

Stability of Periodic Time Dependent Dynamical Systems II

名大 教養部 池上宜弘

§ 1. はじめに

Periodic time dependent dynamical system (以後, これを periodic system と呼ぶ) が $\tilde{\Omega}$ -stable である為の必要条件を [2] で示したが, 本論では, この必要条件に近い条件が十分条件にもなる事を示す. 以後, M は与えらる compact 多様体とする.

§ 2. 主な定義

M 上の C^r 級 periodic system とは, 次の形の方程式である.

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x \in M, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

但し, f は $f(x, t+1) = f(x, t)$ を満たす C^r 級関数である. M 上の C^r 級の periodic system 全体の集合を $P^r(M \times \mathbb{R})$ で表わす. (*) は, 次の様な $M \times \mathbb{R}$ 上のベクトル場 (自励系) X に対応する.

$$X_{(x,t)} = (f(x, t), 1) \in T_x(M) \times T_t(\mathbb{R}) \approx T_{(x,t)}(M \times \mathbb{R}).$$

$M \times \mathbb{R}$ 上の vector 場として, 一様 C^r 位相を入れることにより,
 $\mathcal{P}^r(M \times \mathbb{R})$ は位相空間となる. 自励系 X の flow を

$$\Phi_X : (M \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$$

とする. $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ を自然な射影とすると,

$$\varphi_X(\alpha_0, t_0, \cdot) = \pi \Phi_X(\alpha_0, t_0, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow M$$

が, $(\alpha, t) = (\alpha_0, t_0)$ を初期条件とする periodic system (X) の解である. $\Phi_X(\alpha_0, t_0, \mathbb{R})$ 又は $\varphi_X(\alpha_0, t_0, \mathbb{R})$ を各々, periodic system X の $M \times \mathbb{R}$ 上又は M 上の 軌跡 という. $\varphi(\alpha_0, t_0, \cdot)$ が 周期解 であるとは, $\sigma \neq 0$ が存在して, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して, $\varphi(\alpha_0, t_0, t + \sigma) = \varphi(\alpha_0, t_0, t)$ が成立することである.

$\mathcal{X}^r(M \times S^1)$ を, $M \times S^1$ 上の自励系全体に C^r 位相を入れた空間とする. $X \in \mathcal{P}^r(M \times \mathbb{R})$ に対して, $\bar{X} \in \mathcal{X}^r(M \times S^1)$ が次の様に対応する. 但し, $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ である. $\rho : M \times \mathbb{R} \rightarrow M \times S^1$ を $\rho(\alpha, t) = (\alpha, [t])$ により定義するとき,

$$\bar{X}_{(\alpha, [t])} = (f(\alpha, t), 1) \in T_\alpha(M) \times T_{[t]}(S^1) = T_{\rho(\alpha, t)}(M \times S^1).$$

X は周期 1 を持つから, $\bar{X}$ は矛盾なく定義される.

$\mathcal{X}_1^r(M \times S^1) = \{ \bar{X} \in \mathcal{X}^r(M \times S^1) \mid \bar{X}_{(\alpha, s)} \text{ の } T_s(S^1) \text{ 成分} = 1 \}$
 を $\mathcal{X}^r(M \times S^1)$ の部分空間とする. $\rho_*(X) = \bar{X}$ として, 写像
 $\rho_* : \mathcal{P}^r(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{X}_1^r(M \times S^1)$ が得られる. ρ_* は同相写像である. $\bar{\varphi}_{\bar{X}}$ を $\bar{X}$ の流れとし, 自然な射影 $M \times S^1 \rightarrow M$ をやはり π で表わすとき,

$\pi \Phi_X(x, s, t) = \varphi(x, s, t) = \pi \bar{\Phi}_X(x, [s], t)$
 が成立する. $P_X(x) = \varphi_X(x, 0, 1)$ で定義される C^r 級微分同相
 写像 $P_X: M \rightarrow M$ を X の Poincaré map とする.

定義 1. 次の条件を満たす点 $x \in M$ を X の 周期系 (*) の
wandering point とする. 任意の $t_0 \in \mathbb{R}$ に対して, x の周
 近傍 $U \subset M$ と自然数 n が存在して, $|t| > n$ なる任意の $t \in \mathbb{R}$
 に対して,

$$\varphi_X(U, t_0, t) \cap U = \emptyset$$

が成立する. wandering point でない点 $x \in M$ を non-wand-
 ering point とする. non-wandering point 全体の集合を
non-wandering set とする, $\omega(X)$ であらわす.

