2 \notin \sigma_p(H)$$

が成立する。Goldberg-Schlag([14]) は Agmon-Kuroda のよく知られた議論をルベーク空間 $L^1(\mathbb{R}^3)$ の間の作用素 $1 + VG_0(\lambda)$ に対して拡張し, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ の時にも

$$-1 \in \sigma_{L^1}(VG_0(\lambda)) \Leftrightarrow \lambda^2 \in \sigma_p(H)$$

が成立することを示した。ここで, 一般に $1 \leq q \leq \infty$ に対して, $\sigma_{L^q}(K)$ などは $L^q(\mathbb{R}^3)$ 上のコンパクト作用素 K などのスペクトル (固有値の集合) である。これより, 上に注意した Ionescu-Jerison の正の固有値の不存在定理によって, (1.3) を満たす V に対して, $G(\lambda)$ は上半平面から $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ まで $\mathbf{B}(L^1, L^{3,\infty})$ 値連続関数として拡張され, 任意の $\delta > 0$ に対して定数 C_δ が存在して

$$(1.6) \quad \sup_{|\lambda| \geq \delta} \|G(\lambda)u\|_{L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)} \leq C_\delta \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}$$

が成立することが分かる (極限吸収原理. [19] による拡張も参照)。これによって:

- (3) $[0, \infty)$ は H の絶対連続スペクトル $\sigma_{ess}(H)$ に等しい。

P_{ac} を H の絶対連続スペクトル部分空間 $\mathcal{H}_{ac}$ への直交射影とする。

0 が H の固有値であることはあり得る。さらに, $-1 \in \sigma_{L^1}(VG_0(0))$ であっても, 0 が固有値でないこともある。

$$-1 \in \sigma_{L^1}(VG_0(0)) \Leftrightarrow -1 \in \sigma_{L^\infty}(G_0(0)V)$$

である。 $\mathcal{N} = \text{Ker}_{L^\infty}(1 + G_0(\lambda)V) = L^\infty$ における $1 + G_0(\lambda)V$ の零空間と定義する。

$$\mathcal{N} \subset \cap_{s>3} L^s(\mathbb{R}^3), \quad u \in \mathcal{N} \Rightarrow (-\Delta + V)u(x) = 0$$

である。 $\mathcal{N} \cap L^2(\mathbb{R}^3) \neq \{0\}$ なら 0 は H の固有値であるが、 $\mathcal{N} \subset L^2(\mathbb{R}^3)$ となるとは限らない。この時、 $u \in \mathcal{N} \setminus L^2$ は H の（閾値）レゾナンス状態、 0 は H のレゾナンスであるという。 $\mathcal{N} \cap L^2(\mathbb{R}^d) = \{0\}$ の場合もあり、この場合 0 はレゾナンスであるが、固有値ではない。

定義 1.1. H は 0 が H の固有値でもレゾナンスでもないとき *generic type*, そうでない時 *exceptional type* という。 H が *generic type* であることと $u \in \cap_{3<s\leq\infty} L^s(\mathbb{R}^3)$ を満たす $-\Delta u(x) + V(x)u(x) = 0$ の解 $u \neq 0$ が存在しないことは同値である。

H が *generic type* であることは $\mathcal{N} = \{0\}$ であることと同値で、この時、上の議論から分かるように、極限吸収原理が 0 を込めて成立し、(1.6) が $|\lambda| > \gamma$ の制限を取り除いて成立する：ある定数 $C > 0$ が存在して

$$(1.7) \quad \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|G(\lambda)u\|_{L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}.$$

Global dispersive estimate V が (1.3) を満たし H が *generic type* の時、次の評価が Goldberg([15]) によって証明されている：

$$(1.8) \quad \|e^{-itH} P_{ac} \varphi\|_\infty \leq C |t|^{-3/2} \|\varphi\|_1, \quad \varphi \in L^1(\mathbb{R}^3) \cap L^2(\mathbb{R}^3).$$

これは時間大域的な分散型評価と呼ばれ、 $V = 0$ の時には解の表現式

$$(1.9) \quad e^{-itH_0} \varphi(x) = \frac{e^{\mp \frac{3\pi i}{4}}}{(2\pi|t|)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i(x-y)^2}{2t}} \varphi(y) dy$$

からほぼ自明な評価である。この評価 (1.8) は微妙なもので H が *generic* でないと一般には成立しない。 $V \neq 0$ の時、一般の次元 $d \geq 1$ の *generic type* の H に対する大域的な分散型評価

$$(1.10) \quad \|e^{-itH} P_{ac} \varphi\|_\infty \leq C |t|^{-d/2} \|\varphi\|_1, \quad \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$$

は Journé-Soffer-Sogge [23] によって初めて示された。[23] における条件はある $\alpha > d+4$ と $\sigma > 0$ に対して

$$\hat{V} \in L^1(\mathbb{R}^d), \quad \langle x \rangle^\alpha V : W^{\sigma,2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow W^{\sigma,2}(\mathbb{R}^d)$$

であったが、この条件は次第に改良されて、とくに $d = 3$ における上に述べた結果はほぼ “sharp” ある。ここで $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$ である。同様に $d = 1$ でも sharp な結果が得られていて $\langle x \rangle^1 V(x) \in L^1$ であれば (1.10) が成立する。ほかの次元では結果が sharp がどうか不明であるが次の十分条件が知られている：

- (1) $d = 2$ の時, $|V(x)| \leq C\langle x \rangle^{-3-\varepsilon}$ ([35]) .
- (2) $d = 4$ の時, $V \in C^{(d-3)/2}$ で $|V(x)| \leq C\langle x \rangle^{-3-\varepsilon}$ ([5], [6]) .
- (3) $d = 5$ の時, $V \in C^{(d-3)/2}$ で $|V(x)| \leq C\langle x \rangle^{-5-\varepsilon}$ ([5], [6]) .
- (4) $d \geq 6$ の時, $|V(x)| \leq C\langle x \rangle^{-d-2-\varepsilon}$ で $d_* = \frac{d-1}{d-2}$ と $\sigma > \frac{1}{d_*}$ に対して $\mathcal{F}(\langle x \rangle^{2\sigma} V) \in L^{d_*}(\mathbb{R}^d)$. ただし, $\mathcal{F}$ はフーリエ変換である。

$d = 1$ の時には $\langle x \rangle^1 V(x) \in L^2$ であれば, H が exceptional type の時にも (1.10) が成立する。一方, $d \geq 2$ の時には, H が exceptional type だと (1.10) は成立しないが, $d = 3$ の時には, この時にも, $e^{-itH} P_{ac} u$ の漸近挙動の精密な情報が得られている ([39], [9, 10]).

