

氏 名	さだ 貞 末 岳
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 2143 号
学位授与の日付	平成 12 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学位論文題目	Equivalence-Singularity dichotomy for the Wiener measures on path groups and loop groups (道の群およびループ群における Wiener 測度に関する絶対連続・特異二者択一性)

論文調査委員 (主 査) 教 授 重 川 一 郎 教 授 西 田 孝 明 教 授 井 川 満

論 文 内 容 の 要 旨

申請者の主論文における研究は、測度の絶対連続性に関するものである。古典的には Wiener 空間上のずらしに関する絶対連続性の結果がよく知られている。すなわち、ずらした測度が元の測度に対して互いに絶対連続になるための必要十分条件は、ずらしの方向が微分が 2 乗可積分である関数で与えられることである。このような元全体を許容集合と呼び、Wiener 空間の場合は発見者にちなみ Cameron-Martin 空間と呼ばれている。さらに、Cameron-Martin 空間に属さない元によるずらしに対しては互いに特異になる。

申請者の研究はこの結果を Lie 群上の拡散過程が定める測度に対して一般化したものである。 G をコンパクト Lie 群、 G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とし、 $\mathfrak{g}, G$ に値を取る $[0, 1]$ 上で定義された連続な道の空間を $P\mathfrak{g}, PG$ と表わす。ただし、出発点はそれぞれ零元 0 および単位元 e に固定されているもののみを考える。 $\mathfrak{g}$ において adjoint 不変な内積をひとつ与えると、 $\mathfrak{g}$ に値をとる Brown 運動 x_t が決まるが、これにより確率微分方程式 $d\gamma_t = \gamma_t \circ dx_t, \gamma_0 = e$ を解いて伊藤写像 $I: P\mathfrak{g} \rightarrow PG$ が得られる。この伊藤写像による Wiener 測度の像測度が対象とする PG 上の測度である。この測度を μ と表す。 G は積の演算が定義されているから、各点の積の意味で自然に PG に積が定義され、 $k \in PG$ に対し $L_k \gamma = k\gamma$ でずらしを定義する。このずらしに対して測度の絶対連続性の問題を考えることができる。すなわち μ と L_k による像測度 $\mu \circ L_k^{-1}$ が互いに絶対連続になる必要十分条件を求めることである。申請者はこれに対し完全な解答を与えている。すなわち微分が 2 乗可積分な道の全体 (エネルギー有限な道と呼ばれる) を K とするとき、ずらし k が K に含まれるとき、互いに絶対連続で、 K に含まれないとき特異になる。

さらに申請者は、終点も単位元 e に固定したループの空間 ΩG の場合も考察している。ループの場合は、測度は終点での条件付き測度で考える。この場合には絶対連続になる許容集合は $K_0 = K \cap \{\gamma; \gamma(1) = e\}$ となりそれ以外の場合は特異になることを示した。

申請者は上の定理を、ずらしに対するエルゴード性に帰着させる手法を用いて証明している。道の空間 PG の場合は伊藤写像を通じて Wiener 空間の場合に帰着させる。ずらしは極限をとれば微分だから、微分が 0 であれば定数であるという Wiener 空間の基本定理が使える。ループの空間 ΩG の場合は工夫が要る。申請者の巧妙なところは ΩG における K_0 不変集合から PG における K 不変集合を構成するところにある。しかもこの構成は絶対連続性を保ちながら行う必要がある。 PG における K 不変集合が構成されれば、 PG の場合の結果を使えば ΩG の場合の証明が完成する。

エルゴード性はそれ自体興味のある結果であるが、さらにその事実に基づいて絶対連続性の二者択一定理へ応用している。すなわち、絶対連続な場合の完全な特徴づけとエルゴード性から、絶対連続か、特異かのどちらかしか存在しないことを導く。すなわち絶対連続な部分と特異な部分が共存することがないということをエルゴード性から導いている。以上で、Lie 群上の道の空間およびループの空間における二者択一定理が完結する。