次の条件を満たす $(x, t) \in M \times \mathbb{R}$ 全体の集合を $\tilde{\Omega}(X)$ とす
 る; (x, t) の任意の周近傍 $U \subset M \times \mathbb{R}$ と任意の自然数 n に
 対して, $|m| > n$ なる整数 m が存在して, $U_m \cap \Phi_X(U_0, m) \neq \emptyset$
 となる. 但し, $U_m = \{(y, s+m) \mid (y, s) \in U\}$ とする. 一方,
 $M \times S^1$ 上の自励系 $\bar{X}$ の non-wandering set を $\Omega(\bar{X})$ で表す.

命題 1. $\varphi_*(X) = \bar{X}$ とすると, 次の成立する.

- (i) $\tilde{\Omega}(X) = \varphi^{-1}(\Omega(\bar{X}))$. 従って $\tilde{\Omega}(X)$ は X の不変集合である.
- (ii) $\omega(X) = \pi(\tilde{\Omega}(X)) = \pi(\Omega(\bar{X}))$. (以後 $\omega(\bar{X}) = \pi(\Omega(\bar{X}))$ とする.)
- (iii) $\omega(X) \subset M$ と $\tilde{\Omega}(X) \subset M \times \mathbb{R}$ は閉集合である.

定義 2. $X, Y \in \mathcal{P}^r(M \times \mathbb{R})$ が $\tilde{\Omega}$ -equivalent であるとは,

同相写像 $h: \tilde{\Omega}(X) \rightarrow \tilde{\Omega}(Y)$ と $h_0: \omega(X) \rightarrow \omega(Y)$ が存在して、次の条件をみたすことである。

- (i) h は $X|\tilde{\Omega}(X)$ と $Y|\tilde{\Omega}(Y)$ の topological equivalence.
- (ii) $h_0 \circ \pi = \pi \circ h$.
- (iii) h は時間に対して、周期1を持つ。即ち、 $\pi_R: M \times R \rightarrow R$ を自然な射影とすると、

$$h(x, t+1) = (\pi h(x, t), \pi_R h(x, t) + 1) \in M \times R.$$

命題 2. X, Y が $\tilde{\Omega}\omega$ -equivalent ならば、 $(x, t_0) \in \tilde{\Omega}(X)$ に対し、 $\omega(X)$ に含まれる軌跡 $\mathcal{O}_X(x, t_0, R)$ の h_0 による像は $\omega(Y)$ の1つの軌跡 $\mathcal{O}_Y(y, s_0, R)$ となる。

定義 3. $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathcal{X}_1^r(M \times S^1)$ が $\Omega\omega$ -equivalent であるとは、同相写像 $h: \Omega(\bar{X}) \rightarrow \Omega(\bar{Y})$ と $h_0: \omega(\bar{X}) \rightarrow \omega(\bar{Y})$ が存在して、次の条件をみたすことである。

- (i) 次の条件を持つ isotopy $H_s: \Omega(\bar{X}) \rightarrow \Omega(\bar{Y})$, $s \in I$ が存在する。但し、 $M_0 = M \times [0] \subset M \times S^1$ とする。

(a) $H_0 = h$, $H_1(\Omega(\bar{X}) \cap M_0) = \Omega(\bar{Y}) \cap M_0$. 即ち、 H_1 は、cross-section M_0 を M_0 にうつす。

(b) 任意の $s \in I$ に対して、 H_s は $\bar{X}|\Omega(\bar{X})$ と $\bar{Y}|\Omega(\bar{Y})$ の topological equivalence である。

- (ii) $\pi \circ h = h_0 \circ \pi$

$$\begin{array}{ccc} \Omega(\bar{X}) & \xrightarrow{h} & \Omega(\bar{Y}) \\ \pi \downarrow & \Omega & \downarrow \pi \\ \omega(\bar{X}) & \xrightarrow{h_0} & \omega(\bar{Y}) \end{array}$$

命題 3. X と Y が $\tilde{\Omega}\omega$ -equivalent. $\iff \bar{X}$ と $\bar{Y}$ が $\Omega\omega$ -equivalent.

定義 4. $X \in \mathcal{P}^r(M \times R)$ が $C^r\tilde{\Omega}\omega$ -stable であるとは, X の近傍 $N \subset \mathcal{P}^r(M \times R)$ が存在して, 任意の $Y \in N$ は X と $\tilde{\Omega}\omega$ -equivalent であることである. 同様に, $\bar{X} \in \mathcal{X}_1^r(M \times S^1)$ に対して, $C^r\Omega\omega$ -stable であることが定義される. 又, $\bar{X}$ が $C^r\Omega$ -stable というのは, 良く知られている意味で使う.

命題 4. $X \in \mathcal{P}^r(M \times R)$ が $\tilde{\Omega}\omega$ -stable. $\iff \bar{X} \in \mathcal{X}_1^r(M \times S^1)$ が, $\Omega\omega$ -stable.

§ 3. $\tilde{\Omega}\omega$ -stability の必要条件.