主定理 この講演の目的は Goldberg の評価 (1.8) における, 主要項を取り出して, $e^{-itH} P_{ac}$ の漸近展開を与える次の定理を示すことである。 $a \geq 0$ の時, $[a]$ は a の整数部分である。

定理 1.2. V はある整数 $k \geq 0$ とある $1 \leq p < 3/2 < q \leq \infty$ に対して

$$(1.11) \quad \langle x \rangle^k V \in \ell^p(L^q)$$

みたし, H は generic type と仮定する。この時, 任意の $0 \leq \varepsilon < 3(1/p - 2/3)$ に対して $e^{-itH} P_{ac}$ は $t \rightarrow \infty$ において次の漸近展開を持つ:

$$(1.12) \quad \left\| \langle x \rangle^{-k-\varepsilon} \left(e^{-itH} P_{ac} - \sum_{j=0}^{[k/2]} t^{-\frac{3}{2}-j} P_j \right) \varphi \right\|_{\infty} \leq C |t|^{-\frac{k+3+\varepsilon}{2}} \|\langle x \rangle^{k+\varepsilon} \varphi\|_1,$$

ここで $P_0, \dots, P_{[k/2]}$ は $(H - \lambda^2)^{-1}$ の $\lambda = 0$ の微分を用いて書ける有限次元作用素, $C > 0$ は φ によらない定数である。 $t \rightarrow \infty$ でも同様である。

定理についてのいくつかの注意を与えよう。

注意 1.3.

- (1) $H = -\Delta$ の時の表現式 (1.9) から確かめられるように, (1.12) の右辺の減衰度 $C|t|^{-\frac{k+3+\varepsilon}{2}}$ は sharp である。
- (2) k が整数でない時の V の重みは p を変えることで部分的には吸収できる。
- (3) $k = 0$ の時の (1.12) から, 分散型評価 (1.8) における主要部は $t^{-\frac{3}{2}} P_0$ である。
- (4) V が $|V(x)| \leq C\langle x \rangle^{-\sigma}$ の形の条件を満たすとき, $e^{-itH} P_{ac}$ を重み付き L^2 空間 $\langle x \rangle^{k+\delta} L^2(\mathbb{R}^d)$ から $\langle x \rangle^{-k-\delta} L^2(\mathbb{R}^d)$ ($\delta > d/2$) への作用素と考えての (1.12) と同様な漸近展開が Rauch ([30]) や Jensen-Kato ([20]) , とくに Murata ([29]) によって一般的な条件の下で得られている。これらの結果は H が exceptional type の時にも得られていて, 定理 1.2 はこれらの制限 L^p 版である。この定理を一般次元あるいは, exceptional type の時に拡張することが望まれる。

(5) $d = 1$ の時には, Mizutani ([28]) によって (1.8) が exceptional type の場合を含めて得られている.

以下において証明のあらましを $k = 0$ の場合に限って述べる。 H は generic type と仮定する。証明は Goldberg による分散型評価 (1.8) の論法の精密化で次元が 3 であること, とくに $G_0(\lambda)$ の積分核が (1.5) のように単純な形であることに強く依存する。

この論法を実行するのに weighted resolvent

$$(1.13) \quad G_{0,\varepsilon}(\lambda) = \langle x \rangle^\varepsilon G_0(\lambda) \langle x \rangle^{-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0$$

のアマルガム空間の間の評価が必要で Kenig-Ruiz-Sogge あるいは Goldberg-Schlag の L^p 評価を改良する必要がある。このレゾルベントの評価の改良から始める。

§ 2. Resolvent の評価

$3/2 \leq \rho \leq 2$ に対して双対的な指数 $r(\rho)$ と $s(\rho)$ を

$$r(\rho) = \frac{2\rho}{\rho+1}, \quad s(\rho) = \frac{2\rho}{\rho-1}, \quad \frac{1}{r(\rho)} + \frac{1}{s(\rho)} = 1$$

と定義する。 ρ が $3/2$ から 2 に増加するとき, $r(\rho)$ は増加し, $s(\rho)$ は減少して

$$6/5 \leq r(\rho) \leq 4/3, \quad 4 \leq s(\rho) \leq 6$$

となる。(1.13) で定義した $G_{0,\varepsilon}(\lambda)$ の重み $\langle x \rangle^{-\varepsilon}$ をコントロールするためのパラメータ $\varepsilon_*(\rho)$ と $G_{0,\varepsilon}(\lambda)$ の適当な空間の間での作用素ノルムの $\lambda \rightarrow \infty$ における減衰を記述するための指数 $\delta_*(\rho)$ を

$$(2.1) \quad \varepsilon_*(\rho) = \frac{2}{\rho} - 1, \quad \delta_*(\rho) = 2 - \frac{3}{\rho}.$$

と定義する。 ρ が $3/2$ から 2 に増加すると, $\varepsilon_*(\rho)$ は減少, $\delta_*(\rho)$ は増加して

$$0 \leq \varepsilon_*(\rho) \leq 1/3, \quad 0 \leq \delta_*(\rho) \leq 1/2$$

となる。三点 P_ρ, Q, R を次で定め,

$$P_\rho = \left(\frac{1}{r(\rho)}, \frac{1}{s(\rho)} \right), \quad Q = \left(\frac{2}{3}, 0 \right), \quad R = \left(1, \frac{1}{3} \right),$$

閉三角形 $\triangle P_\rho QR$ から底辺の 2 つの頂点を除いて

$$\mathcal{D}_\rho \equiv \triangle P_\rho QR \setminus \{Q, R\}$$

と定める。さらに $0 \leq \kappa \leq 1$ に対して $\mathcal{D}_\rho$ と頂点 P_ρ を共有し, 底辺が平行な閉三角形から底辺の 2 つの頂点を除いて

$$\mathcal{D}_\rho(\kappa) \equiv \triangle P_\rho Q_\kappa R_\kappa \setminus \{Q_\kappa, R_\kappa\}, \quad Q_\kappa = \left(\frac{2+\kappa}{3}, 0 \right), \quad R_\kappa = \left(1, \frac{1-\kappa}{3} \right).$$

と定義する。点 P_ρ , 底辺 QR および $Q_\kappa R_\kappa$ はそれぞれ直線

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{2+\kappa}{3}$$

上にある。 $0 \leq \theta \leq 1$ に対して底辺 QR , $Q_\kappa R_\kappa$ と平行で $\mathcal{D}_\rho$ および $\mathcal{D}_\rho(\kappa)$ を θ 対 $1-\theta$ に内分する 2 つの線分を

$$L_\theta(\rho) = \mathcal{D}_\rho \cap \left\{ \left(\frac{1}{r}, \frac{1}{s} \right) : \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1-\theta}{\rho} + \frac{2\theta}{3} \right\},$$

$$L_{\kappa,\theta}(\rho) = \mathcal{D}_\rho(\kappa) \cap \left\{ \left(\frac{1}{r}, \frac{1}{s} \right) : \frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1-\theta}{\rho} + \frac{(2+\kappa)\theta}{3} \right\}$$

