

An approach to Marden's conjecture for finitely generated Kleinian groups

東工大理 大鹿健一 (Ken'ichi OHSHIKA)

Lie 群 $PSL_2\mathbb{C}$ の離散部分群を Klein 群と称える。Klein 群論における最も重要な未解決問題は次に掲げる Ahlfors 予想である。

予想 1 任意の有限生成 Klein 群について、その極限集合 $\subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ は $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 全体であるか、Lebesgue 測度 0 であるかの何れかであろう。

この予想は Lars Ahlfors が 30 年以上前に述べたものであるにも拘わらず、未だに解決されていない。容易な考察により、この予想は torsion-free な Klein 群のみについて考えれば十分であることがわかる。この場合、Ahlfors 予想は、次の Marden 予想を解くことに帰着されることが、Richard Canary によって、1993 年に証明された。

予想 2 G を任意の torsion-free, 有限生成 Klein 群とすると、商多様体 $\mathbb{H}^3/G$ は almost compact であろう。

但しここで、開多様体が almost compact であるというのは、ある compact 多様体の、内部と同相であるとの謂である。

講演者はこの Marden 予想を肯定的に解決することを目指し研究を重ねてきたが、解決の戦略の枠組みとして、次のようなものを考えた。まず考えなければならないのは、 $\mathbb{H}^3/G$ が compression body と同相な core を有する場合のみであることがわかる。この事実は商多様体 $\mathbb{H}^3/G$ の各 end が core の境界成分と 1:1 に対応しており、また、end の近傍の基本群は対応する境界成分が carry することより、characteristic compression body の理論を用いれば簡単にわかる。そこで $\mathbb{H}^3/G$ を余次元 1 の部分多様体となっているような metric balls $C_1 \subset C_2 \subset \dots$ の exhaustion として表す。一方、 $\mathbb{H}^3/G$ には disc-busting geodesic という、それと交わらずには G の自由積分解が行えないような閉測地線が存在することがわかる。特にそれを $\mathbb{H}^3/G$ で null-homologous なものをとれる。このようなものを 1 つ固定し γ とする。さて $\mathbb{H}^3/G$ が almost compact

でなくなり得るのは、無限の i について、 C_i の handles が C_{i+1} の中で、knot 或いは link している場合である。しかしながら、このような handle の中に γ が essential に含まれなければ、 $bf H^3/G$ はやはり almost compact になる。これは Canary の流儀で、branched cover の negatively curved metric を考えることにより解る。他方 knot した handle の中に、 γ が含まれることは、geodesic knot の simplicity に反する。また、link した handles 中に γ が essential に含まれるという事態が無限の i について生じたとすると、極小曲面論 (所謂極小曲面の monotonicity) を使い矛盾が生じる。Knot, link 双方が絡み合う場合は、handle addition を用い、link の場合に帰着する。従って、 H^3/G は almost compact でなくてはならないことがわかる。

以上が証明方針の大要であるが、細部の検討は未だ完遂されておらず、今後これを詰めていく所存である。