本論の目的は, X が $\tilde{\Omega}\omega$ -stable である為の条件を示すことであるが, これに関連して, transversal condition というべき $\Omega(\bar{X})$ に関する次の条件を掲げておく.

G(1) $\Omega(\bar{X})$ に含まれる任意の軌道 γ に対して, $\pi|_{\gamma}: \gamma \rightarrow M$ は正則写像である.

G(2) $\dim M \geq 3$ のとき, 次の G'(2) が満たされ, $\dim M = 2$ のとき, 次の G''(2) が満たされる.

G'(2) 実数 $K > 0$ が存在して, $\Omega(\bar{X})$ に含まれる任意の異なる 2 点 $(x, s), (y, t)$ に対して,

$$d(x, y) > K \cdot d'(s, t).$$

$G''(2)$ 実数 $K > 0$ が存在して, $\Omega(\bar{X})$ に含まれる任意の相異なる 3 点 $(x, s), (y, t), (z, u)$ に対して, 次の少なくとも 1 つの式が成立する.

$$d(x, y) > K \cdot d'(s, t)$$

$$d(y, z) > K \cdot d'(t, u)$$

$$d(z, x) > K \cdot d'(u, s).$$

但し, d と d' は各々 M と S^1 上の距離とする.

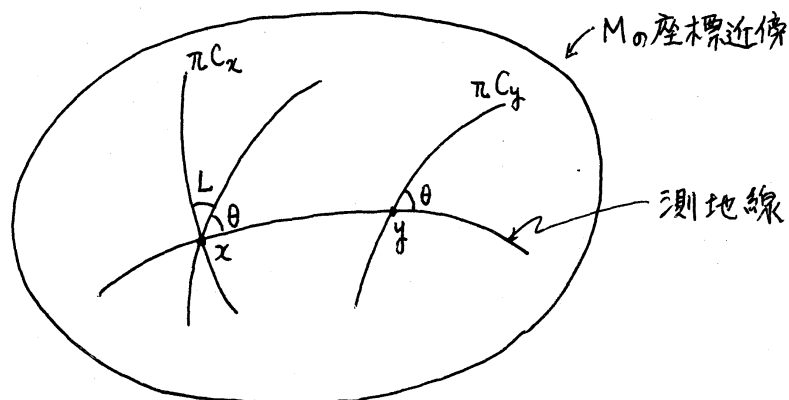
$G(3)$ $\dim M = 2$ のとき, $\varepsilon > 0$ と $\theta > 0$ が存在して, $\Omega(\bar{X})$ に含まれる任意の異なる 2 点 $(x, s), (y, t)$ に対して,

$$d(x, y) < \varepsilon \cdot d'(s, t)$$

$$\implies \angle((x, s), (y, t)) > \theta \cdot d'(s, t)$$

が成立する. 但し, $\angle$ は次のように与えられるものである.

$(x, s), (y, t)$ を通る軌跡に含まれていて, $(x, s), (y, t)$ を含む線分を各々, C_x, C_y とするとき, M 上の曲線, $\pi C_x, \pi C_y$ の x, y に於ける角度が $\angle((x, s), (y, t))$ である. ここに, M の Riemannian metric は任意に固定されているものとする.



$d'(s, t) < 1$, 従って $d(x, y) < \varepsilon$ より, $\angle$ の定義は意味を持つ.

$G'(3)$ $\varepsilon > 0$ と $\theta > 0$ が存在して, $\Omega(\bar{X})$ に含まれる任意の異なる 2 点 $(x, s), (y, t)$ に対して

$$d(x, y) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \angle((x, s), (y, t)) > \theta$$

が成立する.

命題 5.

$G'(2) \Rightarrow \pi: \Omega(\bar{X}) \rightarrow M$ の 2 重点は存在しない.

$G''(2) \Rightarrow \pi: \Omega(\bar{X}) \rightarrow M$ の 3 重点は存在しない.

$G(3) \Rightarrow \pi: \Omega(\bar{X}) \rightarrow M$ の 2 重点に於て, 軌跡の π による像は横断的に交わる.

$G'(3) \Rightarrow G(3)$.

定理 1. $X \in P^1(M \times \mathbb{R})$ が $C^1 \tilde{\Omega}\omega$ -stable (即ち, $\bar{X}$ が $C^1 \Omega\omega$ -stable) ならば, 次の (i), (ii) が成立する.

(i) $\bar{X}$ は $C^1 \Omega$ -stable である.

(ii) $G(1), G(2), G(3)$ が満たされる.

この定理は, $G(3)$ の代りに, 「軌跡の π による像は, 横断的である。」という, 少し弱い形で [2] に示されている. これは, $\tilde{\Omega}\omega$ -stable になる為の必要条件であるが, 次の節で十分条件を示す.