と定義する。以下, γ は作用素値関数の滑らかさを記述するためのパラメータである。

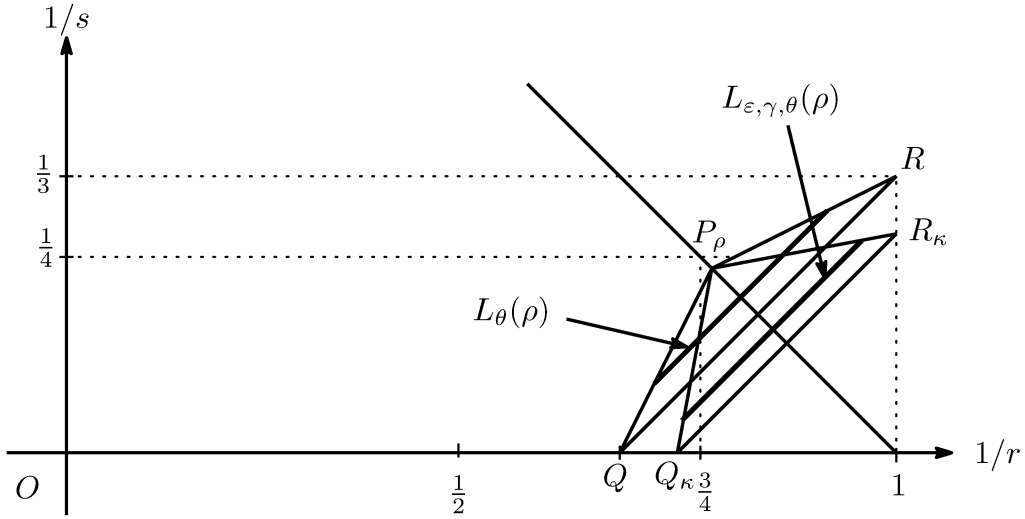


Figure 1.

$$\varepsilon(\rho, \theta) = \theta\varepsilon + (1-\theta)\varepsilon_*(\rho).$$

と定義する。次の評価が成立する：バナッハ空間 $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ に対して $\mathbf{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ は $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ への有界作用素の全体がなすバナッハ空間, $\mathbf{B}(\mathcal{X}) = \mathbf{B}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ である。

定理 2.1. $3/2 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \varepsilon, \gamma$ は $\varepsilon + \gamma \leq 1$ を満たし, $0 < \theta < 1$ とする。

(1) 任意の $\lambda \in \mathbf{C}^+$ に対して $G_{0,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}(\lambda)$ は, $(1/r, 1/s) \in L_\theta(\rho)$ と $(1/\tilde{r}, 1/\tilde{s}) \in L_{\varepsilon,\theta}(\rho)$ を満たす (r, s) , $(\tilde{r}, \tilde{s})$ に対して $\ell^{\tilde{r}}(L^r)$ から $\ell^{\tilde{s}}(L^s)$ への有界作用素. $c > 0$ を定めると $|\lambda| \geq c$ をみたす $\lambda \in \overline{\mathbf{C}^+} \setminus \{0\}$ に対して次の評価を満たす：

$$(2.2) \quad \|G_{0,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}(\lambda)u\|_{\mathbf{B}(\ell^{\tilde{r}}(L^r), \ell^{\tilde{s}}(L^s))} \leq C|\lambda|^{-(1-\theta)\delta_*(\rho)}.$$

(2) $(1/r, 1/s) \in L_\theta(\rho)$ と $(1/\tilde{r}, 1/\tilde{s}) \in L_{\varepsilon+\gamma,\theta}(\rho)$ を満たす (r, s) , $(\tilde{r}, \tilde{s})$ に対して, $G_{0,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}(\lambda)$ は λ の $\mathbf{B}(\ell^{\tilde{r}}(L^r), \ell^{\tilde{s}}(L^s))$ 値関数として

(a) $\mathbf{C}^+$ において正則, $\overline{\mathbf{C}^+} \setminus \{0\}$ において強連続,

- (b) $\gamma > 0$ であれば $\overline{\mathbf{C}}^+ \setminus \{0\}$ において指数 $\theta\gamma$ の局所 Hölder 連続である。
- (c) $c > 0$ の時, 適当な定数 $C > 0$ が存在して $|\lambda| > c$ および $|\sigma| < |\lambda|/2$ に対して

$$(2.3) \quad \|\Delta^\sigma G_{0,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}(\lambda)u\|_{\mathbf{B}(\ell^{\tilde{r}}(L^r), \ell^{\tilde{s}}(L^s))} \leq C|\lambda|^{-(1-\theta)\delta_*(\rho)}|\sigma|^{\theta\gamma},$$

ただし $(\Delta^\sigma f)(\lambda) = f(\lambda + \sigma) - f(\lambda)$ は λ に関する差分作用素である。

レゾルベントの微分に対しては次が成立する。

$$K_{l,\pm\varepsilon}(\lambda) = \langle x \rangle^{-l} G_{0,\pm\varepsilon}(\lambda) \langle x \rangle^{-l}, \quad l = 1, 2, \dots$$

と定義する。

定理 2.2. $l = 1, 2, \dots$ とし, $\rho, \varepsilon, \gamma$ および θ は定理 2.1 の通り, $(r, s), (\tilde{r}, \tilde{s})$ は $(1/r, 1/s) \in L_\theta(\rho), (1/\tilde{r}, 1/\tilde{s}) \in L_{\varepsilon,\gamma,\theta}(\rho)$ を満たす指数とする。この時：

- (a) $\lambda \mapsto K_{l,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}(\lambda) \in \mathbf{B}(\ell^{\tilde{r}}(L^r), \ell^{\tilde{s}}(L^s))$ は $\lambda \in \mathbf{C}^+$ の正則関数, $\lambda \in \overline{\mathbf{C}}^+$ に C^l 級関数として拡張される。
- (b) $u, \lambda \in \overline{\mathbf{C}}^+$ によらない定数 $C > 0$ が存在して次が成立する：

$$(2.4) \quad \sum_{j=1}^l \|K_{l,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}^{(j)}(\lambda)u\|_{\ell^{\tilde{s}}(L^s)} + \sup_{\sigma \neq 0} |\sigma|^{-\gamma\theta} \|\Delta^\sigma K_{l,\pm\varepsilon(\rho,\theta)}^{(l)}(\lambda)u\|_{\ell^{\tilde{s}}(L^s)} \\ \leq C \langle \lambda \rangle^{-(1-\theta)\delta_*(\rho)} \|u\|_{\ell^{\tilde{r}}(L^r)}.$$