申請者はまた参考論文において、格子スピンモデルに対する Gibbs 測度に対しても絶対連続性の問題を考察している。Gibbs 測度は $\mathbb{R}^d$ 上の測度であるが、Hamiltonian H を用いて $\mu = Z^{-1} e^{-H(\phi)} \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} d\phi(x)$ と形式的に表現される。申請者は H を定めるポテンシャルに superstability などの適当な条件において $h = \{h(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ が 2 乗可積分であるとき、 h 方向にずらした測度は元の測度と互いに絶対連続になることを示し、さらに $d = 1$ の場合には、ポテンシャルに対し一様凸性などを仮定した上で上の場合以外は特異になることを示した。具体的には、絶対連続な場合はエントロピー関数の領域によらない一様評価、また特異になる場合は Hellinger 積分が 0 に収束することを示すことによって証明が与えられている。

論文審査の結果の要旨

確率論において測度の絶対連続性の問題は基本的で、古くからさまざまな問題が取り扱われてきた。よく知られた例が Wiener 空間上のずらしに関する絶対連続性の問題である。Cameron-Martin はこれに対し完全な解決を与えた。すなわち、許容集合が微分が 2 乗可積分である関数全体となることを示した。Cameron-Martin により得られたこの結果は基本的で、さまざまな応用をもつ重要なものである。たとえば Wiener 空間における大偏差原理はこの定理を基に証明される。その重要性により、互いに絶対連続になるずらしの方向は Cameron-Martin 空間と呼ばれ、近年 Malliavin 解析の中で本質的に用いられている。

申請者の研究はこの問題を Wiener 空間を Lie 群の上の道の空間、あるいはループの空間に一般化したものである。Lie 群上の道の空間の場合は Albeverio-Høegh-Krohn、重川などによってエネルギー有限な道に対するずらしの場合は互いに絶対連続になることが示されていたが、それ以外の場合は未解決であった。申請者は、エネルギー有限でない道に対するずらしの場合は特異な測度になることを示し、この問題に最終的な解決をもたらした。二者択一定理が Lie 群の場合にも示されたことは興味深いことである。またその証明も直接的に特異であることを示すのではなく、ずらしに関するエルゴード性を示し、そのことから絶対連続か、特異かのどちらかの場合しかないことを導いている。このようにエルゴード性に着目したことが独創的な点であり、やや異なった観点から問題を捉え直したことが解決の糸口を与えたと言える。

また、道の空間やループの空間上でのずらしに関するエルゴード性の証明はそれ自体興味のある問題である。実際 Gross はループ群上の Ornstein-Uhlenbeck 作用素のスペクトルを解明するための第一歩として最小固有値の多重度が 1 であることを示した。これは言葉を変えれば、ずらしに関するエルゴード性に他ならない。Gross はこのエルゴード性の問題に対し、伊藤-Wiener 展開を用いてずらしに関する不変関数のクラスを展開の係数で特徴づけて証明を与えた。しかし Gross の証明は Lie 環の普遍包絡環を用いるなど非常に複雑なものであった。申請者の仕事はこの証明を著しく簡潔なものにした。Gross 自身、申請者の簡明な証明を高く評価している。証明は、道の空間の場合は確率微分方程式から定まる伊藤写像を用いて Wiener 空間の場合に帰着し、ループ空間の場合は、ループ空間におけるずらしに関する不変集合から道の空間の不変集合へ拡張し、最終的に道の空間の場合に帰着させるという巧妙な方法である。いずれの場合もアイデアに富んだ証明方法で、興味深いものである。

参考論文では、ずらしに関する絶対連続性の問題を格子スピンモデルに対する Gibbs 測度に対して拡張したもので、新しい見地を拓いたものとして注目される。従来は直積型の測度のみが主に考えられ、Gibbs 測度のような独立でない相互作用のある場合は考えてこられなかった。その意味では先駆的な仕事である。格子 $\mathbb{Z}^d$ の次元 d が一般の場合は絶対連続であるための十分条件を、 $d = 1$ の場合は完全な二者択一定理を示し、許容集合が 2 乗可積分な数列全体となることまで示されている。証明の手法も、絶対連続性を示す場合は、有限スピン系に落とし、そこでエントロピー関数を評価し、その評価が有限集合の個数によらないことを示して最終的な結果を得ている。さらに特異性を示す場合は Hellinger 積分の評価を用いている。いずれの場合も確率論的な概念を縦横に駆使し、多くの点に工夫の見える優れたもので、高く評価される。

なお、主論文及び参考論文に報告されている研究業績を中心とし、それに関連した研究分野について試問した結果、合格と認めた。