

On finite groups with exactly two real conjugate classes

一橋大学 岩崎 史郎

有限群 G の元 x は, G に於て逆元 x^{-1} と共役であるとき, $real$ といわれます. たとえば, G の単位元, 任意の $involution$ は $real$ であり, $real$ な元の共役元はすべて $real$ になります. また, K を G の一つの共役類とすると, K の一つの元, 従ってすべての元が $real$ である場合 (即ち, $x \in K \Rightarrow x^{-1} \in K$), K は $real$ といわれます. 次のことはよく知られています.

"The number of real conjugate classes in G
 = the number of real-valued irreducible complex characters of G " (以下, この個数を $r(G)$ とおくことにします)
 そこで, 自然に, 次の問題が考えられます.

Problem. What relations are there between $r(G)$ and the structure of G ? Characterize G by $r(G)$.

$r(G)$ が最大るとき, 即ち, G のすべての共役類 (元) が $real$

のときは, Berggren, Kerber 等によっていくらか調べられています ([1], [3]). $r(G)$ が最小 ($r(G)=1$) のとき, 即ち, 単位元のみが G の real な共役類 (元) である場合は, 定義からすぐわかるように,

◎ (Burnside) " $r(G)=1 \iff |G| = \text{odd}$ ".

既知の単純群の character table を見てみると, $r(G)$ は比較的大きいようですが, このことはすべての単純群にわたるのでしょうか? あるいは, 何かを示唆しているのでしょうか?

ここでは, 以下, Burnside の $r(G)=1$ の場合の続きとして $r(G)=2$ の場合を考えることにします. 結果を述べる前に, G. Higman の記号を導入しておきます.

Notation: $n > 1$ を自然数とし, $q = 2^n$ とおき, θ を有限体 $GF(q)$ の odd (> 1) order の automorphism とします. 集合としての直積 $GF(q) \times GF(q)$ に乗法を

$$(a, x)(b, y) = (a+b, x+y+ab^\theta)$$

で定義してえられる群を $A(n, \theta)$ で表わすことにすると, これは exponent 4 の non-abelian 2-group となります.^[2] また, X を任意の群とするとき, $I(X) = \text{The set of all the involutions in } X$.

得られた結果は次の通りです.

Proposition. Let G be a finite group and S be a Sylow 2-subgroup of G . Then the following I and II are equivalent.

I. $r(G) = 2$ (i.e., G has exactly two real conjugate classes)

II. (i) $S \triangleleft G$ and G possesses a subgroup H of odd order such that $G = HS$ (semi-direct product) and H acts by conjugation transitively on $I(S)$.

and

(ii) (a) S is homocyclic, or

(b) $S \cong A(n, \theta)$, and if $x \in S$ is conjugate to x^{-1} in G , then $x = 1$ or involution.

$r(G) = 1$ の場合のように G はすっかり決まりませんが、とにかく 2-Sylow 群は正規で完全に決まるわけです。次に例をあけておきます。勿論、以下に定義される G の real conjugate classes は単位元と $I(S) = I(G)$ です。

(a) Case S is homocyclic

example 1. $S = \text{any cyclic 2-group}$

$H = \text{any finite group of odd order}$

$G \stackrel{\text{def}}{=} H \times S$.

example 2. $S = GF(2^n)$ ($= (2, 2, \dots, 2)$ abelian)

$GF(2^n) - \{0\} = \langle \lambda \rangle$: cyclic group

For $\mu \in \langle \lambda \rangle$, $x \tilde{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \mu x$ ($x \in S$), then $\tilde{\mu} \in \text{Aut } S$.

$G \stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde{\lambda} \rangle \cdot S$ (semi-direct product)

example 3. $S = A(n, 1)$ i.e., Put $S = GF(2^n) \times GF(2^n)$ and define

a multiplication by $(a, x)(b, y) = (a+b, ax+y)$. (then

$S = (4, 4, \dots, 4)$ abelian)

For $\mu \in GF(2^n) - \{0\} = \langle \lambda \rangle$, $(a, x) \tilde{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} (\mu a, \mu^2 x)$, then

$\tilde{\mu} \in \text{Aut } S$ and set $G = \langle \tilde{\lambda} \rangle \cdot S$ (semi-direct product)

example 4. $S = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ ($\langle a \rangle, \langle b \rangle$: cyclic groups of order 2^n)

define $\sigma = \begin{cases} a \rightarrow b \\ b \rightarrow a^{-1}b^{-1} \end{cases}$

then σ is an automorphism of S of order $3 = |I(S)|$

$G \stackrel{\text{def}}{=} \langle \sigma \rangle \cdot S$ (semi-direct product)

example 5. $S = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle$ ($\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle$: cyclic groups of order 2^n)

define $\sigma = \begin{cases} a \rightarrow b \\ b \rightarrow c \\ c \rightarrow ab^{e+1}ce \end{cases}$

then $\sigma \in \text{Aut } S$. If e is a solution of the congruent

equation $x^2 + x + 2 \equiv 0 \pmod{2^n}$, then σ is of order 7.

(this congruent equation is solvable for any n) $|I(S)|$

$G \stackrel{\text{def}}{=} \langle \sigma \rangle \cdot S$ (semi-direct product)

(In general, perhaps, homocyclic group $S = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \dots \times \langle a_m \rangle$)

has an automorphism σ of S of order $2^m - 1$ such that $\langle \sigma \rangle$ acts transitively on $I(S)$.)

(b) Case $S \cong A(n, \theta)$

For $\mu \in \text{GF}(q) - \{0\} = \langle \lambda \rangle$, $(a, x) \tilde{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} (\mu a, \mu^{\theta+1} x)$, then

$\tilde{\mu} \in \text{Aut } S$ and put $G = \langle \tilde{\mu} \rangle \cdot S$ (semi-direct product).

命題自身の証明は容易で、本質的には Higman [2] によります。即ち、 $S \triangleleft G$ を示し、Shaw [4] を通じて [2] に帰着されるからです。この命題の証明にあたって、榎本彦衛、宮本泉氏に有益な suggest をして頂いたことを感謝します。

参考文献

- [1] J. L. Berggren: Finite groups in which every element is conjugate to its inverse, Pac. J. Math. 28 (1969), 289-293.
- [2] G. Higman: Suzuki 2-groups, Ill. J. Math. 7 (1963), 79-96.
- [3] A. Kerber: Zu einer Arbeit von J. L. Berggren über ambivalente Gruppen, Pac. J. Math. 33 (1970), 669-675.
- [4] D. L. Shaw: The Sylow 2-subgroups of finite, soluble groups with a single class of involutions, J. Alg. 16 (1970), 14-26.