定理 2.2 から $G(\lambda) = G_0(\lambda)(1 + VG_0(\lambda))^{-1}$ の λ に関する微分可能性, ならびに導関数の性質が得られるが詳しくは述べない。定理 2.1 ならびに定理 2.2 の証明もここでは与えない。[13] を参照されたい。

§ 3. 定理 1.2 の証明のあらすじ

$k = 0$ の時の定理 1.2 の証明のあらすじを述べる。 $\langle x \rangle^{-s} L^r = \{\langle x \rangle^{-s} u : u \in L^r\}$ は重み付き L^2 空間,

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} u(x) \overline{v(x)} dx$$

である。次の cut-off 関数 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を取っておく。

$$(3.1) \quad \chi(\lambda) = \chi(-\lambda); \quad \chi(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{for } |\lambda| \leq 1, \\ 0 & \text{for } |\lambda| \geq 2 \end{cases}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \chi(\lambda - 3n) = 1.$$

$L > 0$ に対して $\chi_L(\lambda) = \chi(\lambda/L)$ と定義する。レゾルベント方程式を使うと

$$(3.2) \quad G(\lambda) = (1 + G_0(\lambda)V)^{-1}G_0(\lambda) = G_0(\lambda)(1 + VG_0(\lambda))^{-1}.$$

$u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ とする。 H は generic type だから $(e^{-itH}P_{ac}u, v)$ をレゾルベントの境界値を用いて

$$(e^{-itH}P_{ac}u, v) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-it\mu} ((R(\mu + i0) - R(\mu - i0))u, v) \chi_L(\sqrt{\mu}) d\mu$$

と表現できる (Stone の公式)。この右辺で変数を $\mu = \lambda^2$ と置き換え、 $G(\lambda) = R(\lambda^2)$ を用いると

$$(e^{-itH}P_{ac}u, v) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{i\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda^2} (G(\lambda)u, v) \lambda \chi_L(\lambda) d\lambda$$

λ について部分積分すると

$$(3.3) \quad -\frac{1}{2t\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda^2} (G'(\lambda)u, v) \chi_L(\lambda) d\lambda + \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda^2} (G(\lambda)u, v) \chi'_L(\lambda) d\lambda \right)$$

これを

$$\lim_{L \rightarrow \infty} ((U_{1,L}(t)u, v) + (U_{2,L}(t)u, v)).$$

と書く。 $U_{1,L}(t)$ が定理の (1.12) を満たすこと、 $U_{2,L}(t)$ が剰余項の評価

$$(3.4) \quad \|\langle x \rangle^{-\varepsilon} U_{2,L} \varphi\|_\infty \leq C |t|^{-\frac{3+\varepsilon}{2}} \|\langle x \rangle^\varepsilon \varphi\|_1$$

を満たすことを示せばよい。ただし定数 $C > 0$ は $R > 0$ を十分大とすれば $L \geq R$ によらない。 $U_{1,L}(t)$ についてだけ説明する。 $U_{2,L}(t)$ に対する評価 (3.4) は $U_{1,L}(t)$ に現れる剰余項の評価と平行して行うことができるからである。

Goldberg に従って

$$(3.5) \quad G'(\lambda) = 2\lambda G(\lambda)^2 = (1 + G_0(\lambda)V)^{-1} G'_0(\lambda) (1 + VG_0(\lambda))^{-1}$$

と書く。 $G_0(\lambda)$ の積分核は $ie^{i\lambda|x-y|}/(4\pi)$ であった。 $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $L \geq 1$ に対して

$$(3.6) \quad w_L(\lambda, \cdot) = \chi(\lambda/2L) (1 + VG_0(\lambda))^{-1} w(x).$$

と定義する。 $((1 + G_0(\lambda)V)^{-1})^* = (1 + VG_0(-\lambda))^{-1}$ だから

$$(3.7) \quad (U_{1,L}(t)u, v) = -\frac{1}{2t\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda^2} \langle \chi(\lambda/L) G'_0(\lambda) u_L(\lambda), v_L(-\lambda) \rangle d\lambda.$$

$\hat{u}_L(\rho, x) = (\mathcal{F}_{\lambda \rightarrow \rho} u_L)(\rho, x)$ と書く。次の補題が重要である。

補題 3.1. $0 \leq \varepsilon \leq 1$ とする。 $\hat{u}_L(\rho, x)$ は

$$(3.8) \quad \|(\langle \rho \rangle^\varepsilon + \langle x \rangle^\varepsilon) \hat{u}_L(\rho, x)\|_{L^1(\mathbb{R}^4)} \leq C \|\langle x \rangle^\varepsilon u\|_{L^1(\mathbb{R}^3)},$$

を満たす。ただし定数は $L \geq 1$, u にはよらない。

$k = 0$ の時, 定理 1.2 は補題 3.1 から次のようにすぐ出る。

$$F_L(\sigma) = \mathcal{F}_{\lambda \rightarrow \sigma}(\langle \chi(\lambda/L)G'_0(\lambda)u_L(\lambda), v_L(-\lambda) \rangle)(\sigma)$$

と定義する。 $G'_0(\lambda)$ の積分核は $ie^{i\lambda|x-y|}/4\pi$ だから

$$F_L(\sigma) = \frac{i}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \iint L\hat{\chi}(L(\sigma - |x-y| - \mu - \rho))\hat{u}_L(\mu, y)\overline{\hat{v}_L(\rho, x)}d\mu d\rho dx dy.$$

次の補題は変数変換から直ちにしたがう：

補題 3.2. $L \geq 1$ によらない定数が存在して $\rho \geq 0$ に対して

$$(3.9) \quad \int \langle \sigma \rangle^\rho L |(\mathcal{F}\chi^{(\alpha)})(L(\sigma - \Sigma))| d\sigma \leq C_\rho \langle \Sigma \rangle^\rho.$$

補題 3.2 と補題 3.1 をあわせて用いれば

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^1} \langle \sigma \rangle^\varepsilon |F_L(\sigma)| d\sigma &\leq C \iint_{\mathbb{R}^8} \langle |x-y| + \mu + \rho \rangle^\varepsilon |\hat{u}_L(\mu, y)\hat{v}_L(\rho, x)| d\mu d\rho dx dy \\ &\leq C \|(\langle \mu \rangle^\varepsilon + \langle y \rangle^\varepsilon)\hat{u}_L\|_1 \|(\langle \rho \rangle^\varepsilon + \langle x \rangle^\varepsilon)\hat{v}_L\|_1 \leq C \|\langle x \rangle^\varepsilon u\|_1 \|\langle x \rangle^\varepsilon v\|_1. \end{aligned}$$