§4. $\tilde{\Omega}\omega$ -stability の十分条件

定義4. M^m, N^n を各々, m 次元, n 次元の微分可能多様体とする. M^m の部分集合 Λ に対して, 写像 $f: \Lambda \rightarrow N^n$ が, 点 $x \in M^m$ に於て 微分可能 であるとは, 線型写像 $\lambda_x: R^m \rightarrow R^n$ が存在して, x と $f(x)$ の局所座標を R^m, R^n と考えて,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - \lambda_x(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad (h \in R^m)$$

が成立することである. 導関数 $x \mapsto \lambda_x$ が連続であるとき, f は C^1 -級 であるという.

以後, Λ は compact とする. f が C^1 -級ならば, f は Λ の開近傍上の C^1 -級写像に拡張できる.

命題6. $C^1(\Lambda, N)$ を C^1 -写像 $f: \Lambda \rightarrow N$ 全体の集合に C^1 -位相を入れた空間とすると, $C^1(\Lambda, N)$ は Banach 空間となる.

定義5. f を M 上の C^2 -級微分同相写像とし, Λ を f の閉不変集合とする. Λ が C^1 -級双曲型集合 であるとは, C^1 -級双曲型直和分解

$$T_\Lambda(M) = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^u$$

で, f に対して不変なものが存在することである.

命題7. (Hirsch-Pugh [1]) $\dim M = 2$ とするとき, $f \in \mathcal{D}^2(M)$ の双曲型集合 Λ が, C^2 -級部分多様体ならば, Λ は C^1 -級双曲型集合である.

ここに, $\mathcal{D}^2(M)$ は, M 上の C^2 級微分同相写像全体の集合に C^2 位相を入れたものである.

命題 8. $f \in \mathcal{D}^2(M)$ とし, Λ を f の C^1 級双曲型集合とする. このとき, 恒等写像の任意の近傍 $N_1 \subset C^1(\Lambda, M)$ に対して, 次のような f の近傍 $N_2 \subset \mathcal{D}^2(M)$ が存在する.

$$\forall g \in N_2, \exists h \in N_1, g \circ h = h \circ f.$$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \\ h \downarrow & \Omega & \downarrow h \\ h(\Lambda) & \xrightarrow{g} & h(\Lambda) \end{array}$$

命題 9. $h \in C^1(\Lambda, M)$ が十分に恒等写像に近ければ, h はいくらでも 1 に近い Lipschitz constant を持つことができる.

定義 6. M 上の C^2 級微分同相写像 f が次の条件を満たすとき, f は Axiom $C^1 A$ を満たすという.

- (a) $\Omega(f)$ は C^1 級双曲型集合である.
- (b) $\Omega(f)$ の中に f の周期点は稠密に存在する.

次の定理は主定理である.

定理 2. $X \in P^2(M \times \mathbb{R})$ が次の条件を満たすとする.

- (i) X の Poincaré map $p_x: M \rightarrow M$ は Axiom $C^1 A$ と no-cycle property を持つ.

(ii) $\Omega(\bar{X})$ は $G(1)$, $G(2)$, $G'(3)$ の条件をみたす.

すると, X は $C^2\tilde{\Omega}\omega$ -stable である.

問題 $G'(3)$ の代わりに $G(3)$ の仮定のもとで, 定理 2 は成立しないか?

定理 2 を使うことにより, $\Omega(\bar{X})$ の中に周期軌道以外の軌道を含む様な周期系 X は $\tilde{\Omega}\omega$ -stable であるものを作ることができた.

$\Omega(\bar{X})$ が周期軌道のみから成る場合は, 次の様に X が $\tilde{\Omega}\omega$ -stable になるための必要十分条件が求まる.

定理 3. $X \in P^1(M \times R)$ とし, $\tilde{\Omega}(X)$ が有限個の軌道しか含まない場合, X が以下の全ての条件をみたすことが, X が $\tilde{\Omega}\omega$ -stable であるための必要十分条件となる.

(i) Poincaré map p_X の周期点は双曲型で, p_X は no-cycle property をみたす.

(ii) $\gamma \subset \Omega(\bar{X})$ に対して, $\pi|_\gamma$ は正則写像. (γ は軌道とす.)

(iii) $\dim M \geq 3$ のとき, $\pi|_{\Omega(\bar{X})}$ は 2 重点を持たない.

$\dim M = 2$ のとき, $\pi|_{\Omega(\bar{X})}$ は 3 重点を持たない.

(iv) $\dim M = 2$ のとき, $\pi|_{\Omega(\bar{X})}$ の交わりは全て横断的である.

文 献

- [1] M. W. Hirsch - C. C. Pugh, Stable manifolds for hyperbolic sets, Bull. A. M. S., (1969), 149 - 152.
- [2] 池上宜弘, Stability of periodic time dependent dynamical systems, 京都大学教理解析研究所講究録 284, 1976 年 10 月, 64 - 78.