(3.7) の右辺にパーセバルの等式を用い, 次に $e^{i\sigma^2/4t} = 1 + (e^{i\sigma^2/4t} - 1)$ と分解すれば

$$(3.11) \quad \langle U_{1,L}(t)u, v \rangle = \frac{e^{\mp 3i\pi/4}}{(2|t|)^{\frac{3}{2}}i\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} F_L(\sigma) d\sigma + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\sigma^2/4t} - 1) F_L(\sigma) d\sigma \right).$$

Fourier の逆変換公式によって右辺の第一項は次に等しい：

$$(3.12) \quad \frac{\sqrt{2}e^{\mp 3i\pi/4}}{(2|t|)^{\frac{3}{2}}i\sqrt{\pi}} \langle G'_0(0)u_L(0), v_L(0) \rangle = \frac{\sqrt{2}e^{\mp 3i\pi/4}}{(2|t|)^{\frac{3}{2}}i\sqrt{\pi}} \langle G'(0)u, v \rangle$$

(3.10) から第二項は剰余項である。

$$\frac{2^{1-\varepsilon}}{(2|t|)^{\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}\pi} \int_{\mathbb{R}} |\sigma|^\varepsilon |F_L(\sigma)| d\sigma \leq \frac{C}{|t|^{\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}} \|\langle x \rangle^\varepsilon u\|_1 \|\langle x \rangle^\varepsilon v\|_1$$

だからである。これによって, 定理 1.2 の証明は補題 3.1 の証明に帰着する。

§ 4. 補題 3.1 の証明の大筋

$u_L(\lambda)$ を高エネルギー部分

$$(4.1) \quad u_{L,high}(\lambda) = (1 - \chi(\lambda/\lambda_0))u_L(\lambda)$$

と低エネルギー部分

$$(4.2) \quad u_{L,low}(\lambda) = \chi(\lambda/\lambda_0)u_L(\lambda)$$

に分解する。 $\chi_{\geq}(\lambda) = 1 - \chi(\lambda)$ と書く。 $\lambda_0 > 0$ は大きなパラメータである。 $u_{L,high}(\lambda)$, $u_{L,low}(\lambda)$ がおのこの (3.8) を満たすことを別々の方法で示す。

§ 4.1. 高エネルギー部分の評価

$\lambda_0 \leq L$ に対して

$$(4.3) \quad h_{L,\lambda_0}(\lambda) = \chi_{\geq}(\lambda/\lambda_0)\chi(\lambda/L)$$

と定義する。 $V \in \ell^p(L^q)$ と仮定し,

$$\kappa_{\max} = 3(1/p - 2/3), \quad r_{\max} = \min(p_*, 3q/(q+3))$$

と定義する。ただし

$$\frac{1}{p_*} = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{2+\varepsilon+\gamma}{3} \right).$$

である。 $1 < p_* \leq \frac{3}{2+\varepsilon+\gamma}$ が成立する。

命題 4.1. $0 \leq \gamma, \varepsilon, \gamma + \varepsilon < \kappa_{\max}$ とする。 $\Lambda > 0$ が存在して $\Lambda \leq \lambda_0 < L$ の時, 次が成立する :

$$(4.4) \quad \iint_{\mathbb{R}^2} \langle \sigma \rangle^\tau \langle x \rangle^\varepsilon |\mathcal{F}_{\lambda \rightarrow \sigma} u_{L,high}(\sigma, x)| dx d\sigma \leq C \|\langle x \rangle^\varepsilon u\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}.$$

ここで, C は u , $\Lambda \leq \lambda_0 < L$ によらない定数である。

命題の証明 $|\lambda| \rightarrow \infty$ の時, $\|(VG_0(\lambda))^3\|_{\mathbf{B}(\langle x \rangle^{\pm\varepsilon} L^1)} \rightarrow 0$ が成立する。これを用いて $u_{L,high}(\lambda)$ の定義 (3.6) の中の $(1 + VG_0(\lambda))^{-1}$ を

$$(1 + VG_0(\lambda))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n G_n(\lambda), \quad G_n(\lambda) \equiv (VG_0(\lambda))^n$$

と展開すれば

$$(4.5) \quad u_{L,high}(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n h_{L,\lambda_0}(\lambda) G_n(\lambda) u$$

$h_{L,\lambda_0}(\lambda) G_n(\lambda) u$ に対して次が成立する :

補題 4.2. $0 \leq \varepsilon, \gamma, \varepsilon + \gamma < \kappa_{\max}$ とする。 $\Lambda \leq \lambda_0 < L$ の時, 次が成立する :

$$(4.6) \quad \int_{\mathbb{R}^4} \langle \sigma \rangle^\gamma \langle x \rangle^\varepsilon |\mathcal{F}(h_{L,\lambda_0}(\lambda) G_n(\lambda) u)(\sigma, x)| d\sigma dx \leq C^n \|\langle x \rangle^\varepsilon u\|_1.$$

ただし, C は n, L によらない定数。

証明. $G_0(\lambda)$ の積分核表現を用いて $G_n(\lambda)u(x)$ を $\mathbb{R}^{3n}$ 上の積分として表現する : $x_0 = y$, $x = x_n$, $\Sigma = \sum_{j=1}^n |x_j - x_{j-1}|$ と書くとき,

$$(4.7) \quad G_n(\lambda)u(x) = \int_{\mathbb{R}^{3n}} \frac{e^{i\lambda\Sigma} \prod_{j=1}^n V(x_j)}{\prod_{j=1}^n 4\pi|x_j - x_{j-1}|} u(y) dy dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

Fubini を使って積分順序を入れ替えて

$$\mathcal{F}_{\lambda \rightarrow \sigma}(h(\lambda)G_n(\lambda)u)(\sigma, x) = \int_{\mathbb{R}^{3n}} \frac{\hat{h}(\sigma - \Sigma) \prod_{j=1}^n V(x_j)}{\prod_{j=1}^n 4\pi|x_j - x_{j-1}|} u(y) dy dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

とし, 次に (3.9) を使って

$$\int_{\mathbb{R}} |\langle \sigma \rangle^\gamma \hat{h}(\sigma - \Sigma)| d\sigma \leq C \langle \Sigma \rangle^\gamma \leq C \sum_{j=1}^n \langle x_j - x_{j-1} \rangle^\gamma$$

と評価すれば

$$(4.8) \quad \begin{aligned} & \int \langle \sigma \rangle^\gamma |\mathcal{F}_{\lambda \rightarrow \sigma}(h(\lambda)G_n(\lambda)u)(\sigma, x)| d\sigma \\ & \leq C \sum_{m=1}^n \int_{\mathbb{R}^{3n}} \frac{\langle x_m - x_{m-1} \rangle^\gamma \prod_{j=1}^n |V(x_j)|}{\prod_{j=1}^n 4\pi|x_j - x_{j-1}|} |u(y)| dy dx_1 \cdots dx_{n-1}. \end{aligned}$$

K_1, K_2 をそれぞれ積分核

$$K_1(x, y) = \frac{V(x)}{4\pi|x - y|}, \quad K_2(x, y) = \frac{V(x)\langle x - y \rangle^\gamma}{4\pi|x - y|}$$

を持つ積分作用素とする。この時,

$$\|K_1\|_{\mathbf{B}(\langle x \rangle^{\pm \varepsilon} L^1)} + \|K_2\|_{\mathbf{B}(\langle x \rangle^{\pm \varepsilon} L^1)} \leq C$$

で, (4.8) の右辺の各項は $n-1$ 個の K_1 と 1 個の K_2 の積である。(4.6) が従う。 $\square$

補題 4.2 の右辺には n について減衰する因子が含まれず, (4.5) において和を取ることができない。 $G_0(\lambda)$ の $|\lambda| \rightarrow \infty$ での減衰評価 (2.2) を用いて減衰因子を含む評価を得よう。

補題 4.3. $0 \leq \varepsilon + \gamma < \kappa_{\max}$, $3/2 \leq \rho \leq 2$ とする。定数 $0 < \theta_* < 1$ と n_0 が存在して任意の $\theta_* \leq \theta < 1$ と $n \geq n_0$ に対して:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} & \sup_{\sigma \in \mathbb{R}} \|\langle x \rangle^\varepsilon \langle \sigma \rangle^{\theta\gamma} \mathcal{F}(h_{L, \lambda_0}(\lambda)G_n(\lambda)u)(x, \sigma)\|_1 \\ & \leq C^n \lambda_0^{1-(n-2)(1-\theta)\delta_*(\rho)} \|\langle x \rangle^\varepsilon u\|_{L^1}. \end{aligned}$$

ここで定数 C は $u, n \geq n_0, 1 \leq \lambda_0 \leq L$ によらない。

証明. レゾルベントの減衰評価とポテンシャルに対する仮定を用いれば $1 < r < r_{\max}$ に対して, $\theta_* = \theta(\rho, \varepsilon, \gamma, r)$ を適当に選ぶと

$$\begin{aligned}
 & \|\langle x \rangle^\varepsilon (VG_0(\lambda))^n u\|_{L^1} \\
 & \leq \|\langle x \rangle^\varepsilon VG_0(\lambda) \langle x \rangle^{-\varepsilon}\|_{\mathbf{B}(L^r, L^1)} \prod_{i=2}^{n-1} \|\langle x \rangle^\varepsilon VG_0(\lambda) \langle x \rangle^{-\varepsilon}\|_{\mathbf{B}(L^r)} \\
 (4.10) \quad & \times \|\langle x \rangle^\varepsilon VG_0(\lambda) u\|_{L^1} \leq C(C/\lambda)^{(n-2)(1-\theta_*(\rho))} \|\langle x \rangle^{-\varepsilon} u\|_1,
 \end{aligned}$$

同様に差分商に対して

$$\begin{aligned}
 (4.11) \quad & \sup_{0 < |\sigma| \leq 1} |\sigma|^{-\theta\gamma} \|\Delta_\lambda^\sigma \langle x \rangle^\varepsilon (VG_0(\lambda))^n u\|_{L^1} \\
 & \leq Cn(C/\lambda)^{(n-2)(1-\theta_*(\rho))} \|\langle x \rangle^{-\varepsilon} u\|_1.
 \end{aligned}$$

$f(\lambda) = h_{L, \lambda_0}(\lambda) G_n(\lambda) u$ に対して自明な等式

$$(4.12) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\sigma} f(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\sigma} (f(\lambda) - f(\lambda - \pi/\sigma)) d\lambda.$$

を用い, $\lambda \leq \lambda_0$ で $h_{L, \lambda_0}(\lambda) = 0$ であることを用いれば $(n-2)(1-\theta_*(\rho)) > 1$ を満たす n に対して (4.9) が得られる。□

命題 4.1 は λ_0 を十分大きく取って, 補題 4.2 と補題 4.3 を補間したあとに, (4.5) の右辺で n について和を取れば得られる。

§ 4.2. 低エネルギー評価

次に低エネルギー部分 $u_{low}(\lambda) = \chi(\lambda/2\lambda_0)(1 + VG_0(\lambda))^{-1}u$ に対する評価を示そう。ふたたび

$$\hat{u}_{low}(\sigma, x) = (\mathcal{F}_{\lambda \rightarrow \rho} u_{low})(\sigma, x)$$

と書く。

命題 4.4. $0 < \gamma, \varepsilon, \gamma + \varepsilon < \kappa_{\max}$ とする。

$$(4.13) \quad \iint_{\mathbb{R}^4} \langle \sigma \rangle^\gamma \langle x \rangle^\varepsilon |\hat{u}_{low}^{(\ell)}(\sigma, x)| dx d\sigma \leq C \|\langle x \rangle^\varepsilon u\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}$$

が成立する。ただし C は u によらない定数である。

証明の basic strategy はふたたび Goldberg から拝借する。 $B(\lambda, \mu) = G_0(\lambda) - G_0(\mu)$ と定義する。Hardy の不等式の帰結である次の補題の証明は読者にまかせる。

補題 4.5. $0 \leq \varepsilon + \theta < \kappa_{\max}$ に対して

$$(4.14) \quad \|\langle x \rangle^\varepsilon VB(\lambda, \mu) \langle x \rangle^{-\varepsilon}\|_{\mathbf{B}(L^1)} \leq C|\lambda - \mu|^\theta.$$

$S(\lambda) = (1 + VG_0(\lambda))^{-1}$ と定義する。 $S(\lambda)$ は $\mathbf{B}(\langle x \rangle^{-\varepsilon} L^1)$ 値ノルム連続である。レゾルベント方程式によって

$$(4.15) \quad S(\lambda) = (1 + VG_0(\lambda))^{-1} = (1 + S(\mu)VB(\lambda, \mu))^{-1}S(\mu).$$

(4.14) によって $d_0 > 0$ を小さく取れば $|\lambda|, |\mu| \leq 2\lambda_0$ の時, $|\lambda - \mu| < 4d_0$ に対して

$$(4.16) \quad \|S(\mu)VB(\lambda, \mu)\|_{\mathbf{B}(\langle x \rangle^{-l-\varepsilon} L^1)} < 1/2.$$

そこで $\chi(\lambda/2\lambda_0)$ を台が長さ d_0 以下の小さな台を持つ関数に分解して

$$(4.17) \quad \chi(\lambda/2\lambda_0) = \sum_{j=-n}^n \chi_{j,d}(\lambda), \quad \chi_{j,d}(\lambda) \equiv \chi((\lambda - \mu_j)/d) \chi(\lambda/2\lambda_0).$$

として,

$$(4.18) \quad u_{low}(\lambda) = \sum_{j=1}^n \chi_{j,d}(\lambda) S(\lambda) u \equiv \sum_{j=1}^n u_{low,j}.$$

と分解する。各 $u_{low,j}$ に対して (4.13) を示せばよい。(4.16) によって, $\chi_{j,d}(\lambda) \neq 0$ の時, $\mathbf{B}(\langle x \rangle^{-\varepsilon} L^1)$ において

$$(4.19) \quad \begin{aligned} S(\lambda) &= (1 + \chi((\lambda - \mu_j)/2d) S(\mu_j) VB(\lambda, \mu_j))^{-1} S(\mu_j) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\chi((\lambda - \mu_j)/2d) S(\mu_j) VB(\lambda, \mu_j))^m S(\mu_j) \end{aligned}$$

と展開できる。 $0 \leq \varepsilon < \kappa_{\max}$ である。 $|\mu| \leq 2\lambda_0$ に対して

$$T_\mu(\lambda) = \chi((\lambda - \mu)/2d) S(\mu) VB(\lambda, \mu).$$

と定義する。

補題 4.6. $0 \leq \varepsilon + \gamma + \theta < \kappa_{\max}$ とする。 $0 < d < 1$ に対して

$$(4.20) \quad \int_{\mathbb{R}} \langle \sigma \rangle^\gamma \|\langle x \rangle^\varepsilon \mathcal{F}(T_\mu(\lambda)u)(\sigma, x)\|_1 d\sigma \leq C d^\theta \|\langle x \rangle^\varepsilon u\|_1.$$

C は $|\mu| \leq 2\lambda_0$ および $0 < d < 1$ にはよらない定数。

補題 4.6 の証明に用いる次の初等的な補題の証明は省略する。

補題 4.7. $0 \leq \varepsilon, \theta \leq 1, 0 \leq \theta + \varepsilon \leq 1$ とする。 $0 < d \leq 1, 0 < \rho < \infty$ に対して次が成立する：

$$(4.21) \quad a \int \langle \sigma \rangle^\varepsilon |\hat{\chi}(a(\sigma - \rho)) - \hat{\chi}(a\sigma)| d\sigma \leq C a^\theta \langle \rho \rangle^{\theta+\varepsilon}.$$

$\varepsilon = 0$ なら $\langle \rho \rangle^\theta$ を $|\rho|^\theta$ で置き換えてよい。

補題 4.6 の証明 $S(\mu) \in \mathbf{B}(\langle x \rangle^{-\varepsilon} L^1)$ だから $\chi((\lambda - \mu)/2d)VB(\lambda, \mu)$ に対して示せばよい。 $G_0(\lambda)$ の積分核表示を用いると

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\lambda \rightarrow \sigma} \{ \chi((\lambda - \mu)/2d)VB(\lambda, \mu)u \}(\sigma, x) &= \int_{\mathbb{R}^3} K(\sigma, x, y)u(y)dy, \\ K(\sigma, x, y) &= 2de^{-i\mu(\sigma - |x - y|)}V(x) \left(\frac{\hat{\chi}(2d(\sigma - |x - y|)) - \hat{\chi}(2d\sigma)}{4\pi|x - y|} \right). \end{aligned}$$

補題 4.7 を用いると

$$(4.22) \quad \int \langle \sigma \rangle^\gamma \langle x \rangle^\varepsilon K(\sigma, x, y) \langle y \rangle^{-\varepsilon} |d\sigma| \leq C|V(x)|d^\theta \frac{\langle x - y \rangle^{\gamma + \varepsilon + \theta}}{|x - y|}.$$

右辺を $\langle x \rangle^{\gamma + \varepsilon + \theta}|x|^{-1}$ を核とする合成積作用素と掛け算作用素 V との積と考え、前者に Hardy 型あるいは Young の不等式を用いれば補題が得られる。□

fg のフーリエ変換が $\hat{f}, \hat{g}$ の合成積であることを用いれば次の補題は補題 4.6 から帰納的に得られる。

補題 4.8. $0 \leq \varepsilon + \gamma + \theta < \kappa_{\max}$, $0 < d < 1$ とする。 $k = 1, \dots, n$ に対して, $S_k(\lambda)$ は $\mathbf{B}(L^1(\mathbb{R}^3))$ に値をもつ $\mathbb{R}$ のコンパクト台をもつ連続関数で, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ に対して

$$(S_k u)(\lambda, x) = S_k(\lambda)u(x) \in L^1(\mathbb{R}_{(\lambda, x)}^4),$$

と定義する時, u によらない定数 C_k が存在して

$$(4.23) \quad \int_{\mathbb{R}} \langle \sigma \rangle^\gamma \left\| \langle x \rangle^\varepsilon \widehat{S_k u}(\sigma, x) \right\|_1 d\sigma \leq C_k d^\theta \|\langle x \rangle^\varepsilon u\|_1$$

が成立すると仮定する。この時,

$$T_n(\lambda) \equiv S_n(\lambda) \cdots S_1(\lambda)$$

は

$$(4.24) \quad \int_{\mathbb{R}} \langle \sigma \rangle^\gamma \left\| \langle x \rangle^\varepsilon \widehat{T_n u}(\sigma, x) \right\|_1 d\sigma \leq C^n \left(\prod_{k=1}^n C_k \right) d^{n\theta} \|\langle x \rangle^\varepsilon u\|_1,$$

を満たす。 C は $n, C_1, \dots, C_n, d, u$ にはよらない定数。

低エネルギー部分の評価である命題 4.4 は補題 4.8 から従う。

$$f_m(\lambda, x) = \chi_{j,d}(\lambda) \times ((4.19) \text{ の右辺の第 } m \text{ 項})u(x)$$

と定義すれば, $d < 1$ を十分小さく取る時,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \iint_{\mathbb{R}^4} \langle \sigma \rangle^\sigma \|\langle x \rangle^\varepsilon (\mathcal{F}_{\lambda \rightarrow \sigma} f_m)(\sigma, x)\| dx d\sigma \leq \sum_{m=1}^{\infty} (Cd^\theta)^m \|\langle x \rangle^\varepsilon u\|$$

となるからである。詳細は省略してよいだろう ([13] を参照)。

References

- [1] S. Agmon, *Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **2** (1975), 151–218.
- [2] S. Agmon, *Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations: bounds on eigenfunctions of NN -body Schrödinger operators*. Mathematical Notes, **29**. Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1982.
- [3] G. Artbazar and K. Yajima, *The L^p -continuity of wave operators for one dimensional Schrödinger operators*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **7** (2000), 221–240.
- [4] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation spaces, an introduction*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1976).
- [5] F. Cardoso, C. Cuevas and G. Vodev, *Dispersive estimates for the Schrödinger equation with potentials of critical regularity*. Cubo **11** (2009), 57–70.
- [6] F. Cardoso, C. Cuevas and G. Vodev, *High frequency dispersive estimates for the Schrödinger equation in high dimensions*. Asymptot. Anal. **71** (2011), 207–225.
- [7] H. Cyson, R. Froese, W. Kirsch and B. Simon, *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [8] P. D’Ancona and L. Fanelli, *L^p -boundedness of the wave operator for the one dimensional Schrödinger operator*, Comm. Math. Phys. **268** (2006), no. 2, 415–438.
- [9] M. B. Erdoğan and W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators in the presence of a resonance and/or an eigenvalue at zero energy in dimension three I*. Dynamics of PDE, **1** (2004), 359.
- [10] M. B. Erdoğan and W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators in the presence of a resonance and/or an eigenvalue at zero energy in dimension three. II*. J. Anal. Math. **99** (2006), 199–248.
- [11] D. Finco and K. Kenji, *The L^p boundedness of wave operators for Schrödinger operators with threshold singularities. II. Even dimensional case*. J. Math. Sci. Univ. Tokyo **13** (2006), no. 3, 277–346.
- [12] A. Galtbayar, A. Jensen and K. Yajima, *Local time-decay of solutions to Schrödinger equation with time-periodic potentials*, J. Stat. Phys. **116** (2004), 231–282.
- [13] A. Galtbayar and K. Yajima *Resolvent Estimates in Amalgam Spaces and Asymptotic Expansions for Schrödinger Equations*, to appear in Jour. Math. Soc. Japan.
- [14] M. Goldberg and W. Schlag, *A limiting absorption principle for the three-dimensional Schrödinger equation with L^p potentials*. Int. Math. Res. Not. 2004, no. 75, 4049–4071.
- [15] M. Goldberg, *Dispersive estimate for the three-dimensional Schrödinger equation with almost critical potentials*, Geom. and Funct. Anal. **16** (2006), no. 3, 517–536.
- [16] M. Goldberg and W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators in dimensions one and three*, Commun. Math. Phys. **251** (2005), 157–178.
- [17] M. Goldberg and M. Visan, *A counter example to dispersive estimates for Schrödinger operators in higher dimensions*, Comm. Math. Phys. **266** (2006), no. 1, 211–238.
- [18] A. D. Ionescu and D. Jerison, *On the absence of positive eigenvalues of Schrödinger operators with rough potentials*. Geom. Funct. Anal. **13** (2003), no. 5, 1029–1081.
- [19] A. D. Ionescu and W. Schlag, *Agmon-Kato-Kuroda theorems for a large class of perturbations*. Duke Math. J. **131** (2006), no. 3, 397–440.
- [20] A. Jensen and T. Kato, *Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions*, Duke Math. J. **46** (1979), 583–611.

- [21] A. Jensen and K. Yajima, *A remark on L^p -boundedness of wave operators for two dimensional Schrödinger operators*, Commun. Math. Phys. **225** (2002), 633–637.
- [22] A. Jensen and K. Yajima, *On L^p boundedness of wave operators for 4-dimensional Schrödinger operators with threshold singularities*. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **96** (2008), no. 1, 136–162.
- [23] J.-L. Journé, A. Soffer and C. D. Sogge, *Decay estimates for Schrödinger operators*. Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), no. 5, 573–604.
- [24] T. Kato, *Remarks on the essential selfadjointness and related problems for differential operators* in Spectral theory of differential operators, ed. by J. W. Knowles and R. T. Lewis (North Holland, Amsterdam 1981).
- [25] C. E. Kenig, A. Ruiz and C. D. Sogge, *Uniform Sobolev inequalities and unique continuation for second order constant coefficient differential operators*. Duke Math. J. **55** (1987), 329–347.
- [26] H. Koch and D. Tataru, *Carleman estimates and absence of embedded eigenvalues*. Comm. Math. Phys. **267** (2006), no. 2, 419–449.
- [27] S. T. Kuroda, *Scattering theory for differential operators. I. Operator theory and II. Self-adjoint elliptic operators*, J. Math. Soc. Japan **25** (1973), 75–104 and 222–234.
- [28] H. Mizutani, *Dispersive estimates and asymptotic expansions for Schrödinger equations in dimension one*, J. Math. Soc. Japan, to appear.
- [29] M. Murata, *Asymptotic expansions in time for solutions of Schrödinger-type equations*, J. Funct. Anal., **49** (1982), 10–56.
- [30] J. Rauch, *Local decay of scattering solutions to Schrödinger equation*, Comm. Math. Phys. **61** (1978), 149–168.
- [31] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics vol II, Fourier analysis, selfadjointness*, Academic Press, New-York, San Francisco, London (1975).
- [32] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics vol IV, Analysis of operators*, Academic Press, New-York, San Francisco, London (1978).
- [33] I. Rodnianski, W. Schlag and A. Soffer, *Dispersive analysis of charge transfer models*. Comm. Pure Appl. Math. **58** (2005), 149–216.
- [34] I. Rodnianski and W. Schlag, *Time decay for solutions of Schrödinger equations with rough and time-dependent potentials*. Invent. Math. **155** (2004), 451–513.
- [35] W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators in dimensions two*, Commun. Math. Phys. **257** (2005), 87–117.
- [36] W. Schlag, *Dispersive estimates for Schrödinger operators: a survey* in Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations, Ann. of Math. Stud., **163** (2007), 255–285, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.
- [37] E. M. Stein, *Interpolation of linear operator*, Trans. Amer. Math. Soc. **83** (1956), 482–492.
- [38] K. Yajima, *The $W^{k,p}$ -continuity of wave operators for Schrödinger operators*. J. Math. Soc. Japan **47** (1995), 551–581.
- [39] K. Yajima, *Dispersive estimates for Schrödinger equations with threshold resonance and eigenvalue*, Commun. Math. Phys. **259** (2005), 475–509.
- [40] K. Yajima, *On time dependent Schrödinger equations*, in *Dispersive nonlinear problems in mathematical physics*, ed. P. D’Ancona and V. Georgiev, Quaderni di Matematica **15**, Seconda Università di Napoli (2005), 267–329.
- [41] K. Yajima, *The L^p boundedness of wave operators for Schrödinger operators with threshold singularities. I. The odd dimensional case*. J. Math. Sci. Univ. Tokyo **13**

(2006), no. 1, 43–93.